Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 533.72

В. Д. Гордевский, Е. С. Сазонова

Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана с винтовыми модами

(Представлено академиком НАН Украины Л. А. Пастуром)

Построено новое явное приближенное решение нелинейного уравнения Больцмана для модели твердых сфер. Оно имеет вид континуальной суперпозиции локальных максвеллианов, описывающих винтообразные стационарные равновесные состояния газа. Получены некоторые предельные случаи, в которых это распределение минимизирует интегральную невязку между частями уравнения.

Для описания взаимодействия между потоками газа из твердых сфер используется интегро-дифференциальное уравнение Больцмана [1–3], которое имеет вид

$$D(f) = Q(f, f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)|[f(t, v_1', x)f(t, v', x) - f(t, v_1, x)f(t, v, x)], \tag{3}$$

$$v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \qquad v_1' = v + \alpha(v - v_1, \alpha), \tag{4}$$

где $f(t, v, x)$ — искомая функция распределения молекул, $\partial f/\partial x$ — ее пространственный градиент, $t \in \mathbb{R}^1$ — время, $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ и $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ — координата и скорость молекулы, $d > 0$ — ее диаметр, v, v_1, v' и v_1' — скорости молекул до и после столкновения, $\alpha \in \Sigma$, Σ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$.

Известными точными решениями уравнения (1)–(3) являются глобальные и локальные максвеллианы [1–3]. В связи с этим возникает вопрос о поиске явных приближенных решений уравнения Больцмана, удовлетворяющих ему лишь с произвольной степенью точности. В работах [4–8] получены различные такие решения.

Далее, в работе [9] был предложен новый подход к поиску явных приближенных решений уравнения Больцмана, а именно континуальный вид функции распределения. При этом предполагается, что массовая скорость глобального максвеллиана принимает не фиксированные дискретные значения, а становится произвольным параметром, принимающим любые значения из $\mathbb{R}^3$.

Целью данной работы является изучение поведения континуального распределения, в которое входят локальные максвеллианы частного вида, описывающие винтообразные стационарные равновесные состояния газа (кратко винты) [4, 5, 10]. Каждый такой максвеллиан имеет вид

$$M(v, u, x) = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-u-[\omega\times x])^2}. \tag{5}$$

С точки зрения физического смысла распределение (5) описывает ситуацию, когда газ имеет обратную температуру $\beta = 1/2T$ и вращается как целое с угловой скоростью $\omega \in \mathbb{R}^3$ вокруг оси, проходящей через точку $x_0 \in \mathbb{R}^3$ $(x_0 = [\omega \times \overline{v}]/\omega^2)$, $r^2 = [\omega \times (x - x_0)]^2/\omega^2$ — квадрат расстояния до оси вращения, а плотность газа $\rho = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2}$ (ρ_0 — плотность на оси вращения, т. е. $r = 0$), $u \in \mathbb{R}^3$ — произвольный параметр (линейная массовая скорость в точках x, для которых $x \| \omega$), а $u + [\omega \times x]$ — массовая скорость в произвольной точке x. Также распределение (5) помимо вращательного задает и поступательное движение вдоль оси вращения с линейной скоростью $((\omega, \overline{v})/\omega^2)\omega$, т. е. действительно описывает винтообразное движение газа в целом, причем это распределение стационарно (не зависит от t), но неоднородно.

Будем рассматривать континуальное распределение следующего вида:

$$f = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x, u) M(v, u, x)\, du. \tag{6}$$

Предполагается, что коэффициентная функция $\varphi(t, x, u)$ является неотрицательной и принадлежащей $C^1(\mathbb{R}^7)$. Требуется найти такие функции $\varphi(t, x, u)$ и такое поведение всех имеющихся параметров, чтобы интегральная невязка [11]

$$\Delta_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)|\, dv \tag{7}$$

стремилась при этом к нулю.

