УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, І. Я. Субботін, В. А. Чупордя

Про структуру модулів над узагальнено розв'язними групами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Нехай R — кільце, G — група. Модуль A над груповим кільцем RG будемо називати мінімаксно-антифінітарним RG-модулем, якщо фактор-модуль $A/C_A(H)$ є мінімаксним як R-модуль для будь-якої власної підгрупи H, яка не є скінченно породженою, але R-модуль $A/C_A(G)$ не є мінімаксним. Досліджуються мінімаксно-антифінітарні модулі над цілочисельними груповими кільцями локально узагальнено радикальних груп.

Нехай R — кільце, G — група та A — RG-модуль. Модулі над груповими кільцями RG є старим класичним об'єктом досліджень і знаходять застосування в різних областях алгебри. Випадок, коли група G є скінченною, вивчається досить детально вже довгий час. Однак у випадку, коли група G нескінченна, ситуація зовсім інша. Вивчення модулів над майже поліциклічними групами було розпочато в роботах Ф. Холла [1, 2], які вже стали класичними. Зокрема, виявилося, що групове кільце RG майже поліциклічної групи G над нетеровим кільцем R буде нетеровим. Цей факт мав велику роль для розвитку теорії модулів над майже поліциклічними групами. Зараз ця теорія є дуже розвиненою і багатою на цікаві змістовні результати. В цьому плані клас майже поліциклічних груп є винятковим, нічого схожого для інших класів нескінченних груп, навіть таких близьких до скінченних, як черніковські, ми не маємо. Це є однією з причин того, що теорія модулів над іншими типами нескінченних груп не так добре розвинена. Тому вивчення модулів над іншими типами нескінченних груп не може базуватися зараз тільки на вивченні відповідних групових кілець, вона потребує застосування деяких природних обмежень. Зокрема, умови скінченності є природними обмеженнями, що виявилися дуже корисними і вже продемонстрували свою ефективність. Першими природними обмеженнями, які випливають з класичної теорії кілець та модулів, є обмеження, що дають близькість до таких класичних умов, як умови "бути нетеровим модулем" та "бути артіновим модулем". Нетерові та артінові модулі вивчаються вже досить давно. Багато аспектів теорії артінових модулів над груповими кільцями було відображено в книзі [3]. Не так давно в теорії нескінченно вимірних лінійних груп почав інтенсивно застосовуватися так званий фінітарний підхід. Він виявився досить результативним і приніс багато цікавих результатів.

Нехай R — кільце, G — група та A — модуль над груповим кільцем RG. Для підгрупи H групи G розглянемо її централізатор

$$C_A(H) = \{a \in A \mid ah = a \text{ для кожного елемента } h \in H\}$$

в модулі A. Очевидно, $C_A(H)$ буде RH-підмодулем A та H реально діє на $A/C_A(H)$. R-фактор-модуль $A/C_A(H)$ називається *коцентралізатором H в A*. Фактор-група $H/C_H(A/C_A(H))$ буде ізоморфною до підгрупи групи автоморфізмів R-модуля $A/C_A(H)$.

Якщо x — елемент $C_H(A/C_A(H))$, то x діє тотожно на факторах ряду $\langle 0\rangle \leqslant C_A(H) \leqslant A$. Звідси отримуємо, що підгрупа $C_H(A/C_A(H))$ буде абелевою. Це показує, що структура H значною мірою визначається структурою $C_H(A/C_A(H))$, а отже, структурою групи автоморфізмів R-модуля $A/C_A(H)$.

Нехай $\mathfrak{M}$ — деякий клас R-модулів. Будемо говорити, що A є *$\mathfrak{M}$-фінітарним модулем над RG*, якщо $A/C_A(x) \in \mathfrak{M}$ для кожного елемента $x \in G$. Якщо R — поле і $C_G(A) = \langle 1\rangle$, а $\mathfrak{M}$ — клас скінченновимірних векторних просторів над R, то приходимо до фінітарних лінійних груп. Теорія фінітарних лінійних груп є досить добре розвиненою (див., наприклад, [4]). Б. Верфрітц розпочав розгляд випадків, коли $\mathfrak{M}$ — клас скінченних R-модулів [5–8], коли $\mathfrak{M}$ — клас нетерових R-модулів [9] та коли $\mathfrak{M}$ — клас артінових R-модулів [7, 8, 10, 11]. Артіново-фінітарні модулі розглядалися також у статті [12]. Артінові та нетерові модулі можуть бути об'єднані таким чином. R-модуль A називається *мінімаксним*, якщо A має скінченний ряд підмодулів, фактори якого нетерові або артінові. Неважко показати, що у випадку, коли R — комутативне кільце без дільників нуля, то кожний мінімаксний R-модуль A містить у собі такий нетеровий підмодуль B, що A/B є артіновим. Першим природним випадком тут є випадок, коли $R = \mathbb{Z}$ є кільцем всіх цілих чисел. Б. Верфрітц розпочав розгляд нетерово-фінітарних та артіново-фінітарних модулів саме з розгляду модулів над цілочисельними груповими кільцями. Цей випадок знаходить важливі застосування, зокрема, для узагальнено розв'язних груп.

