УДК 519.624.2

Академік НАН України **В. Л. Макаров, Н. М. Романюк**

Нові властивості FD-методу при його застосуваннях до задач Штурма–Ліувілля

Доведено, що FD-метод при його застосуванні до розв'язування задачі Штурма–Ліувілля для звичайного диференціального рівняння другого порядку на відрізку з крайовими умовами Діріхле відносно власних значень має суттєво вищу швидкість збіжності, ніж це було встановлено в попередніх роботах В. Л. Макарова та його учнів. Викладено принципово новий алгоритм FD-методу, програмна реалізація якого засобами комп'ютерної алгебри показала свою високу ефективність.

Вперше FD-метод був запропонований у роботі [1] для розв'язування регулярної скалярної задачі Штурма–Ліувілля

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (\lambda - q(x))u(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

з кусково-сталим наближенням $\overline{q}(x)$ коефіцієнта $q(x)$. Метод дозволяє при фіксованому параметрі дискретизації N (кількість сходинок у функції $\overline{q}(x)$) визначити наближення до власних функцій і власних значень $\{u_n(x), \lambda_n\}$ з точністю $O((Nn)^{-m})$, де m — ранг методу.

Пізніше в роботах [2, 3] доведені явні апріорні оцінки для випадку, коли кусково стала функція, що наближає $q(x)$, тотожно рівна нулю, тобто $\overline{q}(x) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} |\lambda_n(q(\cdot)) - \overset{m}{\lambda}_n(0)| &\leqslant \|q\|_\infty \frac{(r_n^0)^m}{1-r_n^0} 2\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!} \leqslant \|q\|_\infty \frac{(r_n^0)^m}{1-r_n^0}\frac{1}{(m+1)\sqrt{\pi m}}, \\ \|u_n(x,q(\cdot)) - \overset{m}{u}_n(x,0)\| &\leqslant \frac{(r_n^0)^{m+1}}{1-r_n^0} 2\frac{(2m+1)!!}{(2m+4)!!} \leqslant \frac{(r_n^0)^{m+1}}{1-r_n^0}\frac{1}{(m+2)\sqrt{\pi(m+1)}}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $r_n^0 = 4\|q\|_\infty/(\pi^2(2n-1))$, $\|q\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |q(x)|$.

Розглянемо задачу (1), коли $q(x) = \sum\limits_{l=0}^{r} c_l x^l$ є поліном степеня r. Застосуємо до неї FD-метод з вибором функції $\overline{q}(x)$, що наближає $q(x)$, тотожної нулю (подібна ідеологія присутня в методі гомотопій, а також в методі Адомяна [4]). В цьому випадку FD-метод є таким, що точно реалізується [5]. Тоді наближення m-го рангу (за термінологією FD-методу) до розв'язку задачі (1) матиме вигляд

$$\overset{m}{u}_n(x) = \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}(x), \qquad \overset{m}{\lambda}_n = \sum_{j=0}^{m} \lambda_n^{(j)}. \tag{3}$$

Тут $u_n^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin(\pi n x)$, $\lambda_n^{(0)} = (n\pi)^2$ — розв'язок базової задачі

$$\frac{d^2u_n^{(0)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)} u_n^{(0)}(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \qquad u_n^{(0)}(0) = u_n^{(0)}(1) = 0.$$

Члени рядів (3) визначаються як розв'язки рекурентної послідовності задач

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2}+\lambda_n^{(0)}u_n^{(j+1)}(x)=-\sum_{p=0}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)}(x)+q(x)u_n^{(j)}(x)\equiv\\ \equiv -F_n^{j+1}(x),\qquad x\in(0,1),\\ u_n^{(j+1)}(0)=u_n^{(j+1)}(1)=0,\qquad j=0,1,\ldots,m-1,\end{gathered}\tag{4}$$

де

$$\lambda_n^{(j+1)}=\int\limits_0^1 q(x)u_n^{(j)}(x)u_n^{(0)}(x)\,dx=\sqrt{2}\sum_{p=0}^{r}c_l\int\limits_0^1 x^l u_n^{(j)}(x)\sin(\pi nx)\,dx.\tag{5}$$

Співвідношення (5) одержується з умов розв'язності задач (4), а для їх однозначної розв'язності вимагається додаткова умова ортогональності

$$\int\limits_0^1 u_n^{(j+1)}(x)u_n^{(0)}(x)\,dx=0,\qquad j=0,1,\ldots,m-1.\tag{6}$$

Введемо узагальнену функцію Гріна

$$\begin{gathered}g_n(x,\xi)=\frac{1}{4\pi^2n^2}(\cos(n\pi(x+\xi))-\cos(n\pi(x-\xi))-\\ -2\pi n[\sin(n\pi(x+\xi))(1-x-\xi)-\sin(n\pi|x-\xi|)(1-|x-\xi|)]),\end{gathered}$$

