УДК 519.852:519.876

В. І. Кудін

Метод псевдобазисних матриць

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Запропоновано метод аналізу та оптимізації лінійної системи — метод псевдобазисних матриць (МПБМ). Метод (зокрема, розв'язання задачі лінійного програмування), ґрунтується на концепції псевдобазисних матриць. Наведено всі необхідні теоретичні обґрунтування для побудови алгоритмічних схем. Зокрема, встановлено умови єдиності та неєдиності оптимальних розв'язків. Метод може застосовуватися при аналізі та розв'язанні задач великої розмірності, ідентифікації пасивних обмежень моделі в ході ітераційного процесу.

Положення теорії двоїстості Дж. Неймана [1] для лінійних систем (задач лінійного програмування) знайшла підтвердження у симплекс-методах (метод покращення плану, метод уточнення оцінок тощо), що були розроблені [1–5] як для прямої (канонічної), так і для двоїстої задачі. Для подальших застосувань, крім "здатності" методу знаходити оптимальні розв'язки, стало важливим проводити аналіз властивостей лінійної системи на різних стадіях обчислень.

У даній роботі розглядається метод псевдобазисних матриць (МПБМ) для проведення аналізу лінійних систем, зокрема, двоїстої задачі лінійного програмування великої розмірності на стадіях дооптимізації та оптимізації. Встановлено умови оптимальності, нерозв'язності за несумісністю моделі, формули зв'язку елементів алгоритмічних схем у суміжних псевдобазисних матрицях, пасивності обмежень.

Положення методу псевдобазисних матриць. В основу побудови методу закладено ідею псевдобазисної матриці та псевдорозв'язку. При переході до наступного псевдорозв'язку (загалом недопустимого) вводяться в псевдобазисну матрицю і виводяться з неї на ітераціях вектори нормалі обмежень.

Як базова модель лінійного програмування розглядається модель вигляду

$$\max Bu, \tag{1}$$

$$Au \leqslant C, \tag{2}$$

$$d_H \leqslant u \leqslant d_B, \tag{3}$$

де $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$; $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$; $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$; $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm})$, $j = \overline{1, n}$ — рядки матриці A^T; $d_H = (d_{1(H)}, d_{2(H)}, \ldots, d_{m(H)})^T$; $d_B = (d_{1(B)}, d_{2(B)}, \ldots, d_{m(B)})^T$ — m-вимірні вектори; T — знак транспонування. Будемо вважати, що $n > m$, а множина допустимих розв'язків (2) обмежена, замкнена. Модель (1)–(3) досліджується в евклідовому просторі E^m. Відкинемо частину обмежень (2), залишимо лише m із них, які утворять квадратну матрицю $A_б$, тобто розглянемо модель вигляду

$$\max_u \{Bu / A_б u \leqslant C^0\},$$

де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})^T \subset C$ — підвектор C, утворений компонентами обмежень, що входять у $A_б$ відповідно; $J_б = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ — множина індексів таких обмежень. Припустимо, що матриця $A_б$ невироджена, а задача має обмежений розв'язок u_0. Розв'язок u_0 може бути недопустимим для релаксованих (відкинутих) обмежень, причому $U \subseteq U_R$, де U_R — релаксована (розширена) множина обмежень (2), утворена відкиданням деяких обмежень.

Означення 1. Підматрицю $A_б$, складену із m лінійно незалежних нормалей обмежень (2), називатимемо псевдобазисною, а розв'язок u_0 — псевдобазисним, якщо $\alpha_{0i} \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$. Псевдобазисний розв'язок u_0 будемо вважати невиродженим, якщо $\neg\exists\, u'_0 \neq u_0$, $Bu_0 = Bu'_0$, де $Bu = Bu_0$ — гіперплощина рівня значення цільової функції в u_0.

Нехай e_{ri} — елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0m})^T$ — псевдобазисний розв'язок; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rm})$ — вектор розкладення нормалі обмеження $a_r u \leqslant c_r$ за рядками севдобазисної матриці $A_б$, тобто $a_r = \alpha_r A_б$; $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0m})$ — вектор розкладення вектора-градієнта цільової функції (1) за рядками псевдобазисної матриці $A_б$, який визначається, як розв'язок системи рівнянь $B = \alpha_0 A_б$; $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ — нев'язка r-го обмеження (1) у вершині u_0; $J_б$, $J_H \Big(J = J_б \bigcup J_H\Big)$ — множини індексів відповідно базисних і небазисних обмежень (2). Введені величини (елементи методу) в новій псевдобазисній матриці $\overline{A}_б$, яка утворюється заміною рядка a_k на a_l, що не входить у псевдобазисну матрицю $A_б$, будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\beta}_j$, $\overline{\alpha}_r$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $\overline{\alpha}_0$.

