УДК 517.984

А. Н. Сыровацкий

Обратная спектральная задача для самосопряженного дифференциального оператора при одномерном возмущении

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Изучен случай одномерного возмущения оператора второй производной на конечном отрезке, а также решена обратная задача нахождения возмущения по заданному спектру.

1. Постановка задачи и предварительные сведения. Исследуется возмущение дифференциального самосопряженного оператора специального вида, действующего в гильбертовом пространстве. В работе решается прямая задача исследования спектра возмущенного оператора и обратная спектральная задача. Под обратной спектральной задачей понимается нахождение условий на спектры возмущенного и невозмущенного оператора для существования возмущения определенного вида, а также восстановления возмущения (возможно, неединственным образом).

Пусть L — линейный оператор в гильбертовом пространстве с плотной областью определения $D(L)$. Рассмотрим уравнение на собственной функции оператора L

$$Ly = \lambda y,$$

где $y = y(x)$ принадлежит $D(L)$, а λ — некоторый параметр. Функция, которая удовлетворяет этому уравнению и принадлежит $D(L)$, называется собственной функцией данного оператора. Соответствующее значение λ называется собственным значением.

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор $L_0 y = -y''$, действующий в гильбертовом пространстве $L^2_{(0,\pi)}$, и соответсвующую краевую задачу

$$\begin{cases} L_0 y = \lambda^2 y, \\ y(0) = y(\pi), \\ y'(0) = y'(\pi), \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Утверждение 1. *Спектр оператора* (1) $\sigma(L_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda = 2n, \ n \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим краевую задачу для возмущенного оператора. Пусть L — интегро-дифференциальный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L^2_{(0,\pi)}$: $Ly = -y'' + \langle y, \phi\rangle \phi$, где ϕ — вещественная функция из $L^2_{(0,\pi)}$, $\phi(x) = \phi(\pi - x)$. Исследуем краевую задачу

$$\begin{cases} Ly = \lambda^2 y, \\ y(0) = y(\pi), \\ y'(0) = y'(\pi), \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Прямая спектральная задача.

Утверждение 2. *Спектр возмущенного оператора* (2) *совпадает с корнями уравнения*

$$\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} \Bigg(\int\limits_0^\pi \int\limits_{\pi/2}^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} \phi_t dt \phi(x) dx - 1 \Bigg) +$$

$$+ 2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos\lambda \Big(x - \frac{\pi}{2} \Big) \phi_x dx \int\limits_0^{\pi/2} \cos\lambda x \phi_x dx = 0. \tag{3}$$

Обозначим

$$R_\lambda = \int\limits_0^{\pi/2} e^{-i\lambda y} \int\limits_{\pi/2}^y \phi_{\pi/2+y-t} \phi_{\pi/2-t} dt dy, \qquad F_\lambda = \int\limits_0^{\pi/2} e^{i\lambda t} \phi_t dt.$$

Уравнение (3) примет вид

$$-2\lambda \sin\frac{\lambda\pi}{2} + \left(e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} - e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} \right) (R_\lambda - R_{-\lambda}) + (F_\lambda + F_{-\lambda}) \left(e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} F_\lambda + e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} F_{-\lambda} \right) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$H(\lambda) = -2\lambda \sin\frac{\lambda\pi}{2} + \left(e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} - e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} \right) (R_\lambda - R_{-\lambda})(F_\lambda + F_{-\lambda}) \left(e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} F_\lambda + e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} F_{-\lambda} \right).$$

Спектр оператора (2) суть корни функции $H(\lambda)$. Исследуем распределение корней данной функции.

Пусть функция

$$G_\lambda = R_\lambda - R_{-\lambda} + F_\lambda F_{-\lambda} + F_{-\lambda}^2, \tag{4}$$

тогда

$$H(\lambda) = -2\lambda \sin\frac{\lambda\pi}{2} + e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} G_\lambda + e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}} G_{-\lambda}. \tag{5}$$

Функции R_λ, F_λ — целые функции экспоненциального типа $\pi/2$. Сопряженная индикаторная диаграмма функции $G(\lambda)$ — это отрезок мнимой оси $[-i\pi/2, i\pi]$. Легко показать, что функция $H(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа π и принадлежит классу Картрайт (классу C) [1]. Индикатор функции $H(\lambda)$ имеет вид $h_f(\theta) = \pi|\sin\theta|$. Функция $H(\lambda)$ — четная, все ее корни вещественны.

