

Член-корреспондент НАН Украины Ю. Г. Стоян, А. В. Панкратов,  
Т. Е. Романова, Н. И. Чернов

## Квази- $\rho$ -функции для математического моделирования отношений геометрических объектов

*Рассматриваются классы специальных функций (квази- $\rho$ -функции, нормализованные квази- $\rho$ -функции, псевдонормализованные квази- $\rho$ -функции), предназначенные для аналитического описания отношений непересечения пары неориентированных геометрических объектов и ограничений на допустимые расстояния. Приводятся основные свойства квази- $\rho$ -функций, сформулированные в виде теорем. Строятся квази- $\rho$ -функции для некоторых видов неориентированных 2D- и 3D-объектов.*

В задачах оптимального раскроя и упаковки [1] наиболее эффективным средством математического моделирования отношений геометрических объектов является метод  $\rho$ -функций [2–7]. В данной работе рассматривается новый класс функций — квази- $\rho$ -функций, который является развитием метода  $\rho$ -функций. Квази- $\rho$ -функции позволяют значительно упростить аналитическое описание ограничений на непересечение, минимально и максимально допустимые расстояния с учетом непрерывных вращений объектов, а также расширить класс объектов, для которых эти ограничения можно представить в виде систем неравенств [5].

Пусть  $A \subset R^t$  и  $B \subset R^t$  — замкнутые  $\rho$ -объекты,  $t = 2, 3$  [1]. Полагаем, что, по крайней мере, один из объектов — ограниченный. Размеры объектов могут изменяться с точностью до коэффициента гомотетии  $\lambda_A, \lambda_B > 0$  соответственно. Местоположение объекта  $A$  определяется вектором переменных параметров размещения  $(v_A, \theta_A)$ , где  $v_A = (x_A, y_A, z_A)$  — вектор трансляции;  $\theta_A = (\theta_z, \theta_x, \theta_y)$  — углы поворота: от оси  $OX$  к  $OY$ , от оси  $OY$  к  $OZ$  и от оси  $OX$  к  $OZ$ . Обозначим  $u_A = (v_A, \theta_A, \lambda_A)$  вектор переменных объекта  $A$  и  $u_B = (v_B, \theta_B, \lambda_B)$  — вектор переменных объекта  $B$ . В дальнейшем объект  $A(B)$ , повернутый последовательно на углы  $\theta_z, \theta_x, \theta_y$ , транслированный на вектор  $v$  и умноженный на коэффициент гомотетии  $\lambda$ , обозначается  $A(u_A)$  ( $B(u_B)$ ).

**Определение 1.** Квази- $\rho$ -функцией для  $\rho$ -объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$  называется всюду определенная, непрерывная функция  $\Phi^{AB}(u_A, u_B, u')$ , для которой при фиксированных  $\lambda_A = \lambda_A^0$  и  $\lambda_B = \lambda_B^0$  функция  $\max_{u' \in U} \Phi^{AB}(u_A, u_B, u')$  является  $\rho$ -функцией для  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ , где вид множества  $U \subset R^n$  и размерность пространства  $R^n$  зависят от формы размещаемых объектов.

Пусть  $\Phi^{AB}(u_A, u_B, u')$  — квази- $\rho$ -функция для  $\rho$ -объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ .

**Теорема 1.** Если  $\Phi^{AB}(u_A, u_B, u') \geq 0$ , то  $\text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset$ .

Далее полагаем, что  $A$  и  $B$  — выпуклые объекты, а  $\lambda_A$  и  $\lambda_B$  являются переменными на множестве  $(0, +\infty)$ .

