



УДК 517.94

З. Н. Гладкая

О коэффициенте отражения оператора Шредингера с гладким потенциалом

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Изучен характер убывания коэффициентов отражения оператора Шредингера с гладким потенциалом типа ступеньки в зависимости от числа производных потенциала и скорости его стремления к своим фоновым асимптотам.

Как известно, одним из важных этапов в решении задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) $u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$ с убывающими начальными данными $u(x, 0) = q(x)$ является вопрос о скорости убывания при $x \rightarrow \pm\infty$ ¹ функций вида $F_{\pm}(x, t) = \int_{\mathbb{R}} R_{\pm}(k) e^{\pm 4ik^3 t} e^{\pm ikx} dk$, где $R_{\pm}(\sqrt{\lambda})$ — коэффициенты отражения соответствующего уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x) + q(x)f(x) = \lambda f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Функции F_{\pm} являются основной частью ядер уравнений Марченко, поэтому скорость их убывания обуславливает скорость убывания решения $u(x, t)$ уравнения КдФ. При наличии достаточного числа производных у коэффициентов отражения и достаточно быстрого убывания этих производных на бесконечности эту скорость легко определить путем нескольких интегрирований по частям:

$$F_{\pm}(x, t) = \frac{1}{\pm ik} \int_{\mathbb{R}} (R'_{\pm}(k) \pm 12ik^2 R(k)) e^{\pm 4ik^3 t} e^{\pm ikx} dk = \dots$$

В частности, для потенциала класса Шварца наличие всех производных R_{\pm} , убывающих быстрее любой степени k , было показано в работе [1]. Вместе с тем более точные оценки того, как гладкость начальных данных и количество их суммируемых моментов сказываются

© З. Н. Гладкая, 2014

¹Здесь и ниже символ \pm в предложении означает два независимых утверждения, одно для $+$ случая, одно для $-$.

на аналогичных свойствах коэффициентов отражения, а значит, и на скорости убывания решения КдФ, не проводились. Кроме того, в отличие от убывающих начальных данных, где метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) является отнюдь не единственным в вопросе о разрешимости задачи Коши и классические методы исследования уравнений в частных производных тоже дают эффективные результаты, разрешимость уравнения КдФ с начальными данными типа ступеньки

$$q(x) \rightarrow c_+, \quad x \rightarrow +\infty, \quad q(x) \rightarrow c_-, \quad x \rightarrow -\infty, \quad c_+ \neq c_-, \quad (2)$$

не исследовалась другими методами, кроме МОЗР. Разрешимость в классе шварцевских возмущений фонов была получена в [2]. Для решения задачи Коши в более широких классах начальных данных в настоящей работе предлагаются уточненные оценки на операторы преобразования и на коэффициенты отражения для гладких потенциалов типа ступеньки. Результаты являются новыми и для убывающего случая. Введем необходимые определения.

Определение 1. Пусть $m \geq 1$ и $n \geq 0$ — фиксированные целые числа и $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — n раз дифференцируемая функция. Будем говорить, что $f \in L_m^n(\pm)$, если² $f^{(n)} \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $\int_{\mathbb{R}_\pm} |f^{(i)}(x)| |x|^m dx < \infty$, $i = 0, \dots, n$.

Определение 2. Пусть c_+, c_- — заданные вещественные, а $m \geq 1$ и $n \geq 0$ — целые числа. Мы говорим, что функция $q(x)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$, если $q_+(x) := q(x) - c_+ \in L_m^n(+)$ и $q_-(x) := q(x) - c_- \in L_m^n(-)$.

В данной работе мы предполагаем, что потенциал задачи (1), (2) является функцией класса $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при произвольных наперед заданных m и n . Функции q_\pm называются возмущениями потенциала относительно фонов, в данном случае возмущения имеют одинаковый характер стремления к своим асимптотам. Отметим, что прямая и обратная задачи рассеяния решены в классах $\mathcal{L}_2^0(0, c^2)$ [3] и $\mathcal{L}_1^0(0, -c^2)$ [4]. Гладкий случай $n \geq 1$ и случай большего числа моментов $m > 2$ подробно не изучены, а между тем именно они служат основой для использования метода обратной задачи рассеяния при решении задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа ступеньки.

Определение 3. Функция $g(\xi)$ принадлежит пространству $L_2(+\infty)$ (соответственно, $L_2(-\infty)$), если существует такое $b \gg 1$ ($b \ll -1$), что $g(\cdot) \in L_2(b, +\infty)$ (соответственно, $g(\cdot) \in L_2(-\infty, b)$). Будем говорить, что $g \in L_2(\infty)$, если $g \in L_2(+\infty) \cap L_2(-\infty)$.