Нехай $\mathfrak{M}$ — деякий клас R-модулів. Покладемо

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G) = \{H \mid H \text{ — підгрупа групи } G\text{, що має властивість } A/C_A(H) \in \mathfrak{M}\}.$$

Якщо A — це $\mathfrak{M}$-фінітарний модуль, то система $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G)$ містить усі циклічні підгрупи (більш того, всі скінченно породжені підгрупи у випадку, коли $\mathfrak{M}$ задовольняє деякі природні обмеження). Очевидно, будова групи G суттєво залежить від того, яка з важливих природних систем її підгруп містить $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G)$. Тому природно було б розглянути ситуації, коли система $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G)$ є досить великою. Зокрема, великими системами підгруп групи G є система всіх її власних підгруп та система всіх її підгруп, що не є скінченно породженими. Наприклад, якщо система $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G)$ містить у собі всі підгрупи, що не є скінченно породженими, то отримуємо ситуацію, яка є дуальною до $\mathfrak{M}$-фінітарних модулів.

Нехай R — кільце, G — група та A — RG-модуль. Будемо говорити, що A є *мінімаксно-антифінітарним RG-модулем*, якщо фактор-модуль $A/C_A(H)$ є мінімаксним як R-модуль для будь-якої власної підгрупи H, яка не є скінченно породженою, але R-модуль $A/C_A(G)$ не є мінімаксним.

При вивченні структури мінімаксно-антифінітарних $\mathbb{Z}G$-модулів значну роль відіграє така підгрупа. Покладемо

$$Coc_{\mathbb{Z}-\mathrm{mmx}}(G) = \{x \mid A/C_A(x) \text{ є мінімаксним } \mathbb{Z}\text{-модулем}\}.$$

Вивчення мінімаксно-антифінітарних $\mathbb{Z}G$-модулів розпадається на три природні частини. Першим є випадок, коли $G = Coc_{\mathbb{Z}-\mathrm{mmx}}(G)$. У цьому випадку кожна власна підгрупа G має мінімаксний коцентралізатор. Ми будемо розглядати модулі над групами, які належать до нижченаведеного дуже широкого класу груп.

Групу G будемо називати *узагальнено радикальною*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні. Зокрема, узагальнено радикальна група G має зростаючу локально нільпотентну підгрупу або зростаючу локально скінченну підгрупу. У першому випадку її локально нільпотентний радикал буде неодиничним, а у другому випадку неодиничним буде її локально скінченний радикал. Отже, узагальнено радикальна група G має зростаючий ряд нормальних підгруп з локально нільпотентними або локально скінченними факторами. Група G називається *локально узагальнено радикальною*, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа є узагальнено радикальною. Клас локально узагальнено радикальних груп є дуже широким, зокрема, він містить всі локально скінченні та всі локально розв'язні групи.

Теорема 1. *Нехай G — локально узагальнено радикальна група та A — $\mathbb{Z}G$-модуль, для якого $A/C_A(G)$ не є $\mathbb{Z}$-мінімаксним. Якщо фактор-модуль $A/C_A(H)$ є $\mathbb{Z}$-мінімаксним для кожної власної підгрупи H групи G, то $G/C_G(A)$ є циклічною або квазіциклічною p-групою для деякого простого числа p.*

Наслідок N. *Нехай G — локально узагальнено радикальна група та A — $\mathbb{Z}G$-модуль, для якого $A/C_A(G)$ не є $\mathbb{Z}$-нетеровим. Якщо фактор-модуль $A/C_A(H)$ є $\mathbb{Z}$-нетеровим для кожної власної підгрупи H групи G, то $G/C_G(A)$ є циклічною або квазіциклічною p-групою для деякого простого числа p.*

