УДК 519.6

О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай

Ермітова інтерлінація функцій двох змінних на заданій системі неперетинних ліній із збереженням класу $C^r(\mathbb{R}^2)$

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Досліджуються методи побудови операторів ермітової інтерлінації відновлення диференційовних функцій двох змінних між системою гладких неперетинних кривих, які зберігають клас диференційовності $C^r\left(\mathbb{R}^2\right)$. Для побудови вказаних операторів використовуються сліди наближуваної функції та її частинних похідних за однією змінною до заданого порядку на вказаній системі неперетинних кривих.

Нехай $f^{(0,s)}(x,y) = \partial^s f(x,y)/\partial y^s$. Оператори ермітової інтерлінації, що використовують для своєї побудови сліди наближуваної функції та її частинних похідних до заданого порядку $N \geqslant 0$ на заданій системі паралельних прямих

$$\begin{aligned}
&E_{MN}f(x,y) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{n} f^{(0,s)}(x,y_k)h_{k,s}(y)\frac{(y-y_k)^s}{s!}, \qquad f^{(0,s)}(x,y_k) = \left.\frac{\partial^s f(x,y)}{\partial y^s}\right|_{y=y_k},\\
&h_{k,s}^{(p)}(y_\ell) = \delta_{k,\ell}\delta_{p,0}, \qquad p=\overline{0,N-s},\\
&\left.\frac{\partial^p E_N f(x,y)}{\partial y^p}\right|_{y=y_\ell} = f^{(0,p)}(x,y_\ell), \qquad k,\ell=\overline{1,M}; \qquad p,s=\overline{0,N},
\end{aligned} \tag{1}$$

які є операторами інтерполяції за однією змінною, мають порядок диференційовності, що повністю визначається диференціальними властивостями допоміжних (базисних) функцій $h_{k,s}(y)(y-y_k)^s/s!$, $k=\overline{1,M}$; $s=\overline{0,N}$ (поліномів алгебраїчних, тригонометричних, узагальнених сплайнів тощо) та диференціальними властивостями вказаних слідів. Тобто, якщо

$$f^{(0,s)}(x,y_k) \in C^{r-s}(R), \qquad s=\overline{0,N}, \qquad r \geqslant N \geqslant 1, \qquad k=\overline{0,M},$$

то

$$E_{MN}f(x,y) \in C^{r-N}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow E_{MN}f(x,y) \notin C^r(\mathbb{R}^2).$$

Це твердження, зокрема, виконується для функцій

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = |x+y-1|^{2q+1} \in C^{2q}(\mathbb{R}^2), \qquad f \notin C^{2q+1}(\mathbb{R}^2),\\
&f(x,y) = |x+y-1|^{2q+1}(x+y-1) \in C^{2q+1}(\mathbb{R}^2), \qquad f \notin C^{2q+2}(\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

Таким чином, оператори $E_{M,N}f(x,y)$ не можна використовувати замість $f(x,y)$ без додаткового аналізу у тих задачах, де істотною є вимога, щоб функція $f(x,y)$ мала неперервні похідні порядку $r > 0$. Нагадаємо, запис $f(x_1, \dots, x_n) \in C^r(\mathbb{R}^n)$ означає, що функція f і всі її частинні похідні до порядку r, $r \geqslant 0$ є неперервними, тобто $\dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta_1} \cdots \partial x^{\beta_n}} f \in C(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n \leqslant r$. У зв'язку з цим будемо говорити, що оператор L зберігає клас диференційовності наближуваної функції f, якщо $f \in C^r(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Lf \in C^r(\mathbb{R}^n)$. Якщо ж $f \in C^r(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Lf \in C^q(\mathbb{R}^n)$, $q < r$, то говоритимемо, що оператор L не зберігає клас диференційовності функції f.

Аналіз літературних джерел. У роботах [1–13] досліджувалися оператори відновлення функцій багатьох змінних за допомогою операторів інтерлінації функцій двох змінних на системі неперетинних кривих, що зберігають клас диференційовності $C^r(\mathbb{R}^2)$, якому належить наближувана функція, і при цьому використовують сліди наближуваної функції та сліди її частинних похідних за однією змінною на системі перетинних ліній. Але загальний випадок операторів, що зберігають клас диференційовності у всіх точках площини, не досліджувався. В той же час на практиці є приклади, в яких необхідно відновлювати поверхні за відомими слідами їх та їх частинних похідних або деякої системи диференціальних операторів (взагалі кажучи, нелінійних) між заданими кривими.

