Доповіді
національної
академії наук
України

3 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

В. М. Бойко

Редукція диференціальних рівнянь до алгебраїчних

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

У термінах сингулярних модулів редукції, тобто сингулярних модулів некласичної (умовної) симетрії, вивчено питання редукції диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь.

"Некласичний" підхід до знаходження розв'язків диференціальних рівнянь запропоновано в [1] на прикладі (1+1)-вимірного лінійного рівняння теплопровідності як узагальнення класичного ліївського методу редукції. Протягом останніх десятиліть цей підхід суттєво розвинуто і використано при дослідженні багатьох диференціальних рівнянь з частинними похідними (див. детальний огляд у роботах [2–4]). Слід відмітити, що для відповідних об'єктів у літературі використовують досить різноманітну термінологію: порушені [5], некласичні [6], Q-умовні [7], умовні [8], часткові [9] симетрії, або інволютивні сім'ї/модулі некласичних/умовних операторів симетрії [10, 11] у більш повній формі. Характерною особливістю, яку некласичні симетрії успадковують від ліївських, є те, що вони дозволяють будувати анзаци для невідомої функції, які редукують відповідне диференціальне рівняння до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Як правило, у літературі розглядають редукції з використанням некласичних симетрій до звичайних диференціальних рівнянь, і на сьогодні існує лише декілька робіт, де розглянуто особливий випадок редукцій до алгебраїчних рівнянь (див., наприклад, [12]). Саме редукціям диференціальних рівнянь до алгебраїчних і присвячено цю роботу.

Нехай задано розшарований простір n незалежних змінних $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і однієї залежної змінної u. Розглянемо скінченновимірний інволютивний модуль Q векторних полів у цьому просторі і припустимо, що розмірність p модуля Q над кільцем гладких функцій змінних x, u не перевищує n, $0 < p \leqslant n$. Додатково вважаємо, що модуль Q задовольняє так звану *умову на ранг*, тобто для кожного фіксованого значення (x, u) проекція на простір змінних x є p-вимірною. Атрибут "*інволютивний*" означає, що комутатор будь-яких двох векторних полів з Q належить Q. Надалі вважаємо, що індекси i та j змінюються від 1 до n, індекс s змінюється від 1 до p, і за індексами, що повторюються, йде підсумовування. Дужками $\langle\dots\rangle$ позначатимемо лінійну оболонку векторних полів над кільцем гладких функцій змінних x, u. Нижні індекси функцій означають диференціювання за відповідними змінними, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ і $\partial_u = \partial/\partial u$. Будь-яку функцію вважаємо своєю похідною нульового порядку. Весь розгляд проводимо у рамках локального підходу.

Нехай векторні поля $Q_s = \xi^{si}(x,u)\partial_i + \eta^s(x,u)\partial_u$ утворюють базис модуля Q, тобто $Q = \langle Q_1,\dots,Q_p\rangle$. Тоді умова на ранг еквівалентна рівності $\mathrm{rank}(\xi^{si}) = p$. Вимога, що комутатор будь-якої пари базисних елементів належить Q, тобто $[Q_s, Q_{s'}] \in Q$, достатня для інволютивності модуля Q. Якщо векторні поля $\widetilde{Q}_1,\dots,\widetilde{Q}_p$ утворюють інший базис модуля Q, то існує невироджена $p\times p$ матрична функція $(\lambda^{ss'}(x,u))$ така, що $\widetilde{Q}_s = \lambda^{ss'}Q_{s'}$.

Розглянемо диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ вигляду $L(x,u_r) = 0$ для невідомої функції u незалежних змінних $x = (x_1,\dots,x_n)$ і порядку r. Тут через u_r позначено множину всіх похідних функції u за змінними x порядку не вище r, включаючи u як похідну нульового порядку. У рамках локального підходу рівняння $\mathcal{L}$ інтерпретують як алгебраїчне рівняння в просторі струменів $J^r = J^r(x|u)$ порядку r і ототожнюють з многовидом його розв'язків у J^r:

$$\mathcal{L} = \{(x,u_{(r)}) \in J^r \mid L(x,u_{(r)}) = 0\}.$$

Символ $\mathcal{L}$ використовуємо також для позначення цього многовиду, а символ $\mathcal{Q}_r$ — для позначення многовиду, який визначено всіма диференціальними наслідками характеристичної системи $Q[u] = 0$ в J^r.

Диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ називають *умовно інваріантним* відносно інволютивного модуля Q, якщо співвідношення $V_r L(x,u_r)|_{\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_r} = 0$ виконується для будь-якого $V \in Q$. Це співвідношення називають *критерієм умовної інваріантності*, а Q — *інволютивним модулем операторів умовної симетрії* (або Q-умовної симетрії, або некласичної симетрії і т. п.) рівняння $\mathcal{L}$.

Рівняння $\mathcal{L}$ умовно інваріантне відносно модуля Q тоді і лише тоді, коли анзац, побудований за цим модулем, редукує рівняння $\mathcal{L}$ до диференціального рівняння з $n-p$ незалежними змінними. Тому інволютивні модулі операторів умовної симетрії коротко називатимемо *модулями редукції* рівняння $\mathcal{L}$ [2, 4].

Нехай $L = L[u]$ — диференціальна функція порядку $\mathrm{ord}\, L = r$ (тобто гладка функція незалежних змінних $x = (x_1,\dots,x_n)$ і похідних від u за змінними x порядку не вище r) і нехай Q — p-вимірний $(0 < p < n)$ інволютивний модуль, який породжений векторними полями $Q_s = \xi^{si}(x,u)\partial_i + \eta^s(x,u)\partial_u$ і задовольняє умову на ранг $\mathrm{rank}(\xi^{si}) = p$. Модуль Q називатимемо *сингулярним* для L, якщо існує диференціальна функція $\widetilde{L} = \widetilde{L}[u]$ порядку меншого, ніж r, така, що $L|_{\mathcal{Q}_r} = \widetilde{L}|_{\mathcal{Q}_r}$. В іншому випадку Q є *регулярним* модулем для диференціальної функції L. Якщо мінімальний порядок диференціальних функцій, обмеження яких на $\mathcal{Q}_r$ збігається з $L|_{\mathcal{Q}_r}$, дорівнює k $(k < r)$, тоді модуль Q називатимемо *сингулярним копорядку* k для диференціальної функції L. Модуль Q є *ультрасингулярним* для L, якщо $L|_{\mathcal{Q}_r} \equiv 0$. Копорядок сингулярності ультрасингулярних модулів та порядок тотожно нульових диференціальних функцій зручно покласти рівним -1. Для будь-якого регулярного модуля диференціальної функції L визначимо його копорядок сингулярності як $r = \mathrm{ord}\, L$. Копорядок сингулярності модуля Q відносно диференціальної функції L позначимо через $\underset{L}{\mathrm{sco}}\, Q$. Інволютивний модуль Q, що задовольняє умову на ранг, є *(сильно) сингулярним* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$, якщо він сингулярний для диференціальної функції $L[u]$, яка є лівою частиною канонічного зображення $L[u]=0$ рівняння $\mathcal{L}$. Атрибут "сильний", як правило, будемо опускати.

Випадок, коли розмірність модулів векторних полів збігається з кількістю незалежних змінних, тобто $p=n$, є особливим для сингулярності модулів диференціальних функцій. Якщо n-вимірний інволютивний модуль Q породжують векторні поля, що задовольняють умову на ранг, то для будь-якої диференціальної функції $L=L[u]$ порядку r існує диференціальна функція $\widetilde{L}=\widetilde{L}[u]$ нульового порядку така, що $L|_{\mathcal{Q}_r}=\widetilde{L}|_{\mathcal{Q}_r}$. Тому в цьому випадку вважаємо, що модуль Q є сингулярним для L тоді і лише тоді, коли він є ультрасингулярним для L, тобто $L|_{\mathcal{Q}_r}\equiv 0$. Цей випадок також є особливим при редукції диференціальних рівнянь. На відміну від модулів редукції нижчих розмірностей, n-вимірні модулі редукції будь-якого диференціального рівняння $\mathcal{L}$ з n незалежними змінними редукують це рівняння до алгебраїчних рівнянь, а не до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Більш того, лише в цьому випадку регулярні та сингулярні модулі редукції можна вивчити в рамках єдиного підходу.