для якої справедливі такі властивості:

$$g_n(x,\xi)=g_n(\xi,x),\qquad \int\limits_0^1 g_n(x,\xi)\sin(n\pi x)\,dx=0,\qquad \int\limits_0^1 g_n(x,\xi)\sin(n\pi\xi)\,d\xi=0,$$

тоді при фіксованому j розв'язок задачі (4), що задовольняє умову ортогональності (6), можна записати у вигляді

$$u_n^{(j+1)}(x)=-\int\limits_0^1 g_n(x,\xi)F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi.$$

Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $q(x)=\sum\limits_{l=0}^{r}c_lx^l$, $\langle q\rangle=\sum\limits_{l=0}^{r}|c_l|$. *Тоді будуть справедливі співвідношення*

$$\begin{gathered}\|u_n^{(j+1)}\|=\left(\int\limits_0^1[u_n^{(j+1)}(x)]^2dx\right)^{1/2}\leqslant\left(\frac{4\langle q\rangle}{\pi^2(2n-1)}\right)^{j+1}2\frac{(2j+1)!!}{(2j+4)!!}\leqslant\\ \leqslant\left(\frac{4\langle q\rangle}{\pi^2(2n-1)}\right)^{j+1}\frac{1}{(j+2)\sqrt{\pi(j+1)}},\end{gathered}\tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}((2\pi n)^{2j}\lambda_n^{(j+1)}) = d_{j+1}, \tag{8}$$

де d_{j+1} *— деякі сталі, причому* $|d_{j+1}| < \infty$, $\forall\, j = 0, 1, \ldots$.

Спадання оцінок (2) поправок $\lambda_n^{(j+1)}$ відносно n до нуля суттєво повільніше, ніж насправді, як видно з граничного співвідношення (8). Оцінка (7) була одержана в [2, 3]. При доведенні граничного співвідношення (8) суттєво використовуються результати В. О. Марченка [6].

Провівши необхідні аналітичні дослідження, отримали такі структурні представлення розв'язків задач (4), а саме при $j = 0, 1, \ldots$:

$$u_n^{(2j+1)}(x) = \sum_{p=1}^{(2j+1)(r+1)} b_p^{(2j+1)} x^p \cos(\pi n x) + \sum_{p=0}^{(2j+1)(r+1)-1} a_p^{(2j+1)} x^p \sin(\pi n x), \tag{9}$$

$$u_n^{(2j)}(x) = \sum_{p=1}^{2j(r+1)-1} b_p^{(2j)} x^p \cos(\pi n x) + \sum_{p=0}^{2j(r+1)} a_p^{(2j)} x^p \sin(\pi n x), \tag{10}$$

справедливість яких доводиться методом математичної індукції.

Введемо позначення

$$P_{t+1}(x) = \frac{1}{(t+1)2\pi n} \sum_{s=0}^{[t/2]} \frac{(-1)^s x^{t+1-2s}}{(2\pi n)^{2s}} (t - 2s + 2)_{2s}, \qquad (v)_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v+k-1)!}{(v-1)!},$$

$$z(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} P_{t+1}(x)\sin(\pi n x) + \frac{t}{2\pi n} P_t(x)\cos(\pi n x),$$

$$z^T(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} -P_{t+1}(x)\cos(\pi n x) + \frac{t}{2\pi n} P_t(x)\sin(\pi n x).$$

Використовуючи представлення (9), (10), приходимо до таких формул:

$$\widetilde{u}_n^{(2j)}(x) = -\sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(2j-2p)} \left[\sum_{t=1}^{2p(r+1)-1} b_t^{(2p)} z(t,x) + \sum_{t=0}^{2p(r+1)} a_t^{(2p)} z^T(t,x)\right] -$$

$$-\sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(2j-2p-1)} \left[\sum_{t=1}^{(2p+1)(r+1)} b_t^{(2p+1)} z(t,x) + \sum_{t=0}^{(2p+1)(r+1)-1} a_t^{(2p+1)} z^T(t,x)\right] +$$

$$+\sum_{t=1}^{(2j-1)(r+1)} b_t^{(2j-1)} \sum_{l=1}^{r} c_l z(t+l,x) + \sum_{t=0}^{(2j-1)(r+1)-1} a_t^{(2j-1)} \sum_{l=1}^{r} c_l z^T(t+l,x),$$

$$\widetilde{u}_n^{(2j+1)}(x) = -\sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(2j-2p)} \left[\sum_{t=1}^{(2p+1)(r+1)} b_t^{(2p+1)} z(t,x) + \sum_{t=0}^{(2p+1)(r+1)-1} a_t^{(2p+1)} z^T(t,x)\right] -$$

$$-\sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(2j-2p+1)} \left[\sum_{t=1}^{2p(r+1)-1} b_t^{(2p)} z(t,x) + \sum_{t=0}^{2p(r+1)} a_t^{(2p)} z^T(t,x)\right] +$$

$$+\sum_{t=1}^{2j(r+1)-1} b_t^{(2j)} \sum_{l=1}^{r} c_l z(t+l,x) + \sum_{t=0}^{2j(r+1)} a_t^{(2j)} \sum_{l=1}^{r} c_l z^T(t+l,x),$$

