УДК 517.977

В. И. Коробов, М. О. Бебия

Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Ковалевым)

Рассмотрена задача стабилизации для нелинейных неуправляемых по первому приближению систем вида $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_i = x_{i-1} + f_{i-1}(t, x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{2, n-1}$. Для этих систем установлено достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова, указан способ построения функции Ляпунова и стабилизирующего управления.

Рассматривается задача стабилизации для нелинейных неуправляемых по первому приближению систем. В евклидовом пространстве рассмотрим управляемую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} + f_{n-2}(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1}$$

где $k \in N$, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по x_j, $j = \overline{1, n}$, $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$. При этом

$$|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \alpha_i \|\overline{x}\|^2, \quad \overline{x} = (x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}^{k+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad n \geqslant 3, \tag{2}$$

при $\|x\| < \rho$, $\rho > 0$.

При $n = 2$ система (1) имеет вид $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k+1} + f_1(t, x_1, x_2) \end{cases}$ и условие (2) принимает вид $|f_1(t, x_1, x_2)| \leqslant \alpha_1 x_1^{2k+2}$ при $\|x\| < \rho$.

Отметим, что данная система не отображается на систему, линейную по x и u, с помощью замены фазовых координат [1]. Стабилизация нелинейных неуправляемых по первому приближению систем подобного вида рассматривалась в работах [2–8]. Одной из интересных нелинейных систем является система $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3 \end{cases}$, предложенная М. Кавски в работе [3]. В настоящей работе дается явный вид стабилизирующего управления и способ его построения.

Задача стабилизации для системы (1) состоит в отыскании управления $u(t, x)$ такого, что нулевая точка покоя этой системы будет асимптотически устойчива. Управление, решающее задачу стабилизации для системы (1), будем искать в виде

$$u(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n + a_{n+1} x_{n-1}^{2k+1}, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\{a_i\}_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}$. Получение условий на коэффициенты a_i, $i = \overline{1, n+1}$, проводится с помощью метода функции Ляпунова, причем функцию Ляпунова для системы (1) удается выбрать в виде квадратичной формы

$$V = (Fx, x), \tag{4}$$

где F – $(n \times n)$ положительно определенная матрица. Продифференцируем (4), в силу системы (1) и с учетом (3) получим, что

$$\dot{V} = ((A^*F + FA)x, x) + 2(F\widetilde{e}_n, x)x_{n-1}^{2k+1} + 2(Fe_2, x)f_1(t, x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \\ + 2(Fe_n, x)f_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{e}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

e_i — i-й единичный вектор.

Рассмотрим матричное уравнение вида

$$A^*F + FA = -W, \tag{7}$$

где $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — некоторая заданная неотрицательно определенная действительная матрица, а матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ имеет вид (6), $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — неизвестная матрица.

Замечание. Поскольку матрица A является вырожденной, в отличие от хорошо исследованного в теории устойчивости случая, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то уравнение (7) не может иметь положительно определенного решения F при положительно определенной матрице W.

Введем следующие обозначения: $W_{n-1} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$, $A_{n-1} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$. В дальнейшем будем считать, что матрица W_{n-1} положительно определена.

Теорема 1 и теорема 2 дают ответ на вопросы о существовании и нахождении решений уравнения (7) относительно неизвестной матрицы F в классе положительно определенных матриц. В теореме 3 сформулирован способ построения стабилизирующего управления.

Теорема 1. *Пусть матрица A имеет вид* (6), *матрица W_{n-1} положительно определена. Тогда для того чтобы матричное уравнение* (7) *имело положительно определенное решение F при некоторой неотрицательно определенной матрице W, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы A_{n-1} имели отрицательные действительные части и при этом матрица W имела вид*

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1n-1} & w_{1n-1}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{1n-1} & \ldots & w_{n-1n-1} & w_{n-1n-1}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \\ w_{1n-1}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} & \ldots & w_{n-1n-1}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} & w_{n-1n-1}\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}^2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Заметим, что матрица W вида (8) является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда матрица W_{n-1} неотрицательно определена.

Теорема 2. *Пусть матрица W имеет вид* (8), *а матрица W_{n-1} положительно определена, тогда положительно определенное решение уравнения* (7) *имеет вид*

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n-1} & \dfrac{a_n}{a_{n-1}} f_{1n-1} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ f_{1n-1} & \dots & f_{n-1n-1} & \dfrac{a_n}{a_{n-1}} f_{n-1n-1} \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} f_{1n-1} & \dots & \dfrac{a_n}{a_{n-1}} f_{n-1n-1} & f_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы $F_{n-1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$ находятся по формуле

$$F_{n-1} = \int\limits_0^\infty e^{A^*_{n-1}t} W_{n-1} e^{A_{n-1}t} dt \gg 0,$$

f_{nn} — *произвольная величина такая, что* $f_{nn} > \dfrac{a_n^2}{a_{n-1}^2} f_{n-1n-1}$.