Сначала несколько преобразуем правую часть (10). Прежде всего вычислим и оценим интеграл по переменной v, подставляя в (1)–(3) распределение (5), (6) и учитывая, что $D(M) = Q(M, M) = 0$, введем обозначение

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &= \widetilde{M}(v, u, x) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-\widetilde{u})^2}, \\ \widetilde{u} &= \widetilde{u}(x) = u + [\omega \times x]. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда, подставив (6) в выражение (7) и произведя, как обычно, разбиение интеграла столкновений Q на "прибыточную" и "затратную" части G и L [1], получим следующую оценку сверху:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)|\, dv \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| e^{\beta\omega^2 r^2} \widetilde{M} du dv +$$
$$+ e^{2\beta\omega^2 r^2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t, x, u_1)\varphi(t, x, u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} [\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1)]\, du_1 du_2 dv. \tag{9}$$

Из (8) видно, что для корректной определенности невязки (7) на коэффициентные функции φ следует наложить новые условия быстрого убывания по пространственной переменной x. Поэтому введем новое обозначение

$$\varphi(t, x, u) = \psi(t, x, u) e^{-\beta\omega^2 r^2}, \tag{10}$$

где функции гладкие и неотрицательные. Тогда оценка (9) с учетом (10) и (7) приобретает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left|\frac{\partial \psi}{\partial t} + v\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\beta\psi[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega]\right)\right| \widetilde{M}\, du dv +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t, x, u_1)\psi(t, x, u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} [\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1)]\, du_1 du_2 dv. \tag{11}$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (5), (8) *и* (10), *а также*

$$\omega = \frac{\omega_0 s}{\beta^k}, \tag{12}$$

где $s > 0$ *— любая постоянная величина,* ω_0 *— произвольный фиксированный вектор (остальные параметры также произвольны и фиксированы). Тогда если следующие функции принадлежат пространству* $L_1(\mathbb{R}^7)$

$$\psi, \quad |u|\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad |[\omega_0 \times x]|\psi, \quad \left([\omega_0 \times x], \frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \tag{13}$$

то определенная в соответствии с (7) *величина* Δ_1 *имеет смысл и существует такое* Δ_1', *что* $\Delta_1 \leqslant \Delta_1'$. *Причем если* $1/2 < k \leqslant 1$, *то существует конечный предел*

$$L = \lim_{\beta \to +\infty} \Delta_1' =$$
$$= \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \left[\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial \psi}{\partial t} + u\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| du + 2\pi^3 d^2 \rho^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t, x, u_1)\psi(t, x, u_2)|u_1 - u_2|\, du_1 du_2\right]. \tag{14}$$

Доказательство. Существование интегральной невязки Δ_1 вытекает из (7), (11) и (13), причем имеет место следующее неравенство:

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_1' = \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\beta\psi[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega] \right) \right| \widetilde{M} dv du +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t, x, u_1)\psi(t, x, u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} [\widetilde{M_1} L(\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1})] \, dv du_1 du_2 \Bigg]. \tag{15}$$

В (15) была также выполнена перестановка порядка интегрирований, законность которой легко обосновывается с учетом условий теоремы.

Введем замену переменных:

$$\sqrt{\beta}(v - \widetilde{u}) = w; \qquad v = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + \widetilde{u} = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x].$$

Тогда

$$\Delta_1' = \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \Bigg[\rho\pi^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \Bigg| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x] \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\beta\psi[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega] \right) \Bigg| e^{-w^2} dw du \Bigg] +$$

$$+ \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t, x, u_1)\psi(t, x, u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} [\widetilde{M_1} L(\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1})] \, dw du_1 du_2 \Bigg]. \tag{16}$$

Произведя здесь еще одну замену переменных:

$$\sqrt{\beta}(v_1 - \widetilde{u}_2) = z; \qquad v_1 = \frac{z}{\sqrt{\beta}} + \widetilde{u}_2 = \frac{z}{\sqrt{\beta}} + u_2 + [\omega \times x],$$

получим

$$M_1 L(M_2) = M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1 \right) \frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2 \right|.$$

Аналогично

$$M_2 L(M_1) = M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2, u_2 \right) \frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2 - \frac{w}{\sqrt{\beta}} - u_1 \right|.$$

Для упрощения выражения (16) введем некоторые новые обозначения:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \tag{17}$$

$$A(w, u, t, x) = \rho \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} |w\gamma + (u_1 - u_2) - z\gamma|, \tag{18}$$

$$B(w,u,t,x) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(w\gamma + u + \gamma^2 s[\omega_0 \times x]) + 2\psi\gamma s\{(w, [\omega_0 \times u]) - s\gamma^2[\omega_0 \times w][\omega_0 \times x]\}. \quad (19)$$