Пусть $\{\alpha_k\}$ — корни $H(\lambda)$. Функция $H(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт и, значит, представима в виде [1]

$$H(\lambda) = A \lim_{R\to\infty} \prod_{|\alpha_n|<R} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_n^2} \right),$$

где

$$A = H(0) = 4 \Bigg(\int\limits_0^{\pi/2} \phi_x dx \Bigg)^2.$$

Тогда распределение корней можно описать при помощи теоремы 1.2 [2].

Применяя данную теорему, получим условия на спектр оператора (2).

Теорема 1. *Спектр оператора* (2) *суть корни функции* $H(\lambda)$ *вида* (5), *распределение корней которой подчинено следующим условиям:*

1) $\lim\limits_{R\to\infty} R^{-1}\operatorname{card}\{\alpha_k\colon 0 < |\alpha_k| < R\} = 2$*;*

2) $n(0,t) = O(t),\ t \to \infty$*;*

3) $n(0,t+1) - n(0,t) = o(t),\ t \to \infty$*;*

4) $\exists b \in \mathbb{R}\ \{a_k\}$*:* $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_0^\infty \frac{[n(b,t) - n(x,t)]}{t} dt\right]^+ \frac{dx}{1+x^2} < \infty$*;*

5) $\alpha_k = -\alpha_{-k}$.

3. Обратная спектральная задача. Рассмотрим обратную задачу нахождения возмущения по заданному спектру.

Пусть имеется счетное множество $\sigma \subset \mathbb{R}$. Найдем условия, которым должно удовлетворять σ и возмущение $\int\limits_0^\pi \phi_x dx$, чтобы спектр оператора

$$\begin{cases} Ly = \lambda^2 y, \\ y(0) = y(\pi), \\ y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$$

совпадал с множеством σ, где $\lambda \in \mathbb{R}$, L — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L^2_{(0,\pi)}$, $Ly = -y'' + \langle y, \phi\rangle\phi$, ϕ — вещественная функция из $L^2_{(0,\pi)}$, $\phi_t = \phi_{\pi-t}$.

Пусть точки множества σ удовлетворяют условию теоремы 1. Построим по точкам спектра функцию

$$H(\lambda) = A \lim_{R\to\infty} \prod_{|\alpha_n|<R} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_n^2}\right), \tag{6}$$

где константа $A \in \mathbb{R}$, $A \geqslant 0$.

Из (5) следует вещественная часть

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\lambda\pi}{2}} G_\lambda\right) = \frac{H(\lambda)}{2} + \lambda \sin\frac{\lambda\pi}{2}.$$

.

Обозначим

$$M(\lambda) = \frac{H(\lambda)}{2} + \lambda \sin\frac{\lambda\pi}{2}.$$

Пусть для функции $M(\lambda)$ выполняется условие

$$\int\limits_{-\infty}^\infty |M(x)|^2 dx < \infty. \tag{7}$$

Так как $M(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа π, то по теореме Винера–Пэли [3] она представима в виде $M(\lambda) = (1/\sqrt{2\pi})\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{it\lambda}dt$, где $g(t) \in L^2(-\pi,\pi)$. Поэтому $M(\lambda) \in \mathbb{H}_2^+$ [4]. Тогда по теореме Титчмарша [5]

$$\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{\lambda\pi}{2}}G_\lambda\right) = -\frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\dfrac{H(\lambda)}{2} + \lambda\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}}{t-x}dt$$

и для $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{i\frac{\lambda\pi}{2}}G_\lambda = \frac{H(\lambda)}{2} + \lambda\sin\frac{\lambda\pi}{2} - \frac{i}{\pi}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\dfrac{H(t)}{2} + t\sin\dfrac{t\pi}{2}}{t-\lambda}dt. \tag{8}$$

Используя формулы Сохоцкого [6] получаем, что для $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$G_\lambda = \frac{e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\dfrac{H(x)}{2} + x\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x-\lambda}dx.$$