Відомим прикладом такої задачі є задача побудови системи координатних функцій для варіаційних методів розв'язання крайових задач, що точно задовольняють граничні умови на границі області інтегрування. Ця задача є однією з найвідоміших задач на побудову функцій, що належать до заданого класу диференційовності і мають задані сліди на системі перетинних, взагалі кажучи, ліній.

Відзначимо також необхідність відновлення поверхонь лопаток авіадвигунів або лопаток гвинтів на атомних підводних човнах, форма яких знаходиться з умови найкращого обтікання поверхні газом або рідиною. При цьому форма поверхні обтікання є невідомою конструкторам і знаходиться шляхом розв'язання відповідних крайових задач, що є важливою складовою процесу конструювання лопаток. Однією з найскладніших задач, які виникають при цьому, є збереження відповідної гладкості конструйованої поверхні, ізогеометричних властивостей (опуклості, вгнутості тощо). Крім того, поверхня повинна проходити через задану систему точок, ліній і навіть збігатися з деякими відомими поверхнями в точках заданих підобластей.

Таким чином, актуальною є задача побудови і дослідження операторів інтерлінації функцій на системі неперетинних ліній із збереженням класу диференційовності $C^r(\mathbb{R}^2)$ [12, 13].

Основні твердження роботи. В даній роботі пропонуються і досліджуються методи побудови операторів наближення функцій двох змінних із збереженням класу диференційовності, якому належить наближувана функція за умови, що сліди цих операторів і сліди їх частинних похідних за однією із змінних до фіксованого порядку збігаються з відповідними слідами наближуваної функції на заданій системі ліній.

Оператори інтерлінації ермітового типу в дискретній формі відновлення функцій двох змінних за допомогою їх слідів та слідів їх похідних за однією змінною на заданій системі неперетинних ліній. Потрібні оператори такого типу вперше були побудовані в роботах [13–15] в дискретній та інтегральній формах. Зокрема, в дискретній формі оператор

$$L_N f(x,y) = \sum_{k=1}^{M} h_{M,k,0}(y) \sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x + \beta_{0,\ell}(y - y_k), y_k) + \tag{2}$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}h_{M,k,s}(y)\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{s,\ell}\int\limits_{0}^{x+\beta_{s,\ell}(y-y_k)}f^{(0,s)}(t,y_k)\frac{(x+\beta_{s,l}(y-y_k)-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt$$

задовольняє такі умови:

$$f\in C^r(\mathbb{R}^2)\bigcap f^{(0,s)}\in C^{r-s}(R),\qquad 0\leqslant s\leqslant N\leqslant r\Rightarrow L_Nf\in C^r(\mathbb{R}^2),$$
$$\left.\frac{\partial^q L_Nf(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=y_\ell}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=y_\ell}\in C^{r-q}(R),\qquad 0\leqslant q\leqslant N,\qquad 1\leqslant \ell\leqslant M, \tag{3}$$

якщо невідомі $\lambda_{s,\ell}$, $\ell=\overline{0,N}$, для кожного $s=\overline{0,N}$ знаходяться шляхом розв'язання СЛАР

$$\sum_{\ell=1}^{N}(\beta_{s,\ell})^p=\delta_{p,s},\qquad 0\leqslant p\leqslant N, \tag{4}$$

при умовах $-b\leqslant\beta_{s,0}<\beta_{s,1}<\cdots<\beta_{s,N}\leqslant b$, $s=\overline{0,N}$, $1\leqslant b\leqslant\infty$.

Нижче узагальнимо цей результат на випадок, коли сліди наближуваної функції та сліди її частинних похідних за змінною y до фіксованого порядку задаються на лініях $y=\gamma_k(x)\in C(\mathbb{R})$, $k=\overline{1,M}$. Введемо до розгляду оператор

$$O_{M,N}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,0}(y)\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{0,\ell}f(x+\beta_{0,\ell}(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))+$$
$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}h_{M,k,s}(y)\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{s,\ell}\int\limits_{x}^{x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma_k(x))}f^{(0,s)}(t,\gamma_k)\frac{(x+\beta_{s,l}(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt,$$

де $\beta_{s,\ell}\in[-b,b]$, $s=\overline{0,N}$, $\ell=\overline{0,N}$ — задані різні числа (дійсні або комплексні), невідомі $\lambda_{s,\ell}$, $s=\overline{0,N}$, $\ell=\overline{0,N}$, для кожного значення $s\in[0,N]$ знаходяться шляхом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (4).

Зауважимо, що системи (4) мають єдиний розв'язок, оскільки їх детермінанти

$$\det[\beta_{s,\ell}^p]_{\ell=\overline{0,N}}^{p=\overline{0,N}}\neq 0,\qquad s=\overline{0,N},$$

є детермінантами Вандермонда.