Нехай Q — інволютивний модуль розмірності $p=n$, який задовольняє умову на ранг. Тоді можна вибрати базис модуля Q, утворений векторними полями $Q_s=\partial_s+\eta^s(x,u)\partial_u$. Оскільки модуль Q інволютивний, базисні елементи Q_s комутують, а тому коефіцієнти $\eta^s=\eta^s(x,u)$ задовольняють систему рівнянь

$$\eta^s_{s'}+\eta^{s'}\eta^s_u=\eta^{s'}_s+\eta^s\eta^{s'}_u. \tag{1}$$

За теоремою Фробеніуса система $Q_s\Phi=\Phi_s+\eta^s\Phi_u=0$ на функцію $\Phi=\Phi(x,u)$ має єдиний функціонально незалежний розв'язок, що не є сталою. Іншими словами, коефіцієнти η^s можна зобразити у вигляді $\eta^s=-\Phi_s/\Phi_u$, де $\Phi=\Phi(x,u)$ — деяка гладка функція, $\Phi_u\neq 0$. Неявний анзац, побудований для u за модулем Q, має вигляд $\Phi(x,u)=\varphi$, де φ — нова невідома (нуль-арна) функція. Вона є сталою, оскільки розмірність модуля Q дорівнює кількості незалежних змінних x.

Припустимо, що Q — модуль редукції диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u]=0$ порядку r. Усі похідні функції u за змінними x від 1-го до r-го порядку на многовиді $\mathcal{Q}_r$, виражаються через змінні x і u:

$$u_\alpha=h^\alpha(x,u):=(\partial_1+\eta^1\partial_u)^{\alpha_1}\cdots(\partial_n+\eta^n\partial_u)^{\alpha_n}u,\qquad 1\leqslant|\alpha|\leqslant r.$$

Оскільки векторні поля Q_s комутують, таке зображення для похідних u_α добре визначене, бо не залежить від порядку множників у правій частині. Використовуючи це зображення для виключення похідних u_α з L, отримаємо диференціальну функцію $\widetilde{L}=\widetilde{L}[u]$ нульового порядку, тобто функцію від змінних x, u. Варіюючи η^s, отриману функцію можна інтерпретувати як диференціальну функцію незалежних змінних x, u та залежних змінних η^s. Таким чином, внаслідок [4, лема 1] Q є модулем редукції для $\mathcal{L}$, якщо виконується умова $Q_s\widetilde{L}|_{\widetilde{L}=0}=0$. Ця умова разом з рівняннями (1) задає повну систему визначальних рівнянь для коефіцієнтів η^s, а на підставі зображення $\eta^s=-\Phi_s/\Phi_u$ її можна також інтерпретувати як рівняння $L^\Phi=0$ на функцію Φ, де $L^\Phi=\widetilde{L}|_{\eta^s=-\Phi_s/\Phi_u}$ розглядаємо як диференціальну функцію незалежних змінних x, u та залежної змінної Φ.

Для спрощення умови $Q_s\widetilde{L}|_{\widetilde{L}=0}=0$ можна розв'язати рівняння $\widetilde{L}=0$ відносно однієї зі змінних (відносно однієї з незалежних змінних або відносно залежної змінної u) і виключити цю змінну з рівняння $Q_s\widetilde{L}=0$, використовуючи одержане співвідношення. Оскільки функції $\widetilde{L}$ і η^s (відповідно Φ) залежать від тих самих аргументів, ця процедура не приводить до звичайного диференціального рівняння.

У дійсності зручніше використовувати інший шлях, із залученням леми Адамара. У рамках локального підходу достатньо розбити подальший розгляд на два випадки: або функція $\widetilde{L}$ має максимальний ранг, або вона є сталою. Згідно з лемою Адамара у першому випадку для кожного s умова $Q_s\widetilde{L}|_{\widetilde{L}=0} = 0$ еквівалентна рівності $Q_s\widetilde{L} = \lambda^s\widetilde{L}$ для деякої гладкої функції $\lambda^s = \lambda^s(x, u)$. Після перехресного диференціювання для кожної пари (s, s') отримаємо

$$Q_sQ_{s'}\widetilde{L} - Q_{s'}Q_s\widetilde{L} = Q_s(\lambda^{s'}\widetilde{L}) - Q_{s'}(\lambda^s\widetilde{L}) = (Q_s\lambda^{s'} - Q_{s'}\lambda^s)\widetilde{L} = 0,$$

тобто $Q_s\lambda^{s'} = Q_{s'}\lambda^s$. Отже, існує гладка функція $\Lambda = \Lambda(x, u)$ така, що $\lambda^s = Q_s\Lambda$. Тоді внаслідок зображення $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ із системи рівнянь $Q_s\widetilde{L} = \lambda^s\widetilde{L}$ випливає, що $L^\Phi = \widetilde{\Lambda}\zeta(\Phi)$ для деякої гладкої функції ζ від однієї змінної, де $\widetilde{\Lambda} = e^\Lambda$ — ненульова функція змінних x, u.

