УДК 539.3

А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, Ю. А. Коротких

Численное решение задачи о свободных колебаниях нетонких некруговых цилиндрических оболочек

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Рассматривается задача о свободных колебаниях нетонких некруговых цилиндрических оболочек с различными граничными условиями на краях в уточненной постановке с использованием теории Миндлина–Тимошенко. Для расчета частот используется численно-аналитический подход, который основан на применении метода сплайн-апроксимации, коллокации, а также метода дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска. Проводится сравнение частот свободных колебаний оболочек эллиптического сечения с различным отношением полуосей для различных граничных условий.

Цилиндрические оболочки с некруговым поперечным сечением находят широкое применение во многих областях современной техники. Важной задачей является определение резонансных частот таких оболочек, причем представление о резонансных частотах вынужденных колебаний дают исследования частот свободных колебаний. Поскольку использование трехмерной модели для исследований свободных колебаний во многих случаях сопряжено со значительными трудностями, то при исследовании динамических характеристик оболочек средней толщины следует применять уточненную теорию оболочек. В научной литературе имеется большое количество работ, посвященных исследованию колебаний круговых цилиндрических оболочек с переменной толщиной на основе различных механических моделей [1, 2] и совсем немного работ, посвященных свободным колебаниям однородных и неоднородных цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения с переменной толщиной [3–8].

В данном сообщении для исследования свободных колебаний нетонких цилиндрических оболочек с некруговым поперечным сечением в рамках уточненной теории оболочек Миндлина–Тимошенко предлагается эффективная численно-аналитическая методика, которая базируется на применении сплайн-аппроксимации по одной из координат, а также метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [1, 2]. Сплайн-аппроксимация в сочетании с методом дискретной ортогонализации применена в работе [3] для расчета напряженно-деформированного состояния нетонких цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения по уточненной теории оболочек.

Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек в уточненной постановке, которая базируется на гипотезе прямой линии. В соответствии с принятой гипотезой в системе координат s, t, γ, (s, t, γ — координаты точек оболочки в направлении образующей, направляющей и нормали к срединной поверхности, причем $0 \leqslant s \leqslant L$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $-h/2 \leqslant \gamma \leqslant h/2$). Перемещения можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&u_s(s,t,\gamma,\bar t) = u(s,t,\bar t) + \gamma\psi_s(s,t,\bar t),\\
&u_t(s,t,\gamma,\bar t) = v(s,t,\bar t) + \gamma\psi_t(s,t,\bar t),\\
&u_\gamma(s,t,\gamma,\bar t) = w(s,t,\bar t),
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $\bar t$ — время; $u(s,t,\bar t)$, $v(s,t,\bar t)$, $w(s,t,\bar t)$ — перемещения координатной поверхности; $\psi_s(s,t,\bar t)$, $\psi_t(s,t,\bar t)$ — функции, которые характеризуют полный поворот прямолинейного элемента. В соответствии с (1) выражения для деформаций запишутся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&e_s(s,t,\gamma,\bar t) = \varepsilon_s(s,t,\bar t) + \gamma\kappa_s(s,t,\bar t),\\
&e_t(s,t,\gamma,\bar t) = \varepsilon_t(s,t,\bar t) + \gamma\kappa_t(s,t,\bar t),\\
&e_{st}(s,t,\gamma,\bar t) = \varepsilon_{st}(s,t,\bar t) + 2\gamma\kappa_{st}(s,t,\bar t),\\
&e_{s\gamma}(s,t,\gamma,\bar t) = \gamma_s(s,t,\bar t), \qquad e_{t\gamma}(s,t,\gamma,\bar t) = \gamma_t(s,t,\bar t),
\end{aligned} \tag{2}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}, \qquad \varepsilon_t = \frac{\partial v}{\partial t} + k(t)w, \qquad \varepsilon_{st} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s},\\
&\kappa_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s}, \qquad \kappa_t = \frac{\partial \psi_t}{\partial t} - k(t)\left(\frac{\partial v}{\partial t} + k(t)w\right),\\
&2\kappa_{st} = \frac{\partial \psi_s}{\partial t} + \frac{\partial \psi_t}{\partial s} - k(t)\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \gamma_s = \psi_s + \frac{\partial w}{\partial s}, \qquad \gamma_t = \psi_t + \frac{\partial w}{\partial t} - k(t)v.
\end{aligned} \tag{3}
$$

В (2), (3) ε_s, ε_t, ε_{st} — тангенциальные, κ_s, κ_t, κ_{st} — изгибные деформации координатной поверхности; γ_s, γ_t — углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Уравнения движения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{st}}{\partial t} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial \bar t^2},\\
&\frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial N_{st}}{\partial s} + k(t)Q_t = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial \bar t^2},\\
&\frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_t}{\partial t} - k(t)N_t = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \bar t^2},\\
&\frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{ts}}{\partial t} - Q_s = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \bar t^2},\\
&\frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial M_{st}}{\partial s} - Q_t = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial \bar t^2},
\end{aligned} \tag{4}
$$

причем $N_{st} - k(t)M_{ts} - N_{ts} = 0$.

