ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2014

ФІЗИКА

УДК 533.1;538.94

А. В. Бабич

Скрытая симметрия уравнений магнитной гидродинамики и инвариантные решения

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Ф. Клепиковым)

Рассмотрена групповая структура уравнений магнитной гидродинамики. Для двухмерного случая с помощью скрытой конформной симметрии построены классы инвариантных решений. Исследованы соответствующие течения.

Одной из наиболее активно развивающихся областей современной физики является физика двухмерных систем. Связано это, с одной стороны, с уникальными свойствами двухмерного пространства, а с другой — с возможными перспективами технологического применения двухмерных систем. Уникальные свойства двухмерного пространства состоят в значительно более широкой, чем в пространствах большей размерности, допускаемой группой, симметрии. Именно с этим связан тот факт, что многие двухмерные задачи являются точно решаемыми, в отличие от своих многомерных аналогов [1]. Теоретическое исследование физики двухмерных систем ведется на протяжении многих десятилетий, среди наиболее важных достижений в этой области стоит отметить: точное решение двухмерной модели Изинга [2], послужившее одним из важных шагов в создании современной теории фазовых переходов; классификация двухмерных конформных теорий поля [3]. Активный рост числа экспериментальных работ, посвященных физике двухмерных систем, начался после открытия квантового эффекта Холла (сначала целочисленного, затем квантового) [4, 5]. В последнее время интерес к физике двухмерных систем значительно возрос в связи созданием графена и с возможными перспективами его технологического применения. Данная работа посвящена исследованию групповых свойств уравнений магнитной гидродинамики. Особое внимание уделяется двухмерному случаю.

Групповая структура и скрытая симметрия уравнений магнитной гидродинамики. Если проводящая жидкая (или газообразная) среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамических движениях в ней индуцируются электрические поля и возникают электрические токи. Но на токи в магнитном поле действуют силы, которые могут существенно повлиять на движение жидкости. В то же время эти токи меняют само магнитное поле. Таким образом, возникает сложная картина взаимодействия магнитных и гидродинамических явлений, которая рассматривается на основе совместной системы уравнений поля и уравнений движения жидкости.

В область применения магнитной гидродинамики входят очень разнообразные физические объекты — от жидких металлов до космической плазмы. Для буквального применения магнитной гидродинамики необходимо рассмотрение характерных расстояний и промежутков времени, которые велики по сравнению с длиной пробега и временем пробега носителей тока (электронов, ионов).

В нашей работе рассматривается система, в которой магнитная проницаемость мало отличается от единицы. Запишем уравнения магнитной гидродинамики для случая, когда можно пренебречь всеми диссипативными процессами — для идеальной жидкости. Это значит, что не учитываются процессы вязкости и теплопроводности, а также конечность электрической проводимости среды σ. Соответствующая система уравнений выглядит следующим образом [6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\vec{v}\vec{H}], \\ \mathrm{div}\,\vec{H} = 0, \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - \dfrac{1}{4\pi\rho}[\vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}], \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho + \mathrm{div}(\vec{v}) = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)p + \rho c^2\,\mathrm{div}(\vec{v}) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где ρc^2 рассматривается как заданная функция переменных p, ρ.

Система уравнений (1) инвариантна относительно группы преобразований Галилея, которая состоит из переносов, вращений и галилеевых переносов. В случае политропного газа, т. е. для $\rho c^2 = \gamma p$, где γ представляет собой произвольную константу, система (1) становится инвариантной относительно масштабных преобразований [7].

В работе [7] показано, что уравнения, описывающие идеальный газ, в случае, когда γ связано с размерностью пространства n выражением $\gamma = (n+2)/n$, что соответствует одноатомному политропному газу, обладают дополнительной конформной симметрией.

Наличие этой симметрии делает возможным построение классов инвариантных решений [8]. Помимо этого, именно с наличием этой скрытой симметрии связана аналогия между уравнениями двухмерной гидродинамики, уравнениями "мелкой воды" и уравнениями, описывающими двухмерный электронный газ в полевом транзисторе [9, 10].

