



УДК 519.24

Академік НАН України В. С. Королюк, І. В. Самойленко

## Великі відхилення для імпульсних процесів накопичення в схемі фазового укрупнення

*Розглянуто проблему великих відхилень для імпульсного процесу накопичення в схемі фазового укрупнення. Знайдено нелінійний експоненційний генератор, що визначає розв'язок цієї проблеми за умов тотального та локального балансу.*

**1. Допоміжні означення та властивості.** Імпульсний процес накопичення (ІПН)  $S(t)$  є сумою незалежних у сукупності випадкових величин, визначених на вкладеному ланцюзі Маркова однорідного марковського процесу

$$S(t) = u + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \alpha_n(x_n^\varepsilon), \quad t \geq 0, \quad u \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Випадкові величини в (1) мають функції розподілу

$$\Phi_x(dv) = P\{\alpha_n(x) \in dv\} := P\{\alpha_n(x_n) \in dv | x_n = x\}, \quad x \in E.$$

ІПН можна розглядати як випадковий еволюційний процес (детальніше див. [1, гл. 1]). Перемикаючий марковський процес  $x^\varepsilon(t)$ ,  $t \geq 0$ , описує випадкове середовище та має нижченаведені властивості.

Однорідний за часом марковський процес  $x^\varepsilon(t)$ ,  $t \geq 0$ , визначається на стандартному фазовому просторі  $(E, \mathcal{E})$  з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^N E_k, \quad E_k \cap E_{k'} = \emptyset, \quad k \neq k'$$

у схемі серій з малим параметром серії  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - e^{-q(x)t}], \quad x \in E, \quad B \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0.$$

© В. С. Королюк, І. В. Самойленко, 2014

Також виконуються такі умови:

**МЕ1.** Ядро, що описує перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова  $x_n^\varepsilon := x^\varepsilon(\tau_n)$ ,  $n \geq 0$ , має представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

При цьому моменти відновлення

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad \tau_0 = 0,$$

де

$$P(\theta_{n+1} \geq t | x_n = x) = e^{-q(x)t} =: P(\theta_x \geq t).$$

Рахуючий процес визначається співвідношенням

$$\nu(t) := \max\{n > 0: \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Стохастичне ядро  $P(x, B)$  на розщепленому фазовому просторі визначається таким чином:

$$P(x, E_k) = \mathbf{1}_k(x) := \begin{cases} 1, & x \in E_k, \\ 0, & x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро  $P(x, B)$  визначає супроводжуючий ланцюг Маркова  $x_n$ ,  $n \geq 0$ , на відокремлених класах  $E_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Крім того, збурююче ядро  $P_1(x, B)$  задовольняє умову

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є наслідком рівності  $P^\varepsilon(x, E) = P(x, E) = 1$ .

**МЕ2.** Асоційований марковський процес  $x^0(t)$ ,  $t \geq 0$  заданий генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)],$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів  $E_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , зі стаціонарними розподілами  $\pi_k(dx)$ ,  $1 \leq k \leq N$ , які задовольняють співвідношення

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k \rho_k(dx), \quad q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)q(x).$$

**МЕ3.** Усереднені ймовірності виходу

$$\hat{p}_k := \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E \setminus E_k) > 0, \quad 1 \leq k \leq N.$$

За умов **МЕ1–МЕ3** має місце слабка збіжність [1, гл. 4]

$$v(x^\varepsilon(t/\varepsilon)) \Rightarrow \hat{x}(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad v(x) = k \in \hat{E} = \{1, \dots, N\}, \quad x \in E_k.$$

Граничний марковський процес  $\hat{x}(t)$ ,  $t \geq 0$ , на укрупненому фазовому просторі  $\hat{E} = \{1, \dots, N\}$  визначається генеруючою матрицею [1, гл. 4]

$$\hat{Q}_1 = (\hat{q}_{kr}, 1 \leq k, r \leq N).$$

**МЕ4.** Укрупнений марковський процес  $\hat{x}(t)$ ,  $t \geq 0$ , є ергодичним, зі стаціонарним розподілом  $\hat{\pi} = (\pi_k, k \in \hat{E})$ .