Пусть $b = -F\widetilde{e}_n$, тогда

$$b_i = -\left(f_{1i} a_{n+1} + \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{in-1}\right), \qquad i = \overline{1, n-1},$$

$$b_n = -\left(f_{1n-1} \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n+1} + f_{nn}\right).$$

Выберем a_{n+1} из условия $b_n = 0$, тогда

$$a_{n+1} = -\frac{f_{nn}}{f_{1n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{9}$$

Заметим, что $b_{n-1} > 0$ при таком выборе a_{n+1}. Обозначим

$$\overline{W}_{\lambda_{\min}} = \begin{pmatrix} \lambda_{\min} & 0 & \dots & 0 & b_1 x_{n-1}^k \\ 0 & \lambda_{\min} & \dots & 0 & b_2 x_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{\min} & b_{n-2} x_{n-1}^k \\ b_1 x_{n-1}^k & b_2 x_{n-1}^k & \dots & \dots & 2b_{n-1} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы W_{n-1}.

Пусть положительно определенная матрица F является решением уравнения (7) при некоторой матрице W, удовлетворяющей условиям теоремы 1, тогда равенство (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{V} = &-((W - \lambda_{\min}\widetilde{I}_{n,2})x, x) - (\overline{W}_{\lambda_{\min}}\overline{x}, \overline{x}) + 2(Fe_2, x) f_1(t, x_1, \dots, x_n) + \dots + \\ &+ 2(Fe_n, x) f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\overline{x} = (x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^{k+1})$, $\widetilde{I}_{n,2}$ — блочно-диагональная матрица, состоящая из единичной матрицы размерности $(n-2) \times (n-2)$ и нулевой матрицы размерности (2×2).

Отметим, что матрица $W - \lambda_{\min}\widetilde{I}_{n,2}$ является неотрицательно определенной. Определитель матрицы $\overline{W}_{\lambda_{\min}}$ имеет вид

$$\Delta(\overline{W}_{\lambda_{\min}}) = 2\lambda_{\min}^{n-2} b_{n-1} - \lambda_{\min}^{n-3}(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-2}^2)x_{n-1}^{2k},$$

откуда следует, что при $x_{n-1}^{2k} < \lambda_{\min}\dfrac{2b_{n-1}}{b_1^2 + \dots + b_{n-2}^2}$ матрица $\overline{W}_{\lambda_{\min}}$ будет положительно определенной.

Выберем произвольное $0 < \varepsilon < \lambda_{\min}\dfrac{2b_{n-1}}{b_1^2 + \dots + b_{n-2}^2}$ и потребуем, чтобы $x_{n-1}^{2k} < \varepsilon$. Тогда для минимального собственного значения матрицы $\overline{W}_{\lambda_{\min}}$ верна оценка

$$\lambda_{\min}(\overline{W}_{\lambda_{\min}}) > \overline{\lambda}_{\min} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{\min} + 2b_{n-1} - \sqrt{(\lambda_{\min} - 2b_{n-1})^2 + 4\varepsilon \sum_{i=1}^{n-2} b_i^2}\right) > 0.$$

Отсюда из (10) с учетом (2) получаем, что

$$\dot{V} \leqslant -((W - \lambda_{\min}\widetilde{I}_{n,2})x, x) - (\overline{\lambda}_{\min} - 2 \cdot |\alpha_1| \cdot \|Fe_2\| \cdot \|x\| - \dots -$$
$$- 2 \cdot |\alpha_{n-1}| \cdot \|Fe_n\| \cdot \|x\|) \cdot \|\overline{x}\|^2 < 0 \qquad (11)$$

при

$$0 < \|x\| < r = \min\left\{\rho,\ \sqrt[2k]{\varepsilon},\ \frac{\overline{\lambda}_{\min}}{2\sum\limits_{i=1}^{n-1} |\alpha_i| \cdot \|Fe_{i+1}\|}\right\}.$$

Таким образом, управление $u(x)$ вида (3) решает задачу стабилизации для системы (1) и справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть управление $u(x)$ имеет вид* (3) *и при этом $a_i < 0$, $i = \overline{1, n}$, такие, что собственные значения матрицы A_{n-1} имеют отрицательные действительные части. Матрица W_{n-1} — произвольная положительно определенная матрица, а матрица F является любым положительно определенным решением уравнения* (7) *с правой частью вида* (8)*. Величина a_{n+1} выбирается из условия* (9)*. Тогда управление $u(x)$ будет решать задачу стабилизации для системы* (1).