У другому випадку умова $Q_s\widetilde{L} = 0$ виконується для всіх змінних x, u як диференціальний наслідок припущення, що функція $\widetilde{L}$ є сталою. Покладаючи $\widetilde{\Lambda} = 1$ і $\zeta(\Phi) = L^\Phi = \mathrm{const}$, отримуємо те саме рівняння $L^\Phi = \widetilde{\Lambda}\zeta(\Phi)$ з ненульовим множником $\widetilde{\Lambda}$.

Насправді це рівняння є в точності умовою редукції рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою анзацу $\Phi(x, u) = \varphi$, що асоційований з модулем Q. Дійсно, якщо функцію $u = u(x)$ неявно визначено цим анзацом, похідні від u (ненульового порядку) можна знайти з диференціальних наслідків рівнянь $u_s = -\Phi_s/\Phi_u$. Тому підстановка анзацу в рівняння $\mathcal{L}$ приводить до рівняння $L^\Phi|_{\Phi(x,u)=\varphi} = 0$, яке внаслідок умови редукції еквівалентне алгебраїчному рівнянню $\zeta(\varphi) = 0$ відносно сталої φ.

Очевидно, що модуль Q є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді і лише тоді, коли функція ζ тотожно рівна нулю.

Підсумовуючи вищенаведений розгляд, приходимо до такого твердження.

Твердження. *Модуль Q є n-вимірним модулем редукції диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ відносно невідомої функції u від n незалежних змінних x тоді і лише тоді, коли цей модуль породжений векторними полями $\partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$, $s = 1, \ldots, n$, де функція $\Phi = \Phi(x, u)$ задовольняє рівняння $L^\Phi = \widetilde{\Lambda}\zeta(\Phi)$, у якому $\widetilde{\Lambda}$ — ненульова функція змінних x, u, а диференціальну функцію $L^\Phi = L^\Phi[\Phi]$ отримано з $L[u]$ виключенням похідних від u, використовуючи диференціальні наслідки рівнянь $u_s = -\Phi_s/\Phi_u$. При цьому анзац $\Phi(x, u) = \varphi$ редукує рівняння $\mathcal{L}$ до алгебраїчного рівняння $\zeta(\varphi) = 0$ відносно сталої φ.*

Більш того, справедлива така теорема.

Теорема. *З точністю до еквівалентності сімей розв'язків, для будь-якого диференціального рівняння $\mathcal{L}$ однієї невідомої функції від n незалежних змінних існує взаємно однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і його n-вимірними ультрасингулярними модулями редукції. А саме, кожному модулю вказаного типу відповідає сім'я розв'язків, інваріантних відносно цього модуля. Задачі побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ і вичерпного опису його n-вимірних ультрасингулярних модулів редукції повністю еквівалентні.*

Доведення. Нехай Q — n-вимірний ультрасингулярний модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$. З твердження випливає, що анзац $\Phi(x, u) = \varphi$ побудований за допомогою модуля Q, редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності. Іншими словами, для кожного значення сталої φ цей анзац неявно визначає розв'язок рівняння $\mathcal{L}$.

Навпаки, припустимо що $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$ — сім'я розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, яка параметризована одним параметром $\varkappa$. Оскільки цей параметр є суттєвим і внаслідок чого похідна $f_\varkappa$ є ненульовою, параметр $\varkappa$ можна виразити із співвідношення $u = f(x, \varkappa)$. У результаті отримаємо, що $\varkappa = \Phi(x, u)$ для деякої функції $\Phi = \Phi(x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$. Розглянемо модуль $Q = \langle Q_1, \dots, Q_n \rangle$, де $Q_s = \partial_s + \eta^s \partial_u$, причому коефіцієнти $\eta^s = \eta^s(x, u)$ визначено як $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$. Це n-вимірний інволютивний модуль і $Q[u] = 0$ для будь-якого елемента сім'ї $\mathcal{F}$. Анзац $u = f(x, \varphi)$, де φ — нова невідома (нуль-арна) функція, відповідає модулю Q і редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності. Це означає, що Q — ультрасингулярний модуль редукції для рівняння $\mathcal{L}$.