Пусть  $P(u_P) = \{(x, y, z) : \psi_P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \mu_P \leq 0\}$ , где  $u_P = (\theta_{xP}, \theta_{yP}, \mu_P)$ ,  $\alpha = \sin \theta_{yP}$ ,  $\beta = -\sin \theta_{xP} \cos \theta_{yP}$ ,  $\gamma = \cos \theta_{xP} \cos \theta_{yP}$ ;  $\Phi^{AP}(u_A, u_P)$  —  $\rho$ -функция для  $A(u_A)$  и  $P(u_P)$ ,

$\Phi^{BP^*}(u_B, u_P)$  – phi-функция для  $B(u_B)$  и  $P^*(u_P) = R^t \setminus \text{int } P(u_P)$ ,  $t = 2, 3$ . Заметим, что  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

Если  $A, B \subset R^2$ , то  $P(u_P) = \{(x, y): \psi_P = \alpha x + \beta y + \mu_P \leq 0\}$ , где  $u_P = (\theta_P, \mu_P)$   $\alpha = \cos \theta_P$ ,  $\beta = \sin \theta_P$ .

**Теорема 2.** Функция вида

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\Phi'^{AP}(u_A, u_P), \Phi'^{BP^*}(u_B, u_P)\} \quad (1)$$

является квази-phi-функцией для ограниченных объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ . Здесь  $u' = u_P$ .

**Следствие 1.** Если  $\Phi'^{AP}(u_A, u_P, u'_1)$  – квази-phi-функция для  $A(u_A)$  и  $P(u_P)$ ,  $\Phi'^{BP^*}(u_B, u_P, u'_2)$  – квази-phi-функция для  $B(u_B)$  и  $P^*(u_P)$ , то функция вида

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') = \min\{\Phi'^{AP}(u_A, u_P, u'_1), \Phi'^{BP^*}(u_B, u_P, u'_2)\} \quad (2)$$

является квази-phi-функцией для ограниченных объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ . Здесь  $u' = (u_P, u'_1, u'_2)$ .

Понятие квази-phi-функции может быть использовано также для моделирования ограничений на допустимые расстояния между объектами. С этой целью введем определения нормализованной и псевдонормализованной квази-phi-функции, основываясь на аналогичных терминах для phi-функций [3].

Пусть  $\text{dist}(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} d(a, b)$ ,  $d(a, b)$  – евклидово расстояние между точками  $a$  и  $b$ ,  $a, b \in R^t$ ,  $t = 2, 3$ . Обозначим  $\rho^- > 0$ ,  $\rho^+ > 0$  – заданные минимально и максимально допустимые расстояния между объектами  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ .

**Определение 2.** Квази-phi-функция  $\tilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$  называется нормализованной для объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ , если функция  $\max_{u' \in U} \tilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$  является нормализованной phi-функцией.

Таким образом,  $\rho^- \leq \max_{u' \in U} \tilde{\Phi}'^{AB} \leq \rho^+ \Leftrightarrow \rho^- \leq \text{dist}(A, B) \leq \rho^+$ .

**Определение 3.** Функция  $\widehat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B, u')$  называется псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ , если функция  $\max_{u' \in U} \widehat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B, u')$  является псевдонормализованной phi-функцией.

Аналогично понятиям псевдонормализованных phi-функций [3] будем различать псевдонормализованные квази-phi-функции  $\widehat{\Phi}_-^{AB}$  для моделирования ограничений  $\text{dist}(A, B) \geq \rho^-$  и псевдонормализованные квази-phi-функции  $\widehat{\Phi}_+^{AB}$  для моделирования ограничений  $\text{dist}(A, B) \leq \rho^+$ .

Тогда  $\max_{u' \in U} \widehat{\Phi}_-^{AB} \geq 0 \Leftrightarrow \text{dist}(A, B) \geq \rho^-$ ,  $\max_{u' \in U} \widehat{\Phi}_+^{AB} \geq 0 \Leftrightarrow \text{dist}(A, B) \leq \rho^+$ . Пусть квази-phi-функция имеет вид

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\tilde{\Phi}'^{AP}(u_A, u_P), \tilde{\Phi}'^{BP^*}(u_B, u_P)\}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\Phi}'^{AP}(u_A, u_P)$ ,  $\tilde{\Phi}'^{BP^*}(u_B, u_P)$  – нормализованные phi-функции.