Пример. Рассмотрим управляемую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_1^4 \sin(t + x_1^5 + x_2^2). \end{cases} \qquad (12)$$

Тогда $f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1^4 \sin(t + x_1^5 + x_2^2) \leqslant x_1^4$, $\alpha_1 = 1$, $k = 1$, $\rho = +\infty$.

Пусть $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $W_{11} = 10$, тогда из (6), (8) получаем

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

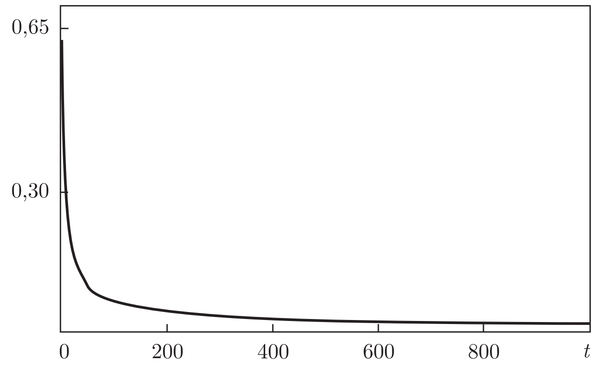

Рис. 1. График $\|x(t)\|$

Положительно определенное решение уравнения (7) при $f_{22} = 100$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 100 \end{pmatrix},$$

и в качестве функции Ляпунова системы (12) можно взять квадратичную форму вида (4). Тогда согласно (3) и (9) управление, решающее задачу стабилизации для системы (12), имеет вид

$$u(x) = -x_1 - 2x_2 - 10x_3^3.$$

Имеем, что $\lambda_{\min}(F) = 3{,}9588\ldots$ — минимальное собственное значение матрицы F, $r = 0{,}3980\ldots$. При этом область притяжения будет иметь вид

$$\Phi = \{x\colon (Fx, x) \leqslant \lambda_{\min}(F) r^2\} = \{5x_1^2 + 20x_1x_2 + 100x_2^2 \leqslant 0{,}6271\ldots 0\}.$$

В качестве начальной точки возьмем $x_0 = \begin{pmatrix} 0{,}43 \\ -0{,}45 \end{pmatrix}$. В этом случае график $\|x(t)\|$ имеет вид рис. 1.

Численный анализ показывает, что область притяжения Φ может быть расширена за счет увеличения параметра f_{22}.

1. *Коробов В. И.* Метод функции управляемости. – Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. – 576 с.
2. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
3. *Kawski M.* Stabilization of nonlinear systems in the plane // Syst. Control. Lett. – 1989. – **12**. – P. 169–175.
4. *Cheng D., Lin W.* On p-normal forms of nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Control. – 2003. – **48**. – P. 1242–1248.
5. *Hong Y., Wang J.* Non-smooth finite-time stabilization for a class of nonlinear systems // Sci. China. Ser. F. – 2006. – **49**, No 1. – P. 80–89.
6. *Long L., Zhao J.* Global stabilisation of switched nonlinear systems in p-normal form with mixed odd and even powers // Int. J. Contr. – 2011. – **84**, No 10. – P. 1612–1626.
7. *Liao D.* Adaptive control for a class of high-order nonlinear uncertain systems // J. Theor. and Appl. Inform. Technol. – 2012. – **46**, No 1. – P. 371–376.
8. *Gao F., Li P., Yuan F.* Finite-time stabilization of high-order nonholonomic systems with more general nonlinear drifts // J. Inform. and Comput. Sci. – 2013. – **10**, No 4. – P. 1139–1147.

Щецинский университет, Польша
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 15.07.2013

В. І. Коробов, М. О. Бебія

Стабілізація деякого класу нелінійних систем, некерованих за першим наближенням

Розглянуто задачу стабілізації для нелінійних некерованих за першим наближенням систем вигляду $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_i = x_{i-1} + f_{i-1}(t, x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{2, n-1}$. *Для цих систем встановлено достатню умову існування квадратичної функції Ляпунова, наведено метод побудови функції Ляпунова і стабілізуючого керування.*

V. I. Korobov, M. O. Bebiya

Stabilization of some class of nonlinear systems that are uncontrollable the first approximation

The problem of stabilization for systems of the form $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_i = x_{i-1} + f_{i-1}(t, x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{2, n-1}$, *that are uncontrollable in the first approximation is considered. The sufficient condition of existence of a quadratic Lyapunov function is obtained, and a method of construction of the Lyapunov function and the stabilizing control is described.*