Таким чином, оператор  $Q^\varepsilon$  можна подати у вигляді

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1, \quad Q_1(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy) \varphi(y).$$

Нехай  $\Pi$  — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора  $Q$ . Його дія на тест-функції  $\varphi$  визначається таким чином:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \hat{\varphi}_k \mathbf{1}_k(x), \quad \hat{\varphi}_k := \int_{E_k} \pi_k(dx) \varphi(x).$$

Має місце співвідношення

$$Q\Pi = \Pi Q = 0.$$

Потенційний оператор [1, гл. 1]

$$R_0 := \Pi - (Q + \Pi)^{-1} = (\Pi - Q)^{-1} - \Pi$$

має властивість

$$QR_0 = R_0Q = \Pi - I.$$

Означимо зведений оператор  $\hat{Q}_1$  за допомогою співвідношення

$$\hat{Q}_1\Pi = \Pi Q_1\Pi.$$

Нехай  $\hat{\Pi}$  — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора  $\hat{Q}_1$ :

$$\hat{\Pi}\hat{\varphi} := \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \hat{\varphi}_k.$$

Означимо потенціальну матрицю  $\hat{R}_0 = [\hat{R}_{kl}^0; 1 \leq k, l \leq N]$  співвідношеннями

$$\hat{Q}_1\hat{R}_0 = \hat{R}_0\hat{Q}_1 = \hat{\Pi} - I.$$

**2. Великі відхилення за умови локального балансу.** Умова локального балансу означає, що середні значення стрибків ППН дорівнюють нулю:

$$b(x) = \int_{\mathbf{R}} v \Phi_x(dv) \equiv 0. \tag{2}$$

ПН у схемі фазового укрупнення розглядається з таким нормуванням:

$$S^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^3)} \alpha_n(x_n), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad u \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Марковський процес-пара

$$S^\varepsilon(t), \quad x^\varepsilon(t) := x\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right), \quad t \geq 0,$$

визначається генератором

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-3} q(x) \int_E P(x, dy) \int_{\mathbf{R}} \Phi_y(dv) [\varphi(u + \varepsilon^2 v, y) - \varphi(u, x)],$$

який можна переписати як

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-3} [Q + \varepsilon Q_1 + Q_0 \Phi_x^\varepsilon] \varphi(u, x),$$

де, за означенням,

$$Q_0 \varphi(x) := q(x) \int_E P(x, dy) \varphi(y),$$

$$\Phi_x^\varepsilon \varphi(u) := \int_{\mathbf{R}} \Phi_x(dv) [\varphi(u + \varepsilon^2 v) - \varphi(u)].$$

Ми досліджуємо великі відхилення для ПН за допомогою асимптотичного аналізу експоненційного генератора великих відхилень [2, ч. I] (див. також [3, 4])

$$\mathbf{H}^\varepsilon \varphi(u, x) = e^{-\varphi/\varepsilon} \varepsilon L^\varepsilon e^{\varphi/\varepsilon}.$$

**Теорема 1.** *Експоненційний генератор великих відхилень для ПН (3) за умов МЕ1–МЕ4 та (2) визначається співвідношенням*

$$\mathbf{H} \varphi(u) = \frac{1}{2} \widehat{C} [\varphi'(u)]^2,$$

де

$$\widehat{C} = q \widehat{B}, \quad \widehat{B} = \sum_{k=1}^N \widehat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) B(x), \quad B(x) = \int_{\mathbf{R}} v^2 \Phi_x(dv).$$

**Доведення** базується на такій лемі.

**Лема 1.** *Експоненційний генератор на збурених тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u) + \varepsilon \ln[1 + \varepsilon \varphi_1(u, x) + \varepsilon^2 \varphi_2(u, x)]$$

має асимптотичне зображення

$$\mathbf{H}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = \varepsilon^{-1} Q \varphi_1 + Q \varphi_2 + Q_1 \varphi_1 - \varphi_1 Q \varphi_1 + Q_0 \widetilde{\mathbf{B}}(x) \varphi(u) + \delta_H^\varepsilon(x) \varphi(u),$$

і знехтувальні доданки збігаються рівномірно за  $x$  на функціях  $\varphi(u) \in C^3(\mathbf{R})$ :

$$|\delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тут

$$\tilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) = \frac{1}{2}B(x)[\varphi'(u)]^2.$$

Доведення леми базується на асимптотичному аналізі доданків  $H_Q^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u, x) = e^{-\varphi/\varepsilon} \times [\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}\varepsilon Q_1]e^{\varphi/\varepsilon}$  та  $H_\Phi^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u, x) = e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon^{-2}Q_0\Phi_x^\varepsilon e^{\varphi/\varepsilon}$ .

Для завершення доведення теореми застосовується розв'язок проблеми сингулярного збурення для рівнянь.

$$Q\varphi_1(u, x) = 0,$$

$$Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + Q_0\tilde{\mathbf{B}}(x)\varphi(u) = \mathbf{H}\varphi(u).$$

З умови розв'язності для другого рівняння маємо

$$\widehat{\Pi}Q_0\tilde{\mathbf{B}}(x)\widehat{\Pi}\widehat{\varphi}(u) = \mathbf{H}\varphi(u).$$

Таким чином, рівність

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u, x) = \mathbf{H}\varphi(u) + \delta_H^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

завершує доведення теореми.