С учетом (18) и (19) перепишем выражение (16) в следующем виде:

$$\Delta_1' = \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \Bigg[\rho\pi^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \bigg|\frac{\partial\psi}{\partial x} + B(w,u,t,x)\bigg| e^{-w^2} dw du +$$

$$+ 2\rho\pi^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} A(w,u_1,u_2,t,x) e^{-w^2} dw du_1 du_2\Bigg]. \quad (20)$$

Подынтегральные функции двух слагаемых выражения Δ_1' непрерывны по переменным t, x, u и β благодаря условиям теоремы. Следовательно, интеграл (20) сходится равномерно относительно переменной γ на любом компакте благодаря условию (13) и наличию множителя e^{-w^2}. Значит, вся величина Δ_1' непрерывна по γ и мы можем перейти к пределу при $\gamma \to 0$ ($\beta \to +\infty$). После интегрирования по переменным z и w приходим к (14). Теорема доказана.

Далее, опираясь на полученное выражение для предела при $\beta \to +\infty$, найдем достаточное условие стремления невязки Δ_1 к нулю.

Следствие. *Пусть выполнены все предположения теоремы. Тогда соотношение*

$$\Delta_1 \to 0 \quad (21)$$

справедливо, если функция ψ, определенная в выражении (10), *такова:*

$$\psi(t,x,u,\rho) = g(t,x)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2}, \quad (22)$$

где функция $g(t,x)$ имеет вид финитного плато [8], $u_0 \in \mathbb{R}^3$ — произвольный фиксированный вектор, а $P \to +\infty$.

Доказательство. Воспользуемся предельным выражением (14) и подставим в него (22). Подынтегральное выражение первого слагаемого стремится к нулю (как показано в [8]). Благодаря условиям следствия интеграл второго слагаемого сходится и стремится к нулю. Следствие доказано.

1. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. – Москва: Мир, 1978. – 495 с.
2. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. – Москва: Наука, 1967. – 440 с.
3. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 118 с.
4. *Гордевский В. Д.* Двухпотоковое распределение с винтовыми модами // Теор. и мат. физика. – 2001. – **126**, № 2. – С. 283–300.
5. *Гордевский В. Д.* Винтовые потоки с ускорением и уплотнением для модели твердых сфер // Там же. – 2009. – **161**, № 2. – С. 278–286.
6. *Gordevskyy V. D.* Transitional regime between vortical states of a gas // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (NA 3752). – 2003. – **53**, No 3–4. – P. 481–494.
7. *Гордевский В. Д.* Вихри в газе из твердых сфер // Теор. и мат. физика. – 2003. – **135**, № 2. – С. 303–314.
8. *Gordevskyy V. D.* Trimodal approximate solution of the non-linear Boltzmann equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 1998. – **21**. – P. 1479–1494.

9. *Гордевский В. Д., Сазонова Е. С.* Континуальный аналог бимодальных распределений // Теор. и мат. физика. – 2012. – **171**, № 3. – С. 483–492.
10. *Gordevskyy V. D., Sazonova E. S.* Asymmetrical bimodal distributions with screw modes // Math. Phys., Anal., Geom. – 2011. – **7**, No 3. – P. 212–224.
11. *Гордевский В. Д.* Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана // Теор. и мат. физика. – 1998. – **114**, № 1. – С. 126–136.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 09.08.2013

В. Д. Гордевський, О. С. Сазонова

Про один клас наближених розв'язків рівняння Больцмана з гвинтовими модами

Побудовано новий явний наближений розв'язок нелінійного рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Він має вид континуальної суперпозиції локальних максвеліанів, що описують гвинтоподібні стаціонарні рівноважні стани газу. Отримано деякі граничні випадки, в яких цей розподіл мінімізує інтегральний відхил між частинами рівняння.

V. D. Gordevskyy, E. S. Sazonova

About one class of approximate solutions of the Boltzmann equation with screw modes

A new evident approximate solution of the nonlinear Boltzmann equation for the model of hard spheres is built. It has form of a continual superposition of local Maxwellians, describing the screw-shaped stationary equilibrium states of a gas. Some sufficient cases, in which this distribution minimizes the integral remainder between the sides of the equation, are obtained.