Обозначим $k_\pm := \sqrt{\lambda - c_\pm}$, где $\sqrt{\cdot}$ — стандартная ветвь квадратного корня, которая отображает комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $[c_\pm, +\infty)$ на верхнюю полуплоскость. Мы рассматриваем величины k_\pm как спектральные параметры уравнения (1) наряду с параметром λ .

Решения Йоста $\phi_\pm(\lambda, x)$ уравнения (1) с потенциалом (2) — это решения с асимптотическим поведением $\phi_\pm(\lambda, x)e^{\mp ik_\pm x} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Они хорошо изучены для убывающего негладкого потенциала с первым суммируемым моментом [5], и эти результаты без изменений переносятся на потенциалы типа ступеньки классов $\mathcal{L}_i^0(c_+, c_-)$, $i = 1, 2$. Ниже следующие леммы 1 и 2 устанавливают асимптотическое поведение и свойства гладкости решений Йоста по локальным параметрам k_\pm , могут быть использованы как при решении прямой и обратной задач в классах $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при $m \geq 2$ и $n \geq 1$, так и для более сложных классов потенциалов. Они носят “односторонний” характер в том смысле, что мы не предписываем потенциалу никакого определенного асимптотического поведения на противоположной полуоси.

²Мы полагаем $f^{(n)} = f$ при $n = 0$.

Лемма 1. Пусть $q_{\pm} \in L_m^n(\pm)$, $n \geq 0$, $m \geq 2$. Тогда при всех $\lambda \in \text{clos } \mathbb{C} \setminus [c_{\pm}, +\infty)$ решение Йоста $\phi_{\pm}(\lambda, x)$ уравнения (1) представимо в виде

$$\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm}x} \left(1 \pm \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(x, y) e^{\pm 2ik_{\pm}y} dy \right), \quad (3)$$

где функция $B_{\pm}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\pm} \mapsto \mathbb{R}$ имеет частные производные до $n+1$ порядка, удовлетворяющие следующим оценкам:

$$\left| \frac{\partial^{s+l}}{\partial x^l \partial y^s} B_{\pm}(x, y) \pm q_{\pm}^{(s+l-1)}(x+y) \right| \leq C_{\pm\infty}(x) \nu_{\pm, l+s}(x) \nu_{\pm, l+s}(x+y), \quad l+s \leq n+1,$$

где

$$\nu_{\pm, l}(x) = \sum_{i=0}^{l-2} (\sigma_{\pm}^{(i)}(x) + |q_{\pm}^{(i)}(x)|), \quad l \geq 2, \quad \nu_{\pm, 1}(x) := \sigma_{\pm}^{(0)}(x),$$

$$\sigma_{\pm}^{(i)}(x) := \pm \int_x^{\pm\infty} |q_{\pm}^{(i)}(\xi)| d\xi, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad q_{\pm}(x) = q(x) - c_{\pm},$$

и $C_{\pm\infty}(x) = C_{\pm\infty}(x, n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ — некоторая положительная функция, убывающая в направлении $x \rightarrow \pm\infty$.

С помощью этой леммы доказывается следующая лемма.

Лемма 2. Пусть потенциал q уравнения (1) удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда при больших $k_{\pm} \in \mathbb{R}$ решения Йоста (3) допускают асимптотическое разложение

$$\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm}x} \left\{ u_0^{\pm}(x) + \frac{u_1^{\pm}(x)}{2ik_{\pm}} + \dots + \frac{u_n^{\pm}(x)}{(2ik_{\pm})^n} + \frac{U_{n+1}^{\pm}(k_{\pm}, x)}{(2ik_{\pm})^{n+1}} \right\}, \quad (4)$$

где

$$u_0(x) = 1, \quad u_l(x) = \int_x^{\pm\infty} \left(\frac{d^2}{d\xi^2} u_{l-1}^{\pm}(\xi) - q_{\pm}(\xi) u_{l-1}^{\pm}(\xi) \right) d\xi, \quad l = 1, \dots, n+1, \quad (5)$$

а функции $U_{n+1}^{\pm}(k_{\pm}, x)$ и $\frac{\partial}{\partial x} U_{n+1}^{\pm}(k_{\pm}, x)$ при каждом x являются $m-1$ дифференцируемыми по параметру k_{\pm} и имеют следующее поведение при $k_{\pm} \rightarrow \infty$ и $0 \leq s \leq m-1$:

$$\frac{\partial^s}{\partial k_{\pm}^s} U_{n+1}^{\pm}(k_{\pm}, x) \in L_2(\infty), \quad \frac{\partial^s}{\partial k_{\pm}^s} \left(\frac{1}{k_{\pm}} \frac{\partial}{\partial x} U_{n+1}^{\pm}(k_{\pm}, x) \right) \in L_2(\infty).$$