В случае магнитной гидродинамики уравнения (1) также допускают скрытую симметрию. Преобразования для этой симметрии в случае плоского слоя жидкости и магнитного поля, направленного перпендикулярно слою, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &t' = \frac{t}{1-at}, \qquad x_i' = \frac{x_i}{1-at}, \\ &v_i' = v_i + a(x_i - tv_i), \\ &\rho' = \rho(1-at)^2, \qquad p' = p(1-at)^4, \\ &H' = H(1-at)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Наличие дополнительной симметрии (2) позволяет построить некоторые точные инвариантные решения уравнений (1). При построении инвариантных решений возникает система дифференциальных уравнений, число независимых переменных равно рангу искомых решений. В данной работе строится решение ранга 1. При этом возникает система обыкновенных дифференциальных уравнений, что значительно облегчает задачу интегрирования, в то же время решения ранга 1 обладают достаточной общностью и описывают целый класс течений газа. В нашем случае для построения решений ранга 1 надо рассматривать подгруппу размерности 2.

Для такой подгруппы подходит подгруппа с генераторами X_{12}, $X_+ + X_0$, где X_0 — оператор, соответствующий переносу по времени, а X_{12} — вращение вокруг оси Z. Генераторы этих групп выглядят так:

$$
\begin{aligned}
&X_+ = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx^i\frac{\partial}{\partial x^i} + (x^i - tv^i)\frac{\partial}{\partial v^i} - 2t\rho\frac{\partial}{\partial \rho} - 4tp\frac{\partial}{\partial p} - 2tH\frac{\partial}{\partial H},\\
&X_0 = \frac{\partial}{\partial t},\\
&X_{12} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v_y\frac{\partial}{\partial v_x} - v_x\frac{\partial}{\partial v_y}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Для построения инвариантных решений удобно перейти к цилиндрическим координатам, в которых исходная система уравнений (1) выглядит следующим образом:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_rH) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\phi H}{\partial \phi},\\
\dfrac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\phi}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \phi} + \dfrac{v_\phi^2}{r} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{H}{4\pi\rho}\dfrac{\partial H}{\partial r} = 0,\\
\dfrac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} + \dfrac{v_\phi}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{v_\phi v_r}{r} + \dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial \phi} + \dfrac{H}{4\pi\rho r}\dfrac{\partial H}{\partial \phi} = 0,\\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \dfrac{v_\phi}{r}\dfrac{\partial \rho}{\partial \phi} + \rho\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) = 0,\\
\dfrac{\partial p}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{v_\phi}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \phi} + 2p\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) = 0.
\end{cases}
\tag{4}
$$

В этой системе сразу учтено уравнение $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ и то, что скорость, давление и плотность не являются функциями от z. В цилиндрических координатах генераторы X_{12}, $X_+ + X_0$ запишутся в виде

$$
\begin{cases}
X_{12} = -\dfrac{\partial}{\partial \phi},\\
X_+ + X_0 = (1+t^2)\dfrac{\partial}{\partial t} + tr\dfrac{\partial}{\partial r} + (r - tv_r)\dfrac{\partial}{\partial v_r} - tv_\phi\dfrac{\partial}{\partial v_\phi} - 2t\rho\dfrac{\partial}{\partial \rho} - 4tp\dfrac{\partial}{\partial p} - 2tH\dfrac{\partial}{\partial H}.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Базис инвариантов состоит из шести функционально независимых решений системы, который находится из системы уравнений

$$
\begin{cases}
X_{12}J = 0,\\
X_0J + X_+J = 0.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Из первого уравнения системы (6) видно, что $J \neq J(\varphi)$, т. е. решения, инвариантные относительно рассматриваемой подгруппы, не зависят от полярного угла. Решениями второго уравнения являются первые интегралы характеристической системы уравнений

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dr}{tr} = \frac{dv_r}{r - tv_r} = -\frac{dv_\phi}{tv_\phi} = -\frac{d\rho}{2t\rho} = -\frac{dp}{4tp} = -\frac{dH}{2tH}, \tag{7}$$

которые нетрудно найти, и они записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} &J_1 = \frac{r}{(1+t^2)^{1/2}}, \qquad J_2 = \frac{tr^2}{(1+t^2)^2} - rv_r, \qquad J_3 = rv_\phi, \qquad J_4 = \rho(1+t^2), \\ &J_5 = p(1+t^2)^2, \qquad J_6 = h(1+t^2). \end{aligned} \tag{8}$$

Инвариантные решения выглядят таким образом:

$$\Phi_\alpha(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6) = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$.