Теорема 1. *Оператори $O_{M,N}f$ мають властивості*

$$f\in C^r(\mathbb{R}^2)\Rightarrow O_{M,N}f\in C^r(\mathbb{R}^2),$$
$$\left.\frac{\partial^q O_{M,N}f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma_l(x)),$$
$$0\leqslant q\leqslant N,\qquad N\leqslant r,\qquad l=\overline{1,M}.$$

Як частинний випадок, при $\gamma_k(x)=y_k$, $k=\overline{1,M}$, отримуємо $O_{M,N}f=L_{M,N}f$.

Оператори інтерлінації ермітового типу в інтегральній формі відновлення функцій двох змінних за допомогою їх слідів та слідів їх похідних за однією змінною на заданій системі неперетинних ліній. Введемо до розгляду оператор

$$D_{M,N}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,0}(y)\int_{-b}^{b}G_{k,0}(\beta)f(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))\,d\beta+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,s}(y)\int_{-b}^{b}G_{k,s}(\beta)\int_{x}^{x+\beta(y-\gamma_k(x))}f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dtd\beta.$$

Теорема 2. *Оператори $D_{M,N}f$ мають властивості*

$$f\in C^r(\mathbb{R}^2)\Rightarrow D_{M,N}f\in C^r(\mathbb{R}^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q D_{M,N}f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma_l(x))\in C^{r-q}(R),$$

$$0\leqslant q\leqslant N,\qquad N\leqslant r,\qquad l=\overline{1,M},$$

якщо

$$\int_{-b}^{b}G_{k,s}(\beta)\beta^p d\beta=\delta_{s,p},\qquad 0\leqslant s,\qquad p\leqslant N,\qquad k=\overline{1,M}.$$

Оператори інтерлінації ермітового типу в інтегральній формі з ядрами $G_{k,s}(x,y,\beta)$ відновлення функцій двох змінних за допомогою їх слідів та слідів їх похідних за однією змінною на заданій системі неперетинних ліній. Введемо до розгляду ядра $G_{k,s}(x,y,\beta)$, $0\leqslant s\leqslant N$, $1\leqslant k\leqslant M$, інтегральних операторів, залежні від трьох змінних x,y,β, і побудуємо з їх допомогою такий інтегральний оператор, у якому функція $f(x,y)$ та її частинні похідні за змінною y входять під знак інтеграла

$$D_{M,N}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,0}(y)\int_{-b}^{b}G_{k,0}(x,y,\beta)f(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))\,d\beta+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}h_{M,k,s}(y)\int_{-b}^{b}G_{k,s}(x,y,\beta)\int_{0}^{x+\beta(y-\gamma_k(x))}f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dtd\beta.$$

Теорема 3. *Оператори $D_{M,N}f(x,y)$ мають властивості*

$$f\in C^r(\mathbb{R}^2)\Rightarrow D_{M,N}f\in C^r(\mathbb{R}^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q D_{M,N}f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma_l(x)),$$

$$0\leqslant q\leqslant N,\qquad N\leqslant r,\qquad l=\overline{1,M},$$

якщо

$$G_{k,s}(x,y,\beta) \in C^r(\mathbb{R}^3), \qquad 0 \leqslant s \leqslant N, \qquad k = \overline{1,M},$$

$$\int\limits_{-b}^{b} G_{k,s}(x,\gamma_k(x),\beta)\beta^p d\beta = \delta_{p,s}, \qquad 0 \leqslant s, \qquad p \leqslant N, \qquad k = \overline{1,M}.$$

Функції $h_{M,k,s}(y)$ *повинні мати властивості*

$$\frac{d^p}{dy^p} h_{M,k,s}(y)|_{y=\gamma_\ell(x)} = \delta_{k,\ell}\delta_{s,p}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant M, \qquad 0 \leqslant s, \qquad p \leqslant N.$$

Приклади ядер інтегральних операторів.