Примечание 1. Формула (4) допускает естественное переразложение по степеням исходного спектрального параметра λ . А именно, обозначая $\lambda = k^2$, имеем

$$\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm}x} \left\{ 1 + \frac{v_1^{\pm}(x)}{2ik} + \dots + \frac{v_n^{\pm}(x)}{(2ik)^n} + \frac{V_{n+1}^{\pm}(k, x)}{(2ik)^{n+1}} \right\}, \quad (6)$$

где функции $v_l^\pm(x)$ не удовлетворяют соотношению (5), но имеют те же существенные свойства, что и функции $u_l^\pm(x)$. А именно, функции $v_l^\pm(x)$ являются полиномами с вещественными коэффициентами от функций $q_\pm, \dots, q_\pm^{l-2}$ и их интегралов. Тем самым функция $v_n^\pm(x)$ имеет по меньшей мере еще две производных. При этом функция $V_{n+1}^\pm(k, x)$ удовлетворяет тем же свойствам, что и функция $U_{n+1}^\pm(k_\pm, x)$:

$$\frac{\partial^s}{\partial k^s} V_{n+1}^\pm(k, x), \quad \frac{\partial^s}{\partial k^s} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} V_{n+1}^\pm(k, x) \right) \in L_2(\infty), \quad 0 \leq s \leq m-1. \quad (7)$$

Лемма (2) а также формулы (6) и (7) позволяют обосновать асимптотическое разложение для функций Вейля

$$\mathbf{m}_\pm(\lambda, x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \phi_\pm(\lambda, x)}{\phi_\pm(\lambda, x)} \quad (8)$$

уравнения (1) с потенциалом $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$. Заметим, что из формулы (3.1.20) работы [5] следует, что для любого $b > 0$ существует такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda > \lambda_0$ функция $\phi(\lambda, x)$ не имеет нулей при $|x| < b$. Тем самым функция $\mathbf{m}_\pm(\lambda, x)$ корректно определена при больших положительных λ и при x на любом компакте $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$.

Лемма 3. Пусть потенциал q уравнения (1) принадлежит классу $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$. Тогда при больших $\lambda = k^2 \in \mathbb{R}_+$ функции (8) допускают представление

$$\mathbf{m}_\pm(\lambda, x) = \pm ik + \sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j(x)}{(\pm 2ik)^j} + \frac{\kappa_n^\pm(k, x)}{(2ik)^n}, \quad (9)$$

где

$$\kappa_1(x) = q(x), \quad \kappa_{l+1}(x) = -\frac{d}{dx} \kappa_l(x) - \sum_{j=1}^{l-1} \kappa_{l-j}(x) \kappa_j(x), \quad (10)$$

а функции $\kappa_n^\pm(k, x)$ являются $m-1$ раз дифференцируемыми по параметру k , и при этом

$$\frac{\partial^s}{\partial k^s} \kappa_n^\pm(\cdot, x) \in L_2(\infty), \quad s \leq m-1, \quad \forall x \in \mathcal{K}. \quad (11)$$

Отметим, что рекуррентная формула (10) хорошо известна в случае гладких ограниченных потенциалов оператора Шредингера с предельной точкой Вейля на $+\infty$ или $-\infty$. Они возникают непосредственно из уравнения Рикатти для функций Вейля. В самом деле, представив \mathbf{m}_\pm в виде $\mathbf{m}_\pm(\lambda, x) = \pm ik + \kappa_\pm(\lambda, x)$, мы видим из формул (1) и (8), что κ_\pm удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \kappa_\pm(\lambda, x) \pm 2ik \kappa_\pm(\lambda, x) + \kappa_\pm^2(\lambda, x) - q(x) = 0, \quad \lambda = k^2. \quad (12)$$

Из формул (6), в свою очередь, следует, что $\kappa_\pm(\lambda, x) = \sum_{j=1}^{n'} \kappa_j^\pm(x) (\pm 2ik)^{-j} + \text{остаточный член}$. Подставляя это разложение в (12), мы получаем формулы (10), одинаковые для обеих функций Вейля. При этом априори неясно, какова величина числа n' и каков характер

поведения остаточного члена. Формулой (9) мы уточняем число членов разложения для потенциала данного класса, а также показываем, что при ее дифференцировании $m - 1$ раз по k остаточный член будет оставаться величиной $o(k^{-n})$ (см. (11)).

На основании леммы 3 мы приходим к следующему заключению.