Однопараметричні сім'ї $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$ і $\widetilde{\mathcal{F}} = \{u = \widetilde{f}(x, \widetilde{\varkappa})\}$ називають еквівалентними, якщо вони складаються з тих самих функцій і відрізняються лише параметризацією, тобто якщо існує функція $\zeta = \zeta(\varkappa)$ така, що $\zeta_\varkappa \neq 0$ і $\widetilde{f}(x, \zeta(\varkappa)) = f(x, \varkappa)$. Це виконується тоді і лише тоді, коли функції $\Phi = \Phi(x, u)$ і $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}(x, u)$, асоційовані відповідно з сім'ями $\mathcal{F}$ і $\widetilde{\mathcal{F}}$, є функціонально залежними, точніше $\widetilde{\Phi} = \zeta(\Phi)$. Отже, еквівалентні однопараметричні сім'ї розв'язків відповідають одному і тому ж ультрасингулярному модулю редукції Q рівняння $\mathcal{L}$ і, навпаки, будь-які дві однопараметричні сім'ї Q-інваріантних розв'язків є еквівалентними.

Наслідок. *Система визначальних рівнянь на коефіцієнти ультрасингулярних модулів редукції рівняння $\mathcal{L}$, яка складається з рівняння* (1) *і рівняння $\widetilde{L} = 0$, зводиться композицією нелокальної підстановки $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, де Φ — функція змінних x, u, та перетворення годографа*

нові незалежні змінні: $\quad \widetilde{x}_i = x_i, \qquad \varkappa = \Phi,$

нова залежна змінна: $\quad \widetilde{u} = u$

до початкового рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\widetilde{u} = \widetilde{u}(\widetilde{t}, \widetilde{x}, \varkappa)$, де $\varkappa$ відіграє роль параметра.

Зауважимо, що редукцію диференціальних рівнянь до алгебраїчних з використанням некласичних симетрій розглянуто в роботі [12], де отримано твердження, аналогічне вищенаведеній теоремі. Але використання поняття сингулярних операторів редукції дозволяє сформулювати цей результат точніше.

Автор висловлює подяку Р. О. Поповичу за корисні дискусії та обговорення результатів роботи.

1. *Bluman G. W., Cole J. D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025–1042.
2. *Kunzinger M., Popovych R. O.* Singular reduction operators in two dimensions // J. Phys. A: Math. Theor. – 2008. – **41**. – 505201, 24 p.
3. *Kunzinger M., Popovych R. O.* Is a nonclassical symmetry a symmetry? // Proc. of 4th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus). – Nicosia: University of Cyprus, 2009. – P. 107–120.
4. *Boyko V. M., Kunzinger M., Popovych R. O.* Singular reduction modules of differential equations. – arXiv: 1201.3223.
5. *Fushchych W. I., Tsyfra I. M.* On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – L45–L48.
6. *Levi D., Winternitz P.* Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – P. 2915–2924.
7. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
8. *Fushchych W. I., Zhdanov R. Z.* Conditional symmetry and reduction of partial differential equations // Ukr. Math. J. – 1992. – **44**. – P. 875–886.
9. *Vorob'ev E. M.* Reduction and quotient equations for differential equations with symmetries // Acta Appl. Math. – 1991. – **51**. – P. 1–24.

10. *Olver P. J., Vorob'ev E. M.* Nonclassical and conditional symmetries / CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3 / Ed. by N. H. Ibragimov. – Boca Raton: CRC Press, 1996. – P. 291–328.
11. *Zhdanov R. Z., Tsyfra I. M., Popovych R. O.* A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 101–123.
12. *Grundland A. M., Tafel J.* On the existence of nonclassical symmetries of partial differential equations // J. Math. Phys. – 1995. – **36**. – P. 1426–1434.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 12.09.2013

В. Н. Бойко

Редукция дифференциальных уравнений к алгебраическим

В терминах сингулярных модулей редукции, т. е. сингулярных модулей неклассической (условной) симметрии, изучен вопрос редукции дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям.

V. M. Boyko

Reduction of differential equations to algebraic ones

In terms of singular reduction modules, i. e. singular modules of a nonclassical (conditional) symmetry, the question of reduction of differential equations to algebraic ones is studied.