В (4) N_s, N_t, N_{st}, N_{ts} — тангенциальные усилия; Q_s, Q_t — перерезывающие усилия; M_s, M_t, M_{st}, M_{ts} — изгибные и скручивающие моменты; ρ — плотность материала оболочки; h — толщина оболочки.

Соотношения упругости для ортотропных оболочек симметричной структуры по толщине относительно срединной поверхности запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&N_s = C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_t, \qquad N_t = C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_t,\\
&N_{ts} = C_{66}\varepsilon_{ts}, \qquad N_{st} = C_{66}\varepsilon_{st} + 2k(t)D_{66}\kappa_{st},\\
&M_s = D_{11}\kappa_s + D_{12}\kappa_t, \qquad M_t = D_{11}\kappa_s + D_{22}\kappa_t,\\
&M_{ts} = M_{st} = 2D_{66}\kappa_{st}, \qquad Q_t = K_2\gamma_t, \qquad Q_s = K_1\gamma_s,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где

$$
K_1 = \frac{5}{6}hG_{13}, \qquad K_2 = \frac{5}{6}hG_{23}, \qquad C_{ij} = B_{ij}h, \qquad D_{ij} = \frac{B_{ij}h^3}{12},
$$

$$
B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad B_{66} = G_{12}.
$$

Здесь G_{13}, G_{23}, G_{12} — модули поперечных сдвигов; E_1, E_2 — модули упругости; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона.

В случае изотропной оболочки имеем $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $G_{12} = G_{23} = G_{13} = G$.

Так как все точки оболочки совершают гармонические колебания с частотой ω, перемещения и полные углы поворота можно представить в виде (далее знак $\widehat{\ }$ опускается)

$$
\begin{aligned}
&u(s,t,\bar{t}) = \widehat{u}(s,t)\exp(i\omega\bar{t}); \qquad v(s,t,\bar{t}) = \widehat{v}(s,t)\exp(i\omega\bar{t});\\
&w(s,t,\bar{t}) = \widehat{w}(s,t)\exp(i\omega\bar{t}); \qquad \psi_s(s,t,\bar{t}) = \widehat{\psi_s}(s,t)\exp(i\omega\bar{t});\\
&\psi_t(s,t,\bar{t}) = \widehat{\psi}_t(s,t)\exp(i\omega\bar{t}).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Выбрав в качестве неизвестных функций компоненты вектора перемещений срединной поверхности и полные углы поворота, разрешающую систему уравнений в частных производных можно записать в виде

$$
L_i\bar{g} = 0, \tag{7}
$$

где L_i $(i = \overline{1,5})$ — линейные дифференциальные операторы второго порядка, а $\bar{g} = \{u(s,t), v(s,t), w(s,t), \psi_s(s,t), \psi_t(s,t)\}$.

На криволинейных контурах $s = 0$, L рассмотрим такие граничные условия:

1) жесткое защемление

$$
u = v = w = \psi_s = \psi_t = 0;
$$

2) шарнирное опирание (контур свободен в направлении образующей)

$$
\frac{\partial u}{\partial s} = v = w = \frac{\partial \psi_s}{\partial s} = \psi_t = 0.
$$

Для рассмотрения замкнутых оболочек при $t = t_1 = 0$, $t = t_2$ задаются условия симметрии:

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = v = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \psi_s}{\partial t} = \psi_t = 0.
$$

Система уравнений (7) с соответствующими граничными условиями на контурах $s = 0$, L и $t = t_1$, t_2 представляет собой двумерную краевую задачу на собственные значения.