Приклад 1. Нехай $b = 1$, $N \geqslant 1$. Для ядер поліноміального типу

$$G_{N,s}(\beta) = G_s(\beta) = \sum_{k=0}^{N} a_{s,k}\beta^k, \qquad s = \overline{0,N},$$

коефіцієнти $a_{s,k}$ знаходяться для кожного значення $s = \overline{0,N}$ із систем лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $(N+1)$

$$\int\limits_{-1}^{1} G_s(\beta)\beta^p d\beta = \delta_{s,p}, \qquad p = \overline{0,N}.$$

Зокрема, у випадках $N = \overline{1,2}$ маємо

$$N = 1\colon \quad G_0(\beta) = \frac{1}{2}, \qquad G_1(\beta) = \frac{3}{2}\beta,$$

$$N = 2\colon \quad G_0(\beta) = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}\beta^2, \qquad G_1(\beta) = \frac{3}{2}\beta, \qquad G_2(\beta) = -\frac{15}{8} + \frac{45}{8}\beta^2.$$

Приклад 2. Нехай $b = \infty$, $N \geqslant 1$. Для ядер вигляду

$$G_s(\beta) = e^{-\beta^2} \sum_{k=0}^{N} a_{s,k}\beta^k$$

коефіцієнти $a_{s,k}$ знаходяться для кожного значення $s = \overline{0,N}$ із систем лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $(N+1)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_s(\beta)\beta^p d\beta = \delta_{s,p}, \qquad p,s = \overline{0,N},$$

$$\sum_{k=0}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\beta^{k+p} d\beta\, a_{s,k} = \delta_{s,p}, \qquad p,s = \overline{0,N}.$$

Розв'язуючи цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_{s,k}$, $s = \overline{0,N}$, для кожного, значення $s = \overline{0,N}$, отримаємо $G_s(\beta)$. Наприклад,

$$N = 1, \qquad b = \infty, \qquad G_0(\beta) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \right)^{-1} e^{-\beta^2},$$

$$G_1(\beta) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} \beta^2 d\beta \right)^{-1} e^{-\beta^2} \beta,$$

Таким чином, наведені вище оператори інтерполяції дозволяють відновлювати наближено функції $u(x,y)$, якщо їх сліди та сліди їх похідних за змінною y відомі на системі неперетинних кривих, заданих явно відповідними рівняннями. Вони дозволяють будувати оператори інтерполяції з потрібними інтерполяційними властивостями на вказаній системі ліній шляхом заміни слідів $f^{(0,s)}(x, \gamma_k(x))$ відповідними інтерполяційними або апроксимаційними формулами.

1. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Системный анализ упругих и термоупругих неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 2012. – 512 с.
2. *Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М.* Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання. – Київ: Наук. думка, 2012. – 404 с.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1969. – 480 с.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1975. – 480 с.
5. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – Москва: Мир, 1973. – 344 с.
6. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – Москва: Наука, 1979. – 318 с.
7. *Хермандер Л.* Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – Москва: Мир, 1986. – 455 с.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966. – 724 с.
9. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – Москва: Наука, 1965. – 327 с.
10. *Квасов Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – Москва: Физматлит, 2006. – 360 с.
11. *Математическая* энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. В 5-ти т. Т. 5. – Москва: Сов. энциклопедия, 1984. – 1215 с.
12. *Литвин О. М.* Інтерполяція функцій та їх нормальних похідних на гладких лініях в $\mathbb{R}^n$ // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 7. – С. 15–19.
13. *Литвин О. М.* Точний розв'язок задачі Коші для рівняння $\prod\limits_{i=0}^{n}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_i^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = g(x,t)$ // Там само. – 1991. – № 3. – С. 12–17.
14. *Литвин О. М.* Побудова функцій n змінних із заданими нормальними похідними на $\mathbb{R}^m$ $(1 \leqslant m \leqslant n-1)$ із збереженням класу $C^r(\mathbb{R}^n)$ // Там само. – 1987. – № 5. – С. 13–17.
15. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
ДП "Івченко-Прогрес", Запоріжжя

Надійшло до редакції 12.11.2013

О. Н. Литвин, О. О. Литвин, А. В. Ткаченко, О. Л. Грицай

Эрмитовая интерлинация функций двух переменных на заданной системе непересекающихся линий с сохранением класса $C^r(\mathbb{R}^2)$

Исследуются методы построения операторов эрмитовой интерлинации восстановления дифференцируемых функций двух переменных на системе гладких непересекающихся кривых, которые сохраняют класс дифференцируемости $C^r(\mathbb{R}^2)$. Для построения указанных операторов используются следы приближаемой функции и ее частных производных по одной переменной до заданного порядка на указанной системе непересекающихся кривых.

O. M. Lytvyn, O. O. Lytvyn, O. V. Tkachenko, O. L. Gritsay

Hermitian interlineation of functions of two variables on the given system of disjoint lines with preservation of the class C^r $(\mathbb{R}^2)$

Methods for constructing the operators of a Hermitian interlineation of the recovery of differentiable functions of two variables on the system of smooth disjoint curves that preserve the class of differentiability C^r $(\mathbb{R}^2)$ are studied. To construct these operators, the traces of the interpolated function and its partial derivatives with respect to one variable to a given order on the mentioned system of curves are used.