Наслідок A. *Нехай G — локально узагальнено радикальна група та A — $\mathbb{Z}G$-модуль, для якого $A/C_A(G)$ не є $\mathbb{Z}$-артіновим. Якщо фактор-модуль $A/C_A(H)$ є $\mathbb{Z}$-артіновим для кожної власної підгрупи H групи G, то $G/C_G(A)$ є циклічною або квазіциклічною p-групою для деякого простого числа p.*

Результат, аналогічний теоремі 1, має місце і для інших класів груп. Зокрема, має місце

Наслідок D. *Нехай G — група, що не збігається зі своїм комутантом, та A — $\mathbb{Z}G$-модуль, для якого $A/C_A(G)$ не є $\mathbb{Z}$-мінімаксним. Якщо фактор-модуль $A/C_A(H)$ є $\mathbb{Z}$-мінімаксним для кожної власної підгрупи H групи G, то $G/C_G(A)$ є циклічною або квазіциклічною p-групою для деякого простого числа p.*

Дійсно, застосувавши ті ж самі аргументи, які були застосовані в розділі 2 роботи [13], можна звести загальну ситуацію до випадку, коли група G не містить у собі власних підгруп скінченного індексу, не може бути скінченно породженою та $G/[G,G]$ буде квазіциклічною групою. Нехай $K/[G,G]$ — власна підгрупа $G/[G,G]$, тоді $A/C_A(K)$ — $\mathbb{Z}$-мінімаксний модуль. Зокрема, його періодична частина $T/C_A(K)$ буде черніковською. Оскільки K нормальна в G, то $C_A(K)$ та T будуть $\mathbb{Z}G$-підмодулями. Відомо, що група автоморфізмів абелевої черніковської групи є резидуально скінченною, а оскільки G не має власних підгруп скінченного індексу, то G діє тотожно на $T/C_A(K)$, тобто $[T,G] \leqslant C_A(K)$. A/T є мінімаксною і не має скруту, а тому вона є резидуально скінченною. Звідси випливає включення $[A,G] \leqslant T$. А отже, $[[A,G],G] \leqslant C_A(K)$. Останнє включення має місце для кожної власної підгрупи $K \geqslant [G,G]$, а оскільки G є об'єднанням усіх таких підгруп, то отримуємо включення $[[A,G],G] \leqslant C_A(G)$. Таким чином, G діє тотожно на факторах ряду $\langle 0\rangle \leqslant C_A(G) \leqslant [A,G] \leqslant A$, а це тягне за собою нільпотентність групи $G/C_G(A)$, і тепер можна застосувати теорему 1.

Цікавим є той факт, що автору роботи [14] вдалося отримати ці слабкіші результати, майже дослівно повторюючи аргументи доведень нашої препублікації [15], яка з'явилася раніше.

Другим є випадок, коли $G \neq Coc_{\mathbb{Z}-\mathrm{mmx}}(G)$ і група G не є скінченно породженою. Його описує така теорема.

Теорема 2. *Нехай G — локально узагальнено радикальна група, A — мінімаксно-антифінітарний $\mathbb{Z}G$-модуль та $D = Coc_{\mathbb{Z}-\mathrm{mmx}}(G)$. Припустимо, що G не є скінченно породженою, $G \neq D$ та $C_G(A) = \langle 1\rangle$. Тоді G є групою одного з таких типів:*

(1) G — квазіциклічна q-група для деякого простого числа q.

(2) $G = Q \times \langle g \rangle$, де Q є квазіциклічною q-підгрупою, g — p-елемент та $g^p \in D$, p, q — прості числа (не обов'язково різні).

(3) G містить у собі таку нормальну подільну черніковську q-підгрупу Q, що $G = Q\langle g \rangle$, де g — p-елемент, p, q — прості числа (не обов'язково різні).

Більш того, G задовольняє такі умови:

(3a) $g^p \in D$;

(3b) Q є G-квазіскінченною;

(3c) якщо $q = p$, то Q має спеціальний ранг $p^{m-1}(p-1)$, де $p^m = |\langle g \rangle / C_{\langle g \rangle}(Q)|$;

(3d) якщо $q \neq p$, то Q має спеціальний ранг $o(q, p^m)$, де знову $p^m = |\langle g \rangle / C_{\langle g \rangle}(Q)|$ та $o(q, p^m)$ — порядок q за модулем p^m.