Методика решения. Для оболочек некругового поперечного сечения удобно рассматривать уравнение направляющей для срединной поверхности, заданное либо параметрически $x = f_1(\theta)$, $y = f_2(\theta)$, где θ — параметр направляющей, либо в полярной системе координат — $r = r(\theta)$. Тогда элемент дуги направляющей может быть представлен в виде $dt = n(\theta)dt$, причем в случае параметрического задания направляющей $n(\theta) = \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}$, а в случае полярной системы координат $n(\theta) = \sqrt{r^2 + r'^2}$. Производные по дуге выражаются через производные по θ следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{n^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{n'}{n^3}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Тогда уравнения (7) перепишутся в виде

$$\overline{L}_i\overline{g}(s, \theta) = 0. \tag{8}$$

Задачу (8) с соответствующими граничными условиями можно решить с применением метода сплайн-коллокации [2, 3]. Разрешающие функции $u(s, \theta)$, $v(s, \theta)$, $w(s, \theta)$, $\psi_s(s, \theta)$, $\psi_\theta(s, \theta)$ представим в виде

$$\begin{aligned} &u(s,\theta) = \sum_{i=0}^{N} u_i(\theta)\varphi_{1i}(s); \qquad v(s,\theta) = \sum_{i=0}^{N} v_i(\theta)\varphi_{2i}(s);\\ &w(s,\theta) = \sum_{i=0}^{N} w_i(\theta)\varphi_{3i}(s); \qquad \psi_\theta(s,\theta) = \sum_{i=0}^{N} \psi_{\theta i}(s)\varphi_{4i}(\theta);\\ &\psi_z(s,\theta) = \sum_{i=0}^{N} \psi_{zi}(s)\varphi_{5i}(\theta), \end{aligned} \tag{9}$$

где $u(\theta)$, $v(\theta)$, $w(\theta)$, $\psi_\theta(\theta)$, $\psi_z(\theta)$ — искомые функции переменной θ; $\varphi_{ji}(z)$ ($j = \overline{1,5}, i = \overline{0,N}$) — линейные комбинации B-сплайнов на равномерной сетке $\Delta\colon 0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = L$ с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$. Подставляя представление (9) в уравнения (8), требуем их удовлетворения в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = \overline{0,N}$ [2, 3]. В результате получаем одномерную краевую задачу

$$\frac{d\overline{Y}}{d\theta} = A(\theta, \omega)\overline{Y}, \tag{10}$$

$B_1\overline{Y} = \overline{0}$ при $\theta = \theta_1$, $B_2\overline{Y} = \overline{0}$ при $\theta = \theta_2$, где $\overline{Y} = \{\overline{u}, \overline{u'}, \overline{v}, \overline{v'}, \overline{w}, \overline{w'}, \overline{\psi}_\theta, \overline{\psi}'_\theta, \overline{\psi}_z, \overline{\psi}'_z\}$, $\overline{u} = \{u_0, u_1, \ldots, u_N\}$, $\overline{v} = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$, $\overline{w} = \{w_0, w_1, \ldots, w_N\}$, $\overline{\psi_\theta} = \{\psi_{\theta 0}, \psi_{\theta 1}, \ldots, \psi_{\theta N}\}$, $\overline{\psi_z} = \{\psi_{z0}, \psi_{z1}, \ldots, \psi_{zN}\}$; A — квадратная матрица порядка $10(N+1) \times 10(N+1)$, B_1, B_2 — прямоугольные матрицы граничных условий порядка $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10) с соответствующими граничными условиями решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [1].

Решение задачи. Анализ результатов. На основе данной методики были рассчитаны частоты свободных колебаний замкнутых некруговых цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением. Полуоси эллипса выбирались так, чтобы масса эллиптической оболочки и круговой цилиндрической оболочки были одинаковыми. Введем обозначения: R — радиус срединной круговой цилиндрической оболочки; a, b — полуоси элипса в сечении некруговой цилиндрической оболочки; $\Delta = (b-a)/(b+a)$. Тогда $a = R(1-\Delta)/f$, $b = R(1+\Delta)/f$, где $f = 1+\Delta^2/4+\Delta^4/64+\Delta^6/256$. При $\Delta = 0$ некруговая цилиндрическая оболочка вырождается в круговую. В этом частном случае частоты свободных колебаний оболочки, полученные с использованием изложенной выше методики, можно сравнить с уже известными результатами, полученными по трехмерной и уточненной теории [2]. Сравнение первых трех обезразмеренных частот $\overline{\omega}_i = \omega_i H\sqrt{\rho/G}$, колебаний цилиндрической изотропной оболочки эллиптического поперечного сечения при $\Delta = 0$ проводилось (табл. 1) для случаев: A) замкнутая цилиндрическая оболочка с шарнирным опиранием торцов в рамках уточненной теории (расчеты проводились по данной методике при $\Delta = 0$); B) круговая цилиндрическая оболочка с $k(t) = 1/R$ и условиями симметрии при $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$ и шарнирным опиранием торцов в рамках теории Миндлина-Тимошенко; C) круговая цилиндрическая оболочка в рамках трехмерной модели [2]. Геометрические параметры оболочки — $H = 2l_0$, $R = 10l_0$, $L = 20l_0$. Коэффициент Пуассона материала оболочки $\nu = 0{,}3$. При сравнении соответствующих частот наблюдалось их практическое совпадение для оболочек в рамках модели Миндлина–Тимошенко и незначительное расхождение с частотами оболочки в рамках трехмерной теории.