**3. Великі відхилення за умови тотального балансу.** Умова тотального балансу означає, що середні значення стрибків ІПН у кожному з класів  $E_k$  не дорівнюють 0:

$$b(x) = \int_{\mathbf{R}} v\Phi_x(dv) \neq 0,$$

натомість

$$\sum_{k=1}^N \widehat{\pi}_k \widehat{b}_k = 0, \quad \widehat{b}_k = \int_{E_k} \pi_k(dx)b(x), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (4)$$

За умови тотального балансу недостатньо нормувати час та величини стрибків процесу. Необхідно вводити нормування інтенсивності стрибків, а саме умови пуассонової апроксимації [1, гл. 7] (див. також [5]).

ІПН у схемі фазового укрупнення розглядається з нормуванням

$$S^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^4)} \alpha_n^\varepsilon(x_n). \quad (5)$$

При цьому виконуються такі умови:

**C1.** Сімейство випадкових величин  $\alpha_n^\varepsilon(x)$ ,  $n \geq 1$ ,  $x \in E$ , розглядається в схемі серій з малим параметром  $\varepsilon > 0$  та визначається функцією розподілу

$$\Phi_x^\varepsilon(z) = P\{\alpha_n^\varepsilon(x) < z\}, \quad z \in \mathbf{R}, \quad x \in E.$$

**C2.** Сімейство випадкових величин  $\alpha_n^\varepsilon(x)$ ,  $k \geq 1$ ,  $x \in E$ , рівномірно квадратично інтегровне

$$\sup_{\varepsilon > 0} \sup_{x \in E} \int_{\|z\| > c} z^2 \Phi_x^\varepsilon(dz) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Також виконуються умови пуассонової апроксимації:

**PA1.** Апроксимація середніх:

$$b_\varepsilon(x) = \mathbf{E}\alpha_n^\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}} z \Phi_x^\varepsilon(dz) = \varepsilon[b(x) + \theta_b^\varepsilon(x)]$$

та

$$c_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}} z^2 \Phi_x^\varepsilon(dz) = \varepsilon[c(x) + \theta_c^\varepsilon(x)].$$

**PA2.** Пуассонова апроксимація ядра інтенсивності

$$\int_{\mathbf{R}} g(z) \Phi_x^\varepsilon(dz) = \varepsilon[\Phi_g(x) + \theta_g^\varepsilon(x)]$$

для всіх  $g \in C_3(\mathbf{R})$  та ядро

$$\Phi_g(x) := \int_{\mathbf{R}} g(z) \Phi_x(dz)$$

обмежене для всіх  $g \in C_3(\mathbf{R})$ , тобто

$$\sup_{x \in E} |\Phi_g(x)| \leq \Phi_g < \infty.$$

Члени, якими можна знехтувати —  $\theta_b^\varepsilon$ ,  $\theta_c^\varepsilon$ ,  $\theta_g^\varepsilon$ , задовольняють умови

$$\sup_{x \in E} |\theta^\varepsilon(x)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Генератор випадкової еволюції має вигляд

$$L_T^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-4}[Q + \varepsilon Q_1 + Q_0 \Phi_x^\varepsilon] \varphi(u, x),$$

де, за означенням,

$$\Phi_x^\varepsilon \varphi(u) := \int_{\mathbf{R}} \Phi_x^\varepsilon(dv) [\varphi(u + \varepsilon^2 v) - \varphi(u)].$$

**Теорема 2.** Експоненційний генератор великих відхилень для ППН (5) за умов ME1–ME4, C1, C2, PA1, PA2 та умови тотального балансу (4) має вигляд

$$\mathbf{H}\varphi(u) = \frac{1}{2}\widehat{B}_T[\varphi'(u)]^2, \quad \widehat{B}_T = \widehat{C} + \widehat{B}.$$

Тут

$$\widehat{C} := \sum_{k=1}^N \widehat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) c(x), \quad c(x) = \int_{\mathbf{R}} v^2 \Phi_x(dv),$$

$$\widehat{B} := \widehat{\Pi} \widehat{b}(\widehat{x}) \widehat{R}_0 \widehat{b}(\widehat{x}) \widehat{\Pi} = \sum_{k,l=1}^N \widehat{\pi}_k \widehat{b}_k \widehat{R}_{kl}^0 \widehat{b}_l.$$

Доведення базується на нижченаведеній лемі.