Також для типів (2), (3) *$A(\omega \mathbb{Z} D)$ є черніковською та $\Pi(A(\omega \mathbb{Z} D)) \subseteq \Pi(D)$.*

Тут через ωRG позначено *фундаментальний ідеал* групового кільця RG, тобто двосторонній ідеал RG, породжений елементами $g - 1$, де $g \in G$.

Також нагадаємо, що нормальна абелева підгрупа A групи G *називається G-квазіскінченною*, якщо кожна власна G-інваріантна підгрупа A є скінченною.

Нарешті, третім є випадок, коли $G \neq Coc_{\mathbb{Z}-\mathrm{mmx}}(G)$ і група G скінченно породжена. Його описує така теорема.

Теорема 3. *Нехай G — скінченно породжена узагальнено радикальна група, A — мінімаксно-антифінітарний $\mathbb{Z}G$-модуль та $D = Coc_{\mathbb{Z}-\mathrm{mmx}}(G)$. Припустимо, що $G \neq D$ та $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Тоді G задовольняє такі умови:*

1) D містить у собі таку нормальну в G нільпотентну підгрупу K, що G/K — майже поліциклічна група;

2) G/D є вільною від скруту;

3) K задовольняє умову максимальності для $\langle g \rangle$-інваріантних підгруп для будь-якого елемента g, що не міститься в D.

1. *Hall P.* Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1954. – **4**. – P. 419–436.
2. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Ibid. – 1959. – **9**. – P. 595–632.
3. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel: Birkhäuser, 2007. – 248 p.
4. *Phillips R.* Finitary linear groups: a survey // Finite and locally finite groups / NATO ASI. Ser. C 471. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – P. 111–146.
5. *Wehrfritz B. A. F.* Finite-finitary groups of automorphisms // J. Algebra and Its Appl. – 2002. – **4**. – P. 375–389.
6. *Wehrfritz B. A. F.* Finitary automorphism groups over commutative rings // J. Pure Appl. Algebra. – 2002. – **172**. – P. 337–346.
7. *Wehrfritz B. A. F.* Finitary and artinian-finitary groups over the integers Z // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**. – P. 924–936.
8. *Wehrfritz B. A. F.* Finitary and artinian-finitary groups over commutative rings // J. Group Theory. – 2004. – **7**. – P. 243–253.
9. *Wehrfritz B. A. F.* On generalized finitary groups // J. Algebra. – 2002. – **247**. – P. 707–727.
10. *Wehrfritz B. A. F.* Artinian-finitary groups over commutative rings and non-commutative rings // J. London Math. Soc. – 2004. – **70**. – P. 325–340.
11. *Wehrfritz B. A. F.* Artinian-finitary groups are locally normal-finitary // J. Algebra. – 2005. – **287**. – P. 417–431.
12. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Chupordya V. A.* On bounded artinian finitary modules // Int. J. Algebra and Computation. – 2007. – **17**, No 4. – P. 881–893.
13. *Kurdachenko L. A., Munoz-Escolano J. M., Otal J.* Antifinitary linear groups // Forum Math. – 2008. – **20**. – P. 27–44.

14. *Dashkova O. Yu.* On modules over group rings of groups with restriction on the system of all proper subgroups // arXiv:1305.0744v2.
15. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Chupordya V. A.* On the structure of some modules over generalized soluble groups // arXiv:1302.2115.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара
Національний університет Лос-Анджелеса, США

Надійшло до редакції 13.11.2013

Л. А. Курдаченко, И. Я. Субботин, В. А. Чупордя

О структуре модулей над обобщенно разрешимыми группами

Пусть R — кольцо, G — группа. Модуль A над групповым кольцом RG будем называть минимаксно-антифинитарным RG-модулем, если фактор-модуль $A/C_A(H)$ является минимаксным как R-модуль для произвольной собственной подгруппы H, которая не является конечно порожденной, но R-модуль $A/C_A(G)$ не является минимаксным. Исследуются минимаксно-антифинитарные модули над целочисленными групповыми кольцами локально обобщенно радикальных групп.

L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, V. A. Chupordya

On the structure of some modules over generalized soluble groups

Let R be a ring, G be a group, and A be an RG-module. We say that A is a minimax-antifinitary RG-module if the factor-module $A/C_A(H)$ is minimax as an R-module for each not finitely generated proper subgroup H, and the R-module $A/C_A(G)$ is not minimax. The minimax-antifinitary modules over the group ring RG, where $R = \mathbb{Z}$ is the ring of all integers and G is the locally generalized radical group, are studied.