Исследовалось влияние характера изменения поперечного сечения оболочки ($\Delta = 0$; 0,1; 0,2; 0,3) при сохранении массы на частоты $\overline{\omega}_i = \omega_i h_0\sqrt{\rho/G_0}$ замкнутой оболочки с эллиптическим круговым сечением и шарнирно опертыми торцами при $z = 0$, L (табл. 2). Геометрические параметры оболочки — ($H = 2$, $R = 10$, $L = 20$). Рассматривались граничные условия двух типов: шарнирное опирание (S-S) и жесткое зарепление (C-C) торцов оболочки.

Анализ результатов расчетов показывает незначительное отличие частот колебаний цилиндрических оболочек с эллиптическим сечением для различных отношений полуосей. При этом с возрастанием отношения полуосей частоты колебаний уменьшаются. Предла-

Таблица 1

ω_i	A	B	C
$\overline{\omega}_1$	0,0707	0,0707	0,0694
$\overline{\omega}_2$	0,0939	0,0919	0,0938
$\overline{\omega}_3$	0,0987	0,0987	0,0990

Таблица 2

Тип граничных условий	ω_i	$\Delta = 0$	$\Delta = 0{,}1$	$\Delta = 0{,}2$	$\Delta = 0{,}3$
S-S	$\overline{\omega}_1$	0,0707	0,0683	0,0645	0,0584
	$\overline{\omega}_2$	0,0939	0,0923	0,0907	0,0876
	$\overline{\omega}_3$	0,0987	0,0962	0,0903	0,0870
C-C	$\overline{\omega}_1$	0,0890	0,0876	0,0854	0,0832
	$\overline{\omega}_2$	0,1221	0,1200	0,1186	0,1174
	$\overline{\omega}_3$	0,1432	0,1387	0,1375	0,1356

гаемая в работе методика позволяет производить расчеты частот свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины.

1. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
2. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Соколова Л. В.* Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Теорет. и прикл. механика. – 2008. – Вып. 43. – С. 111–117.
3. *Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N.* Influence of orthotropy on displacements and stresses in nonthin cylindrical shells with elliptic cross section // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, Is. 6. – P. 654–661.
4. *Kumar V., Singh A. V.* Vibration analysis of non-circular cylindrical shells with elliptic cross section // J. Sound and Vibr. – 1993. – **161**, Is. 2. – P. 333–354.
5. *Soldatos K. Z.* Mechanics of shells with non-circular cross section // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, Is. 8. – P. 297–274.
6. *Srinivasan R. S., Robby W.* Free vibration of non-circular cylindrical shell panels // J. Sound and Vibr. – 1976. – **46**, Is. 1. – P. 117–126.
7. *Suzuki K., Leissa A. W.* Exact solution for free vibrations of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness // Ibid. – 1986. – **107**, Is. 1. – P. 1–15.
8. *Yamada G., Irie T., Tagawa Y.* Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile // Ibid. – 1984. – **95**, Is. 1. – P. 117–126.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.01.2013

О. Я. Григоренко, Т. Л. Єфімова, Ю. А. Коротких

Числове розв'язання задачі про вільні коливання нетонких некругових циліндричних оболонок

Розглядається задача про вільні коливання нетонких некругових циліндричних оболонок з різними граничними умовами на краях в уточненій постановці з використанням теорії Міндліна–Тимошенка. Для розрахунку частот використовується чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації, колокації та методу дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку. Проводиться порівняння частот вільних коливань оболонок еліптичного перерізу з різним відношенням півосей для різних граничних умов.

A. Ya. Grigorenko, T. L. Efimova, Yu. A. Korotkih

Free vibrations of nonthin noncircular cylindrical shells

A problem of natural vibrations of nonthin noncircular cylindrical shells under various boundary conditions of its endfaces within the framework of the Mindlin–Timoshenko theory is considered. Using the spline-approximation, the problem is solved by the steady-state numerical method of discrete orthogonalization with incremental search. The comparison of the frequencies of open cylindrical shells with different ratios of semiaxes for different boundary conditions is performed.