Потребуем от функции $G_\lambda + G_{-\lambda}$ неотрицательности при вещественном аргументе. Используя (8) и четность функции $H(\lambda)$, имеем

$$G_\lambda + G_{-\lambda} = e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}\frac{H(\lambda)}{2} + e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}\lambda\sin\frac{\lambda\pi}{2} + \frac{e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{i\pi}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\dfrac{H(t)}{2} + t\sin\dfrac{t\pi}{2}}{t-\lambda}dt +$$

$$+ e^{i\frac{\lambda\pi}{2}}\frac{H(\lambda)}{2} + e^{i\frac{\lambda\pi}{2}}\lambda\sin\frac{\lambda\pi}{2} - \frac{e^{i\frac{\lambda\pi}{2}}}{i\pi}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\dfrac{H(t)}{2} + t\sin\dfrac{t\pi}{2}}{t-\lambda}dt =$$

$$= 2\cos\frac{\lambda\pi}{2}\left(\frac{H(t)}{2} + t\sin\frac{t\pi}{2}\right) - 2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\dfrac{H(t)}{2} + t\sin\dfrac{t\pi}{2}}{t-\lambda}dt =$$

$$= 2\cos\frac{\lambda\pi}{2}M(\lambda) - 2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{M(t)}{t-\lambda}dt.$$

Таким образом, получим еще одно условие на множество σ

$$2\cos\frac{\lambda\pi}{2}M(\lambda) - 2\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{M(t)}{t-\lambda}dt \geqslant 0. \tag{9}$$

Из (4), учитывая условие неотрицательности $G_\lambda + G_{-\lambda}$, получаем

$$G_\lambda + G_{-\lambda} = R_\lambda - R_{-\lambda} + F_\lambda F_{-\lambda} + F_{-\lambda}^2 + R_{-\lambda} - R_\lambda + F_{-\lambda}F_\lambda + F_\lambda^2 =$$

$$= (F_\lambda + F_{-\lambda})^2 = 4\left(\int\limits_0^{\pi/2} \cos\lambda x\phi_x dx\right)^2.$$

Значит, $F_c(\lambda) = \pm(G_\lambda + G_{-\lambda})^{1/2}/2$, где $F_c(\lambda) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\lambda t\phi_t dt$.

Из (8) при $\lambda = 0$ имеем

$$G(0) = \frac{H(0)}{2} - \frac{i}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\dfrac{H(t)}{2} + t\sin\dfrac{t\pi}{2}}{t} dt = \frac{H(0)}{2} = \frac{A}{2},$$

поэтому

$$\left(\int\limits_0^{\pi/2} \phi_x dx\right)^2 = \frac{A}{4}.$$

Таким образом, функция ϕ_x восстанавливается через обратное косинус-преобразование Фурье

$$\phi_x = \pm\widetilde{F}_c\left\{\frac{(G_\lambda + G_{-\lambda})^{1/2}}{2}\right\}(x), \qquad \forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \tag{10}$$

Доопределим функцию ϕ_x на интервале $[\pi/2; \pi]$ по симметрии

$$\phi_x = \phi_{\pi - x}, \qquad \forall\, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

Следует заметить, что функция ϕ_x восстанавливается неоднозначно, а с точностью до константы. Если в формуле (6) взять $A = 1$, то функция ϕ_x восстанавливается однозначно, с точностью до знака. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. *Пусть имеется счетное множество $\sigma \subset \mathbb{R}$. Если точки множества удовлетворяют условиям теоремы 1 и условиям* (7), (9), *то существует возмущение $\langle y, \phi\rangle\phi$, где ϕ — вещественная функция из $L^2_{(0,\pi)}$, $\phi_t = \phi_{\pi-t}$ такое, что σ является спектром оператора* (2). *Функция ϕ_x восстанавливается однозначно, с точностью до знака по формуле* (10).

1. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions / Transl. Math. Monogr. Vol. 150. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. – 248 p.
2. *Favorov S. Yu.* Zero sets of exponential type entire functions with some additional properties on the real axis // Algebra a Analiz. – 2008. – **20**, Is. 1. – P. 138–145.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Выща шк., 1984. – 122 с.
5. *Нуссенцвейг Х. М.* Причинность и дисперсионные соотношения. – Москва: Мир, 1976. – 462 с.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – 3-е изд. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 27.05.2013

О. М. Сировацький

Обернена спектральна задача для самоспряженого диференційного оператора при одновимірному збуренні

Вивчено випадок одновимірного збурення оператора другої похідної на кінцевому відрізку, а також вирішена обернена задача знаходження збурення по заданому спектру.

A. N. Syrovatsky

The inverse spectral task for a self-adjoint differential operator at a one-dimensional perturbation

The case of a one-dimensional perturbation of the operator of flexon on a finite interval is studied. The inverse task of finding a perturbation by the given spectrum is solved.