Тогда квази-phi-функция

$$\tilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = 2\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P)$$

является нормализованной квази- $\rho$ -функцией, а квази- $\rho$ -функция

$$\widehat{\Phi}_-^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \Phi^{AB}(u_A, u_B, u_P) - 0,5\rho^-$$

является псевдонормализованной квази- $\rho$ -функцией.

В работе [4] приведен полный класс  $\rho$ -функций для неориентированных базовых 2D-объектов, ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых. Для неориентированных 3D-объектов построены  $\rho$ -функции для прямых прямоугольных параллелепипедов, выпуклых многогранников и шаров в работах [6, 7].

В данной работе, основываясь на формулах (1)–(3), в качестве примеров строятся квази- $\rho$ -функции для некоторых видов неориентированных 2D- и 3D-объектов.

**Квази- $\rho$ -функция для выпуклых многогранников.** Пусть  $K_1(u_1)$  и  $K_2(u_2)$  — выпуклые многогранники, заданные вершинами  $\lambda_1 p_i^1, i = 1, \dots, m_1$ , и  $\lambda_2 p_i^2, i = 1, \dots, m_2$ ,  $\Phi^{K_1 P}(u_1, u_P) = \min_{1 \leq i \leq m_1} \psi_P(\lambda_1 p_i^1)$  —  $\rho$ -функция для объектов  $K_1$  и  $P$ ,  $\Phi^{K_2 P^*}(u_2, u_P) = \min_{1 \leq i \leq m_2} (-\psi_P(\lambda_2 p_i^2))$  —  $\rho$ -функция для объектов  $K_2$  и  $P^*$ . Тогда функция

$$\Phi^{K_1 K_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{K_1 P}(u_1, u_P), \Phi^{K_2 P^*}(u_2, u_P)\} \quad (4)$$

является квази- $\rho$ -функцией для  $K_1(u_1)$  и  $K_2(u_2)$ .

Отметим, что функция  $2\Phi^{K_1 K_2}(u_1, u_2, u_P)$  является нормализованной квази- $\rho$ -функцией.

*Псевдонормализованная квази- $\rho$ -функция для выпуклых многогранников  $K_1(u_1)$  и  $K_2(u_2)$  имеет вид*

$$\widehat{\Phi}_-^{K_1 K_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{K_1 P}(u_1, u_P), \Phi^{K_2 P^*}(u_2, u_P)\} - 0,5\rho^- \quad (5)$$

**Квази- $\rho$ -функция для выпуклого многогранника  $K(u_1)$  и шара  $C(u_2)$ .** Пусть  $K(u_1)$  — выпуклый многогранник, заданный вершинами  $\lambda_1 p_i, i = 1, \dots, m$ ;  $p_C$  и  $\lambda_2 r_C$  — центр и радиус шара  $C(u_2)$ ;  $\Phi^{KP}(u_1, u_P) = \min_{1 \leq i \leq m} \psi_P(\lambda_1 p_i)$  —  $\rho$ -функция для объектов  $K$  и  $P$ ,  $\Phi^{CP^*}(u_2, u_P) = -\psi_P(p_C) - \lambda_2 r_C$  —  $\rho$ -функция для объектов  $C$  и  $P^*$ .

Тогда квази- $\rho$ -функция для  $K(u_1)$   $C(u_2)$  может быть определена так:

$$\Phi^{CK}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{KP}(u_1, u_P), \Phi^{CP^*}(u_2, u_P)\} \quad (6)$$

Отметим, что функция  $2\Phi^{CK}(u_1, u_2, u_P)$  является нормализованной квази- $\rho$ -функцией.