**Лема 2.** Експоненційний генератор на збурених тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u) + \varepsilon \ln[1 + \varepsilon \varphi_1(u, x) + \varepsilon^2 \varphi_2(u, x) + \varepsilon^3 \varphi_3(u, x)]$$

має таке асимптотичне зображення

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) &= \varepsilon^{-2} Q \varphi_1 + \varepsilon^{-1} [Q \varphi_2 + Q_1 \varphi_1 - \varphi_1 Q \varphi_1 + B(x) \varphi(u)] + \\ &+ [Q \varphi_3 + Q_1 \varphi_2 - \varphi_1 Q \varphi_2 - \varphi_2 Q \varphi_1 - \varphi_1 Q_1 \varphi_1 + C(x) \varphi(u)] + \delta^\varepsilon(x) \varphi(u) \end{aligned}$$

і знехтувальний доданок збігається рівномірно за  $x$  на функціях  $\varphi(u) \in C^3(\mathbf{R})$ :

$$|\delta^\varepsilon(x) \varphi(u)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Оператори

$$\begin{aligned} B(x) \varphi(u) &:= b_0(x) \varphi'(u), \quad C(x) \varphi(u) := \frac{1}{2} c_0(x) [\varphi'(u)]^2, \\ b_0(x) &:= q(x) \int_E P(x, dy) b(y), \quad c_0(x) := q(x) \int_E P(x, dy) c(y). \end{aligned}$$

Доведення лемі проводиться за допомогою асимптотичного аналізу доданків  $H_Q^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = e^{-\varphi/\varepsilon} [\varepsilon^{-3} Q + \varepsilon^{-2} \varepsilon Q_1] e^{\varphi/\varepsilon}$  та  $H_\Phi^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = e^{-\varphi/\varepsilon} \varepsilon^{-3} Q_0 \Phi_x^\varepsilon e^{\varphi/\varepsilon}$ .

Щоб завершити доведення теореми необхідно розв'язати проблему сингулярного збурення для такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} Q \varphi_1 &= 0, \\ Q \varphi_2 + Q_1 \varphi_1 + B(x) \varphi'(u) &= 0, \\ Q \varphi_3 + Q_1 \varphi_2 - \varphi_1 Q \varphi_2 - \varphi_1 Q_1 \varphi_1 + C(x) \varphi(u) &= \mathbf{H} \varphi(u). \end{aligned}$$

З умов розв'язності для цих рівнянь маємо

$$\widehat{Q}_1 \widehat{\varphi}_2 - \widehat{\varphi}_1 \widehat{Q} \widehat{\varphi}_2 - \widehat{\varphi}_1 \widehat{Q}_1 \widehat{\varphi}_1 + \widehat{C}(x) \widehat{\varphi}(u) = \mathbf{H} \varphi(u),$$

$$\widehat{Q}\widehat{\varphi}_2 = -[\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_1 + \widehat{B}(\widehat{x})\varphi'(u)] = 0,$$

а отже, отримуємо

$$\widehat{Q}_1\widehat{\varphi}_2 + \widehat{B}_T(x)\widehat{\varphi}(u) = \mathbf{H}\varphi(u).$$

Застосування умови розв'язності для останнього рівняння завершує доведення теореми.

1. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Hackensack, N. J.; World Scientific, 2005. – 331 p.
2. *Feng J., Kurtz T. G.* Large deviation for stochastic processes. – Providence, RI: AMS, 2006. – 410 p. – (Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 131).
3. *Koroliuk V. S.* Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals // *J. Math. Sci.* – 2011. – **179**, No 2. – P. 273–289.
4. *Koroliuk V. S.* Large deviation problems for Markov random evolution with independent increments in the scheme of asymptotically small diffusion // *Commun. Statist. Theory and Methods.* – 2011. – **40**, Is. 19–20. – P. 3385–3395.
5. *Самойленко І. В.* Збіжність імпульсного процесу накопичення зі стрибковими перемиканнями // *Укр. мат. журн.* – 2008. – № 9. – С. 1282–1286.

*Інститут математики НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 24.12.2013*

Академик НАН України **В. С. Королюк, І. В. Самойленко**

### **Большие уклонения для импульсных процессов накопления в схеме фазового укрупнения**

*Рассмотрена проблема больших уклонений для импульсного процесса накопления в схеме фазового укрупнения. Найден нелинейный экспоненциальный генератор, определяющий решение этой проблемы в условиях тотального и локального баланса.*

Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Koroliuk, I. V. Samoilenko**

### **Large deviations for impulsive processes of accumulation in a phase merging scheme**

*We study the large deviation problem for an impulsive process of accumulation in a phase merging scheme. A nonlinear exponential generator that solves this problem is found under the total and local balance conditions.*