Используя эти уравнения, можно выразить J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 через $\lambda = J_1$, а затем переписать решения в явном виде:

$$\begin{aligned} &v_r = \frac{tr}{1+t^2} + \frac{U(\lambda)}{r}, \qquad v_\varphi = \frac{V(\lambda)}{r}, \\ &\rho = \frac{R(\lambda)}{1+t^2}, \qquad p = \frac{P(\lambda)}{(1+t^2)^2}, \qquad H = \frac{h(\lambda)}{(1+t^2)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь U, V, P, R, h — функции от λ, для нахождения которых необходимо подставить выражения (10) в исходную систему уравнений, переписанную в полярных координатах (4), не забывая об отсутствии зависимости от полярного угла. После несложных преобразований получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} UU'\lambda - V^2 - U^2 + \lambda^3 \dfrac{P' + \dfrac{hh'}{4\pi}}{R} + \lambda^4 = 0, \\ UV' = 0, \\ (Uh)' = 0, \\ (UR)' = 0, \\ UP' + 2PU' = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Анализ решений уравнений двухмерной магнитной гидродинамики. Нетрудно заметить, что в системе (11) целесообразно выделить два класса решений:

1) $U = 0$,

2) $U \neq 0$.

В случае, когда функция U тождественно равна нулю, имеет смысл только первое уравнение системы (11). Это уравнение легко интегрируется, и мы получаем следующее частное решение для магнитогидродинамических уравнений:

$$P + \frac{h^2}{8\pi} = \int (V^2(\lambda) - \lambda^4) R(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda^3} + \text{const}. \tag{12}$$

Обозначим через P_H величину, в которую входит внешнее давление P и магнитное давление $h^2/(8\pi)$. В частном случае, когда $V = \lambda^2$, полученное решение описывает растекание слоя жидкости или газа произвольной плотности, вращающегося как твердое тело со скоростью $v_\varphi = r/(1+t^2)$ под действием P_H. Условие $V = \lambda^2$ приводит к тому, что все подынтегральное выражение (12) обращается в нуль, и мы получаем, что со временем величина P_H остается неизменной. Решение задачи дается формулами

$$v_r = \frac{tr}{1+t^2}, \qquad v_\varphi = \frac{r}{1+t^2}. \tag{13}$$

Плотность в такой системе может быть произвольной.

Также для случая, когда U тождественно равно нулю, интересно выделить еще один класс решений, когда функция R представляет собой постоянную величину R_0, не зависящую от параметра λ. В этом случае уравнение (12) упрощается и принимает вид:

$$P_H = R_0 \int V^2(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^3} - \frac{R_0}{2}\lambda^2 + \text{const}. \tag{14}$$

Для случая, когда наша жидкость или газ вращается как твердое тело, в качестве функции V необходимо взять $V = b\lambda^2$, где b представляет собой константу. В этом случае получаем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} &v_r = \frac{tr}{1+t^2}, \qquad v_\phi = \frac{br}{1+t^2},\\ &\rho = \frac{R_0}{1+t^2},\\ &P_H = \frac{R_0\lambda^2}{2}(b-1) + \text{const}. \end{aligned} \tag{15}$$

Не менее интересен случай, когда $V = \alpha\lambda$. Такое решение имеет вид:

$$\begin{aligned} &v_r = \frac{tr}{1+t^2}, \qquad v_\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \rho = \frac{R_0}{1+t^2},\\ &P_H = R_0\left(\text{const} - \frac{r^2}{2(1+t^2)} + \alpha^2 \ln\frac{r}{\sqrt{1+t^2}}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Соответствующее решение легко анализируется. Оно описывает движение кольцеобразно распределенной массы жидкости или газа с заданной начальной угловой скоростью $\omega = \alpha/r$. При растекании жидкости или газа под действием сил тяжести, магнитного поля и вращения угловая скорость убывает по формуле $\omega = \alpha/(r\sqrt{1+t^2})$.