які з врахуванням співвідношень зв'язку

$$u_n^{(2j)}(x) = \widetilde{u}_n^{(2j)}(x) + a_0^{(2j)} \sin(\pi n x), \qquad u_n^{(2j+1)}(x) = \widetilde{u}_n^{(2j+1)}(x) + a_0^{(2j+1)} \sin(\pi n x)$$

дають можливість легко одержати рекурентні співвідношення для коефіцієнтів $b_p^{(2j)}$ ($p = 1, \ldots, 2j(r+1)-1$), $a_p^{(2j)}$ ($p = 0, \ldots, 2j(r+1)$), $b_p^{(2j+1)}$ ($p = 0, \ldots, (2j+1)(r+1)$), $a_p^{(2j+1)}$ ($p = 0, \ldots, (2j+1)(r+1)-1$) через відповідні коефіцієнти функцій $u_n^{(2p)}(x)$ ($p = 0, \ldots, j-1$) і $u_n^{(2p-1)}(x)$ ($p = 1, \ldots, j$). Так, зокрема,

$$b_{(2j+1)(r+1)}^{(2j+1)} = -\frac{a_{2j(r+1)}^{(2j)} c_r}{2\pi n(2j+1)(r+1)},$$

$$a_{(2j+1)(r+1)-1}^{(2j+1)} = \frac{c_r}{2\pi n}\left[\frac{b_{2j(r+1)-1}^{(2j)}}{(2j+1)(r+1)-1} - \frac{a_{2j(r+1)}^{(2j)}}{(2j+1)(r+1)}\right].$$

Інші рекурентні формули для коефіцієнтів ми не наводимо через їх громіздкість.

Для поправок до власних значень на непарних і парних кроках відповідно маємо формули

$$\lambda_n^{(2j+1)} = -\sum_{p=1}^{2j(r+1)-1} b_p^{(2j)} \sum_{l=1}^{r} c_l \beta_{p+l} + \sum_{p=0}^{2j(r+1)} a_p^{(2j)} \sum_{l=1}^{r} c_l \left[\frac{\sqrt{2}}{2(p+l+1)} + \alpha_{p+l}\right],$$

$$\lambda_n^{(2j+2)} = -\sum_{p=1}^{(2j+1)(r+1)} b_p^{(2j+1)} \sum_{l=1}^{r} c_l \beta_{p+l} + \sum_{p=0}^{(2j+1)(r+1)-1} a_p^{(2j+1)} \sum_{l=1}^{r} c_l \left[\frac{\sqrt{2}}{2(p+l+1)} + \alpha_{p+l}\right],$$

де

$$\beta_p \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 x^p \sin(2\pi n x)dx = \frac{\sqrt{2}}{4\pi n}\sum_{i=0}^{p-1} \frac{p!\sin\left(\dfrac{i+1}{2}\pi\right)}{(p-i)!(2\pi n)^i},$$

$$\alpha_p \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 x^p \cos(2\pi n x)dx = \frac{\sqrt{2}}{4\pi n}\sum_{i=0}^{p-1} \frac{p!\cos\left(\dfrac{i+1}{2}\pi\right)}{(p-i)!(2\pi n)^i},$$

$$a_0^{(2j)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2}\left(\sum_{p=1}^{2j(r+1)-1} b_p^{(2j)}\beta_p - \sum_{p=1}^{2j(r+1)} a_p^{(2j)}\left[\frac{\sqrt{2}}{2(p+1)} + \alpha_p\right]\right),$$

$$a_0^{(2j+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2}\left(\sum_{p=1}^{(2j+1)(r+1)} b_p^{(2j+1)}\beta_p - \sum_{p=1}^{(2j+1)(r+1)-1} a_p^{(2j+1)}\left[\frac{\sqrt{2}}{2(p+1)} + \alpha_p\right]\right).$$

Викладене вище фактично є принципово новою алгоритмічною реалізацією FD-методу з $\overline{q}(x) \equiv 0$, яка не вимагає ані розв'язування крайових задач (4), ані інтегрування за формулами (5), (6), треба тільки виконувати звичайні арифметичні дії. Тому програмна реалізація цього алгоритму засобами комп'ютерної алгебри є дуже ефективною і дає змогу одержувати наближення m-го рангу за FD-методом для як завгодно великого m.