Лемма 4. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при некоторых $n \geq 1$ и $m \geq 2$. Тогда при $x \in \mathcal{K}$, достаточно больших положительных λ и $k^2 = \lambda$ функция

$$H_n^\pm(k, x) := k^n (\overline{\mathbf{m}_\pm(\lambda, x)} - \mathbf{m}_\mp(\lambda, x))$$

является $m - 1$ дифференцируемой по параметру k , причем

$$\frac{\partial^s}{\partial k^s} H_n^\pm(k, x) \in L_2(\infty), \quad 0 \leq s \leq m - 1.$$

Функция $G^\pm(k, x) := \mathbf{m}_\pm(\lambda, x) - \mathbf{m}_\mp(\lambda, x)$ также $m - 1$ раз дифференцируема по параметру k при больших k , причем равномерно на компакте \mathcal{K}

$$G^\pm(k, x) = \pm 2ik \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right), \quad \frac{\partial^s}{\partial k^s} G^\pm(k, x) = O(1), \quad 0 \leq s \leq m - 1.$$

Обозначим через $W(\phi, \psi)(\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} \psi(\lambda, x) \phi(\lambda, x) - \frac{\partial}{\partial x} \phi(\lambda, x) \psi(\lambda, x)$ вронскиан двух решений уравнения (1). Как известно [6], правый (R_+) и левый (R_-) коэффициенты отражения задачи рассеяния (1), (2) определяются по формулам

$$R_\pm(\lambda) = -\frac{W(\phi_\mp, \overline{\phi_\pm})(\lambda)}{W(\phi_\mp, \phi_\pm)(\lambda)}.$$

Тем самым при больших положительных λ , где $\phi_-(\lambda, 0)\phi_+(\lambda, 0) \neq 0$ [5], эти коэффициенты определяются по формулам

$$R_\pm(\lambda) = -\frac{\overline{\phi_\pm(\lambda, 0)} \overline{\mathbf{m}_\pm(\lambda, 0)} - \mathbf{m}_\mp(\lambda, 0)}{\phi_\pm(\lambda, 0) \mathbf{m}_\pm(\lambda, 0) - \mathbf{m}_\mp(\lambda, 0)} = -\frac{\overline{\phi_\pm(\lambda, 0)} H_n^\pm(k, 0)}{\phi_\pm(\lambda, 0) G^\pm(k, 0)} \frac{1}{k^n},$$

где функции $H_n^\pm(k, x)$ и $G^\pm(k, x)$ определены в лемме 4. На основании этой леммы, а также формул (6) и (7), взятых при $x = 0$, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. Пусть $R_\pm(\lambda)$ — коэффициенты отражения задачи рассеяния для оператора Шредингера (1) с потенциалом (2), удовлетворяющим при некоторых $n \geq 1$ и $m \geq 2$ условию $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$. Тогда при достаточно больших положительных λ для этих коэффициентов и их производных по параметру $\sqrt{\lambda}$ имеет место асимптотическое представление

$$\frac{\partial^s R_\pm(\lambda)}{\partial \sqrt{\lambda}^s} = \frac{Q_{\pm, s}(\lambda^{1/2})}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}}, \quad s = 0, \dots, m - 1,$$

где $Q_{\pm, s}(\cdot) \in L_2(\infty)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. Е. Егорову за поддержку и интерес к работе.

1. *Marchenko V. A.* The inverse scattering problem and its applications to NLPDE // Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science / Ed. by R. Pike, P. Sabatier. – San Diego: Academic Press, 2002. – P. 1695–1706.
2. *Egorova I., Grunert K., Teschl G.* On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite-gap initial data I. Schwartz-type perturbations // Nonlinearity. – 2009. – **22**. – P. 1431–1457.
3. *Cohen A., Kappeler T.* Scattering and inverse scattering for steplike potentials in the Schrödinger equation // Indiana Univ. Math. J. – 1985. – **34**, No 1. – P. 127–180.
4. *Базарган Дж.* Прямая и обратная задача рассеяния на всей оси для одномерного оператора Шредингера с потенциалом типа ступеньки // Доп. НАН України. – 2008. – No 4. – С. 7–11.
5. *Marchenko V. A.* Sturm–Liouville operators and applications. – Basel: Birkhäuser, 1986. – 395 p.
6. *Буслаев В. С., Фомин В. Н.* К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1962. – **17**, No 1. – P. 56–64.

Фізико-технічний інститут
низьких температур ім. Б. І. Веркина
НАН України, Харків

Поступило в редакцію 24.03.2014

З. М. Гладка

Про коефіцієнт відбиття оператора Шредингера з гладким потенціалом

Вивчено характер зменшення коефіцієнтів відбиття оператора Шредингера з гладким потенціалом типу сходінки залежно від числа похідних потенціалу та швидкості його прямування до своїх фонових асимптот.

Z. M. Gladka

On a reflection coefficient for the Schrödinger operator with a smooth potential

The decaying properties of the reflection coefficients are studied for the Schrödinger operator with a smooth steplike potential depending on the number of derivatives of the potential and its speed of tending to its background asymptotics.