Означення 2. Дві псевдобазисні матриці, в яких відмінний один, наприклад, k-й рядок, називатимемо суміжними.

Теорема 1. *Між елементами методу в двох суміжних псевдобазисних матрицях мають місце такі співвідношення:*

$$\overline{a}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \qquad r = \overline{0,n}; \qquad i = \overline{1,m}; \qquad i \neq k; \tag{4}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \qquad r = \overline{1,m}; \qquad i = \overline{1,m}; \qquad i \neq k; \tag{5}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \qquad j = \overline{1,m}; \tag{6}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \qquad r = \overline{1,n}; \qquad r \neq k; \tag{7}$$

$$B\overline{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{8}$$

причому умовами псевдобазисності матриці при вводі вектора нормалі a_l k-м рядком псевдобазисної матриці A є виконання $\alpha_{lk} \neq 0$; псевдобазисності розв'язків є $\alpha_{lk} > 0$, спадання цільової функції в новій псевдобазисній матриці при задачі на максимум є $\Delta_l > 0$.

Доведення теореми розглянуто в [3].

Означення 3. Допустимий псевдобазисний розв'язок u_0 є оптимальним, якщо $B\overline{u}_0 - Bu \geqslant 0$ для всіх u, що задовольняють (2).

Теорема 2. *Допустимість псевдобазисного розв'язку u_0, тобто виконання $\Delta_r \leqslant 0$, $r \in J$, є необхідною і достатньою умовою його оптимальності, при цьому $\alpha_{0i} \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$.*

Наслідок 1. *Якщо $\alpha_{0k} \geqslant 0$, $k = \overline{1,m}$, то псевдобазисний розв'язок u_0 є оптимальним при $\Delta_r \leqslant 0$, $r \in J$. Проміжні неоптимальні розв'язки є верхніми оцінками за значеннями цільової функції.*

Наслідок 2. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *необхідно і достатньо, щоб для вектора розкладення нормалі B за рядками $A_б$ виконувалось $\alpha_{0k} \geqslant 0$, $k = \overline{1, m}$.*

Наслідок 3. *Умовою неєдиності розв'язків задачі* (1), (2) *є $\exists$ індексів i $i \in I$ (серед коефіцієнтів розкладу вектора нормалі B) таких, що $\alpha_{0i} = 0$.*

Наслідок 4. *Неєдині розв'язки задачі* (1), (2) *утворюють необмежену замкнену множину при $\exists$ i, що $\alpha_{0i} = 0$ і при цьому $\alpha_{ki} > 0$, для $k \notin J_б$.*

Наслідок 5. *Якщо існує індекс k такий, що $\alpha_{0k} < 0$ і $\alpha_{rk} \geqslant 0$, $r \in J_H$, то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.*

Нехай $U = \{u/a_j u \leqslant c_j, j \in J\}$, $U_r = \{u/a_j u \leqslant c_j, j \in J, J \neq r\}$, $U^0 = \{u_0/Bu_0 = \max_{u \in U} Bu, u \in U\}$, $U_r^0 = \{u_0/Bu_0 = \max_{u \in U_r} Bu, u \in U_r\}$.

Означення 4. Обмеження $a_r u \leqslant c_r$ пасивне, якщо $U = U_r$.

Означення 5. Обмеження $a_r u \leqslant c_r$ є породжуючим нерозв'язність за несумісністю U, якщо $U = \varnothing$, $U_r \neq \varnothing$.

Теорема 3. *Для того щоб обмеження $a_r u \leqslant c_r$ було пасивним, необхідно і достатньо існування псевдобазисної матриці $A_б$, відносно якої $\alpha_{rk} \geqslant 0$, $k = \overline{1, m}$, та $\Delta_r = a_r u_0 - c_r \leqslant 0$, де u_0 — псевдобазисний розв'язок.*

Теорема 4. *Для того щоб $B\overline{u}_0 > Bu_0$, а розв'язок $\overline{u}_0$ був псевдобазисним для задачі* (1), (2), *необхідно і достатньо існування такого номера l та відповідного номера k, для яких виконується нерівність $\alpha_{0i}/\alpha_{li} \geqslant \alpha_{0k}/\alpha_{lk}$, $i \neq k$, $\alpha_{li} > 0$, $\Delta_l > 0$.*

Теорема 5. *Для того щоб обмеження $a_r u \leqslant c_r$ було породжуючим нерозв'язність за несумістністю, необхідно і достатньо існування псевдобазисної матриці $A_б$, відносно якої $\alpha_{ri} \leqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, та $\Delta_r = a_r u_0 - c_r > 0$, де u_0 — псевдобазисний розв'язок.*

Доведення теорем 2–5 дано в [4].