*Замечание.* Квази- $\rho$ -функции вида (4)–(6) могут быть использованы для выпуклых многоугольников и кругов непосредственно.

**Квази- $\rho$ -функция для круговых сегментов  $D_1(u_1)$  и  $D_2(u_2)$ .** Пусть  $D_1(u_1) = T_1(u_1) \cap C_1(u_1)$ ,  $D_2(u_2) = T_2(u_2) \cap C_2(u_2)$ ,  $T_1(u_1)$  и  $T_2(u_2)$  — треугольники, заданные вершинами  $\lambda_1 p_i^1$ , и  $\lambda_2 p_i^2, i = 1, 2, 3$ ,  $p_C^1, p_C^2$  и  $\lambda_1 r_C^1, \lambda_2 r_C^2$  — центры и радиусы кругов  $C_1(u_1)$  и  $C_2(u_2)$  соответственно.

Тогда, следуя (1), квази- $\rho$ -функция для  $D_1(u_1)$  и  $D_2(u_2)$  может быть определена так:

$$\begin{aligned} \Phi^{D_1 D_2}(u_1, u_2, u_P) &= \min\{\Phi^{D_1 P}(u_1, u_P), \Phi^{D_2 P^*}(u_2, u_P)\}, \\ \Phi^{D_1 P}(u_1, u_P) &= \max\{\Phi^{T_1 P}, \Phi^{C_1 P}\}, \quad \Phi^{D_2 P^*}(u_2, u_P) = \max\{\Phi^{T_2 P^*}, \Phi^{C_2 P^*}\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi^{T_1P}(u_1, u_P) &= \min_{i=1,2,3} \psi_P(\lambda_1 p_i^1), & \Phi^{C_1P}(u_1, u_P) &= \psi_P(p_C^1) - \lambda_1 r_C^1, \\ \Phi^{C_2P^*}(u_2, u_P) &= -\psi_P(p_C^2) - \lambda_2 r_C^2, & \Phi^{T_2P^*}(u_2, u_P) &= \min_{i=1,2,3} (-\psi_P(\lambda_2 p_i^2)).\end{aligned}$$

Построим квази- $\rho$ -функцию для  $D_1(u_1)$  и  $D_2(u_2)$ , используя формулу (2), в виде

$$\Phi'^{D_1D_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\Phi'^{D_1P}(u_1, u_P, u'_1), \Phi'^{D_2P^*}(u_2, u_P, u'_2)\},$$

где  $u' = (u_P, u'_1, u'_2)$ ,  $u'_1 \in [0, 1] \subset R^1$ ,  $u'_2 \in [0, 1] \subset R^1$ .

С этой целью определим квази- $\rho$ -функции  $\Phi'^{D_1P}(u_1, u_P, u'_1)$  и  $\Phi'^{D_2P^*}(u_2, u_P, u'_2)$ .

Пусть  $\Phi^{C_1P}(u_1, u_P)$  —  $\rho$ -функция  $C_1(u_1)$  и  $P(u_P)$ , а

$$\Phi'^{D_1P}(u_1, u_P, u'_1) = \min\{\psi_P(\lambda_1 p_1^1), \psi_P(\lambda_1 p_2^1), \chi_1(u_1, u_P, u'_1)\},$$

$$\chi_1(u_1, u_P, u'_1) = \psi_P(\lambda_1 p_3^1) - u'_1 \psi_P(\lambda_1 p_3^1) + u'_1 \Phi^{C_1P}(u_1, u_P),$$

где  $u'_1 \in [0, 1] \subset R^1$ ,  $\lambda_1 p_i^1$ ,  $i = 1, 2$ , — вершины основания объекта  $D_1(u_1)$ .