Зауваження. З теореми 1 випливає, що може існувати такий поліном $q(x)$, що $\exists\, n_0$, для якого при $n < n_0$ FD-метод для власних значень λ_n є збіжним, а для власних функцій u_n — розбіжним. Це підтверджується чисельними експериментами, зокрема при $q(x) = 40x$ таке n_0 виявляється рівним 4.

П р и к л а д. Нехай $q(x) = \sum\limits_{l=0}^{2} c_l x^l$, тоді за допомогою вищенаведеного алгоритму одержуємо

$$\lambda_n^{(1)} = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \frac{c_2}{2\pi^2 n^2},$$

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{15c_1^2 + 30c_1c_2 + 16c_2^2}{720\pi^2n^2} - \frac{5}{48}\frac{3c_1^2 + 6c_1c_2 + 4c_2^2}{\pi^4 n^4} + \frac{7c_2^2}{8\pi^6 n^6},$$

$$\lambda_n^{(3)} = \frac{1}{30240}\frac{c_2(63c_1^2 + 126c_1c_2 + 64c_2^2)}{\pi^4n^4} - \frac{c_2(15c_1^2 + 30c_1c_2 + 16c_2^2)}{48\pi^6n^6} + \frac{31}{32}\frac{c_2(3c_1^2 + 6c_1c_2 + 4c_2^2)}{\pi^8n^8} - \\ - \frac{121c_2^3}{16\pi^{10}n^{10}},$$

$$\lambda_n^{(4)} = \frac{315c_1^4 + 1260c_1^3c_2 + 2085c_1^2c_2^2 + 1650c_1c_2^3 + 512c_2^4}{725760\pi^6n^6} - \\ - \frac{1575c_1^4 + 6300c_1^3c_2 + 11907c_1^2c_2^2 + 11214c_1c_2^3 + 4096c_2^4}{17280\pi^8n^8} + \\ + \frac{1100c_1^4 + 4400c_1^3c_2 + 15745c_1^2c_2^2 + 22690c_1c_2^3 + 10928c_2^4}{1280\pi^{10}n^{10}} - \\ - \frac{14573}{768}\frac{c_2^2(3c_1^2 + 6c_1c_2 + 4c_2^2)}{\pi^{12}n^{12}} + \frac{17771c_2^4}{128\pi^{14}n^{14}}.$$

Звідси

$$d_2 = \frac{1}{180}(15c_1^2 + 30c_1c_2 + 16c_2^2), \qquad d_3 = \frac{c_2}{1840}(63c_1^2 + 126c_1c_2 + 64c_2^2),$$

$$d_4 = \frac{1}{11340}(315c_1^4 + 126c_1^3c_2 + 2085c_1^2c_2^2 + 1650c_1c_2^3 + 512c_2^4).$$

Вирази для поправок до власних функцій $u_n^{(j)}(x)$ не наводимо у зв'язку з тим, що швидкість їх збіжності відносно n задовольняє оцінку (7), яка доведена в роботах [2, 3].

1. *Макаров В. Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 1. – С. 34–39.
2. *Бандирський Б. Й., Макаров В. Л., Уханьов О. Л.* FD-метод для задач Штурма–Ліувілля. Експоненційна швидкість збіжності // Журн. обчисл. прикл. математики. – 2000. – **85**, № 1. – С. 1–60.
3. *Макаров В. Л.* FD-метод – экспоненциальная скорость сходимости // Обчисл. та прикл. математика. – 1997. – **82**. – С. 69–74.
4. *Adomian G.* Solving frontier problems of physics: the decomposition method. – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 352 p.
5. *Makarov V. L., Vinokur V. V.* The FD method for first-order linear hyperbolic differential equations with piecewise smooth coefficients // J. Math. Sci. – 1995. – **77**, No 5. – P. 3399–3405.
6. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 330 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 10.09.2013

Академик НАН Украины **В. Л. Макаров, Н. Н. Романюк**

Новые свойства FD-метода при его применениях к задачам Штурма–Лиувилля

Доказано, что FD-метод при его применении к решению задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке с краевыми условиями Дирихле относительно собственных значений имеет существенно более высокую скорость сходимости, чем это было установлено в предыдущих работах В. Л. Макарова и его учеников. Изложен принципиально новый алгоритм FD-метода, программная реализация которого средствами компьютерной алгебры показала свою высокую эффективность.

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov, N. M. Romanyuk**

New properties of the FD-method in its applications to the Sturm-Liouville problems

We prove that the FD-method, when applied to the Sturm–Liouville problem for a second-order ordinary differential equation with Dirichlet boundary conditions, converges faster than as compared with the result of the previous articles by V. L. Makarov and his students. A substantially new algorithm for the FD-method is presented and shown to be highly effective, when implemented with the use of a computer algebra software.