Наведені теореми охоплюють всі можливі випадки для "організації роботи" МПБМ.

Встановлено існування регуляризуючого збурення за схемою МПБМ з властивістю невиродженості псевдобазисних розв'язків задачі (1), (2), тобто побудовано ε-задачу

$$\max_u B(\varepsilon)u, \tag{9}$$

$$a_j u \leqslant c_j, \tag{10}$$

$$u \geqslant 0, \qquad \varepsilon \geqslant 0, \qquad j \in J, \tag{11}$$

для якої справедливі такі теореми.

Теорема 6. *Існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що ε-задача при $o < \varepsilon < \varepsilon_1$ буде невиродженою.*

Теорема 7. *Існує таке $\varepsilon_2 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ оптимальний псевдобазисний розв'язок ε-задачі буде оптимальним для задачі* (1), (2).

Доведення теорем 6–7 наведено в [4].

Схема релаксаційного методу оптимізаційного аналізу лінійної системи може бути представлена алгоритмом.

Алгоритм.

Крок 1. На основі псевдобазисного розв'язку u_0 та псевдобазисної матриці $A_б$ формуємо $J_б$, $J_H \subset J$ — множини базисних та небазисних обмежень, $J = J_б \bigcup J_H$.

Крок 2. На основі u_0 утворимо множину J_R, а саме $J_R = J_б \bigcup J_H^+$, де $J_H^+ = \{j/j \in J_H, \Delta_j > 0\}$ (схема допускає введення допоміжного обмеження на потужність елементів множини J_H^+).

Крок 3. Формуємо підзадачу

$$\max Bu, \tag{12}$$

$$a_j u \leqslant c_j, \qquad j \in J_R. \tag{13}$$

Крок 4. Знаходимо розв'язок $\bar{u}_0$ задачі (12), (13) МПБМ.

Крок 5. Якщо множина $J_H^+ \neq \varnothing$ відносно $\bar{u}_0$, то $u_0 = \bar{u}_0$ і переходимо на **Крок 2**, в протилежному — на **Крок 6.**

Крок 6. Якщо $J_H^+ = \varnothing$, то це означає оптимальність $\bar{u}_0$ для (2).

Завершення роботи алгоритму.

Таким чином, за побудовою релаксаційна схема коректно вписується в МПБМ, що дає змогу замінити дослідження початкової, можливо, великорозмірної задачі послідовністю взаємозв'язаних задач меншої розмірності, а в ході ітераційного процесу ідентифікувати пасивні обмеження системи.

1. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. – В 2-х т. Т. 1 – Москва: Мир, 1991. – 380 с.
2. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. – Москва: Наука, 1968. – 488 с.
3. *Кудин В. И., Ляшко С. И., Хритоненко Н. М., Яценко Ю. П.* Анализ свойств линейной системы методом искусственных базисных матриц // Кибернетика и системн. анализ. – 2007. – № 4. – С. 119–127.
4. *Волкович В. Л., Войналович В. М., Кудин В. И.* Релаксационная схема двоистого строчного симплекс метода // Автоматика. – 1987. – № 4. – С. 79–86.
5. *Кудін В. І., Ляшко С. І., Хритоненко Н. М., Яценко Ю. П.* Метод штучних базисних матриць // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 29–33.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 09.01.2014

В. И. Кудин

Метод псевдобазисных матриц

Предложен метод анализа и оптимизации линейной системы — метод псевдобазисных матриц (МПБМ). Метод (в частности, решения задачи линейного программирования) основывается на концепции псевдобазисных матриц. Приведены все необходимые теоретические обоснования для построения алгоритмических схем. Установлены условия единственности и неединственности оптимальных решений. Метод может применяться при анализе и решении задач большой размерности, идентификации пассивных ограничений модели в ходе итерационного процесса.

V. I. Kudin

A method of pseudobasis matrices

A method of analysis and optimization of linear systems (in particular, of solution of linear programming problems) is proposed. It is based on the conception of pseudobasis matrices. The necessary theoretical substantiation of the construction of algorithmic schemes is given. The conditions of uniqueness (nonuniqueness) of optimum solutions are found. The method can be applied to problems of large dimensions and to the identification of passive constraints of a model in the course of the iteration process.