Для случая $U \neq 0$ уравнения 2–5 системы (11) легко интегрируются, после чего функции V, P, R, h выражаются через функцию U:

$$R = \frac{C_1}{U}, \qquad h = \frac{C_2}{U}, \qquad P = \frac{C_3}{U^2}, V = C_4. \tag{17}$$

Подставляя полученные функции в первое уравнение

$$UU'\lambda - V^2 - U^2 + \lambda^3\frac{P' + \dfrac{hh'}{4\pi}}{R} + \lambda^4 = 0,$$

приходим к дифференциальному уравнению для функции U, которое легко интегрируется. После интегрирования получаем алгебраическое уравнение для функции U:

$$U^3 + (\lambda^4 + 2C\lambda^2 + V^2)U + A\lambda^2 = 0, \tag{18}$$

где $A = 2\left(\dfrac{2C_3}{C_1} + \dfrac{C_2}{4\pi C_1}\right)$, C — константа интегрирования. Все константы определяются из начальных условий. В итоге система дифференциальных уравнений свелась к алгебраическому уравнению третьей степени. Учитывая физические ограничения на константы интегрирования, можно показать, что данное кубическое уравнение может иметь только один действительный корень.

Анализируя полученное решение (18), покажем, что они описывают распространение кольца жидкости с заданными начальными радиусами r_{10} и r_{20}, а также с заданной циркуляцией скорости, равной $2\pi V$. Границы кольца определяются уравнениями

$$r_1 = r_{10}\sqrt{1+t^2}, \qquad r_2 = r_{20}\sqrt{1+t^2}, \tag{19}$$

где r_{10} и r_{20} представляют собой границы слоя в начальный момент времени. В зависимости от знака константы A полученные решения будут описывать либо слой уплотнения, либо слой разрежения. Если $A > 0$, то на внешней границе давление скачком уменьшается, а на внутренней — увеличивается. Противоположная картина наблюдается при $A < 0$.

Таким образом, по аналогии с уравнениями обычной гидродинамики уравнения магнитной гидродинамики при определенных условиях обладают дополнительной скрытой симметрией. Наличие такой симметрии позволяет строить классы точных решений, описывающие различные типы течений.

1. *Поляков А. М.* Калибровочные поля и струны. – Ижевск: Изд. Удмуртского ун-та, 1999. – 313 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Ч. 1. Изд. 5-е. – Москва: Физматлит, 2005. – 616 с.
3. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.* Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nucl. Phys. B. – 1984. – **241**(**2**). – P. 333–380.
4. *Панкратов О. А.* Двухмерные системы: физика и новые приборы // Усп. физ. науки. – 1987. – **152**. – С. 720–721.
5. *Шикин В. Б.* Дробный квантовый эффект Холла // Там же. – 1989. – **159**. – С. 185–187.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 624 с.
7. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. – Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
8. *Ибрагимов Н. Ч.* Группы преобразований в математической физике. – Москва: Наука, 1983. – 280 с.
9. *Бабич А. В., Клепиков В. Ф., Щелоковский П. А.* Скрытая симметрия уравнений газовой динамики и “мелкой воды” // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. фізична. Ядра, частинки, поля. – 2001. – **541**, вип. 4. – С. 68–72.
10. *Dyakonov M., Shur M.* Shallow water analogy for a ballistic field effect transistor: New mechanism of plasma wave generation by dc current // Phys. Rev. Lett. – 1993. – **71**. – С. 2465–2468.

Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 22.07.2013

А. В. Бабіч

Прихована симетрія рівнянь магнітної гідродинаміки і інваріантні розв'язки

Розглянуто групову структуру рівнянь магнітної гідродинаміки. Для двовимірного випадку за допомогою прихованої конформної симетрії побудовано деякі класи інваріантних розв'язків. Досліджено відповідні течії.

A. V. Babich

A hidden symmetry of the magnetohydrodynamical equations and invariant solutions

The group structure of the magnetohydrodynamical equations is considered. Some classes of invariant solutions are constructed with help of the hidden conformal symmetry. The corresponding flows are studied.