По аналогии, имеем

$$\Phi'^{D_2P^*}(u_2, u_P, u'_2) = \min\{-\psi_P(\lambda_2 p_1^2), -\psi_P(\lambda_2 p_2^2), \chi_2(u_2, u_P, u'_2)\},$$

$$\chi_2(u_2, u_P, u'_2) = -\psi_P(\lambda_2 p_3^2) - u'_2(-\psi_P(\lambda_2 p_3^2)) + u'_2 \Phi^{C_2P^*}(u_2, u_P),$$

где  $u'_2 \in [0, 1] \subset R^1$ ,  $\lambda_2 p_i^2$ ,  $i = 1, 2$ , — вершины основания объекта  $D_2(u_2)$ .

*Замечание.* Квази- $\rho$ -функция вида (7) может быть использована для шаровых сегментов, если рассматривать: в качестве  $T_1(u_1)$  и  $T_2(u_2)$  — прямые круговые конусы,  $C_1(u_1)$  и  $C_2(u_2)$  — шары, а в качестве  $\Phi^{T_1P}$  ( $\Phi^{T_2P^*}$ ) —  $\rho$ -функции для конуса и полупространства.

**Квази- $\rho$ -функция для эллипсов  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$ .** Пусть  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$  — эллипсы, заданные большой и малой полуосями  $\lambda_i a_i$  и  $\lambda_i b_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда квази- $\rho$ -функция для  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$  может быть задана в виде

$$\Phi'^{E_1E_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\chi(\theta_1, \theta_2, u'), \chi_1(u_1, u_2, u'), \chi_2(u_1, u_2, u')\},$$

где  $u' = (t_1, t_2)$ ,  $0 \leq t_i \leq 2\pi$ ,  $\chi = -(N'_1, N'_2)$ ,  $N'_i = (\alpha'_i, \beta'_i)$ ,  $\alpha'_i = \alpha_i \cos \theta_i + \beta_i \sin \theta_i$ ,  $\beta'_i = -\alpha_i \sin \theta_i + \beta_i \cos \theta_i$ ,  $\alpha_i = (\cos t_i)/(\lambda_i a_i)$ ,  $\beta_i = (\sin t_i)/(\lambda_i b_i)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\chi_j = \alpha'_1 x_{q_{2j}} + \beta'_1 y_{q_{2j}} - 1$ ,  $q_{2j} = (x_{q_{2j}}, y_{q_{2j}}) = v_2 + V'_2 + \eta n'_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $V'_2 = M(\theta_2)V_2$  (здесь  $M(\theta_2)$  — матрица поворота,  $V_2 = (\lambda_2 a_2 \cos t_2, \lambda_2 b_2 \sin t_2)$ ,  $N'_1 = (-\beta'_2, \alpha'_2)$ ,  $N'_2 = (\beta'_2, -\alpha'_2)$ ,  $\eta = \lambda_2^2 a_2^2$ ).

Следуя (2), квази- $\rho$ -функцию для  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$  можно задать так:

$$\Phi'^{E_1E_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\Phi'^{E_1P}(u_1, u_P, u'_1), \Phi'^{E_2P^*}(u_2, u_P, u'_2)\},$$

где  $\Phi'^{E_1P}(u_1, u_P, t_1)$ ,  $\Phi'^{E_2P^*}(u_2, u_P, t_2)$  — квази- $\rho$ -функции для эллипса и полуплоскости вида

$$\Phi'^{E_1P}(u_1, u_P, t_1) = \min\{\chi(\theta_1, \theta_P, t_1), \psi_P(q_{11}), \psi_P(q_{12})\},$$

$0 \leq t_1 \leq 2\pi$ ,  $\chi = -(N'_1, N)$ ,  $N'_1 = (\alpha'_1, \beta'_1)$ ,  $N = (\alpha, \beta)$ ,  $q_{1j} = (x_{q_{1j}}, y_{q_{1j}}) = v_1 + V'_1 + \eta n'_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $V'_1 = M(\theta_1)V_1$  (здесь  $M(\theta_1)$  — матрица поворота,  $V_1 = (\lambda_1 a_1 \cos t_1, \lambda_1 b_1 \sin t_1)$ ,  $N'_1 = (-\beta'_1, \alpha'_1)$ ,  $N'_2 = (\beta'_1, -\alpha'_1)$ ,  $\eta = \lambda_1^2 a_1^2$ ).

По аналогии, имеем

$$\Phi'^{E_2P^*}(u_2, u_P, t_2) = \min\{\chi(\theta_2, \theta_P, t_2), -\psi_P(q_{21}), -\psi_P(q_{22})\}.$$

Пусть  $A(u_A) = \bigcup_{i=1}^{n_A} A_i(u_A)$  и  $B(u_B) = \bigcup_{j=1}^{n_B} B_j(u_B)$ , а  $\Phi'^{A_i B_j}(u_A, u_B, u'_{ij})$  — квази-phi-функции для  $A_i(u_A)$  и  $B_j(u_B)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_A$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_B$ .

**Теорема 3.** *Функция вида*

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\Phi'^{A_i B_j}(u_A, u_B, u'_{ij}), i = 1, 2, \dots, n_A, j = 1, 2, \dots, n_B\} \quad (8)$$

является квази-phi-функцией для  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ ,  $u_P = (u'_{ij}, i = 1, 2, \dots, n_A, j = 1, 2, \dots, n_B)$ .

**Следствие 2.** *Если квази-phi-функции  $\Phi'^{A_i B_j}$  в (8) заменить на нормализованные  $\tilde{\Phi}'^{A_i B_j}$  (псевдонормализованные  $\widehat{\Phi}'^{A_i B_j}$ ) квази-phi-функции, то  $\Phi'^{AB}$  является нормализованной (псевдонормализованной) квази-phi-функцией для  $A(u_A)$  и  $B(u_B)$ .*

1. Wascher G., Hauner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // Europ. J. of Operational Research. – 2007. – **183**, Iss. 3. – P. 1109–1130.
2. Stoyan Yu. Phi-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 112–117.
3. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – **43(5)**. – P. 535–553.
4. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A. Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs // Advances in Operations Research. – 2012. – **2012**. – Article ID 346358. – 26 p.
5. Панкратов А. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D-объектов // Системи обробки інформації. – 2013. – **1(108)**. – С. 182–186.
6. Stoyan Yu., Chugay A. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – **48**, No 6. – P. 837–845.
7. Стоян Ю. Г., Чугай А. М. Построение свободной от радикалов Phi-функции для шара и неориентированного многогранника // Доп. НАН України. – 2011. – № 12. – С. 35–40.

Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков  
Университет Алабама, Бирмингем, США

Поступило в редакцию 07.02.2014

Член-корреспондент НАН України Ю. Г. Стоян, О. В. Панкратов,  
Т. Є. Романова, М. І. Чернов

## Квазі-phi-функції для математичного моделювання відносин геометричних об'єктів

Розглядаються класи спеціальних функцій (квазі-phi-функції, нормалізовані квазі-phi-функції, псевдонормалізовані квазі-phi-функції), призначені для аналітичного опису відносин неперетинання пари неорієнтованих геометричних об'єктів та обмежень на допустимі відстані. Наводяться основні властивості квазі-phi-функцій, сформульовані у вигляді теорем. Будуються квазі-phi-функції для деяких видів неорієнтованих 2D- і 3D-об'єктів.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, A. V. Pankratov, T. E. Romanova, N. I. Chernov**

## **Quasi-phi-functions for a mathematical modeling of the relations of geometric objects**

*The article considers the classes of special functions (quasi-phi-functions, normalized quasi-phi-functions, pseudonormalized quasi-phi-functions). The functions allow us to describe the non-overlapping of a pair of rotating geometric objects and distance constraints analytically. Basic characteristics of quasi-phi-functions are formulated in the form of theorems. We introduce quasi-phi-functions for some rotating 2D- and 3D-objects.*