

Наближення сумами Зигмунда класів згорток періодичних функцій в інтегральних метриках

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

Одержано точні за порядком оцінки відхилень сум Зигмунда в метриках просторів L_q , $1 < q < \infty$, на класах 2π -періодичних функцій, які допускають зображення у вигляді згортки функцій, що належать до одиничної кулі простору L_1 з фіксованим ядром Ψ_β . Показано, що при певних значеннях параметрів, що визначають клас $L_{\beta,1}^\psi$ та метод наближення, суми Зигмунда забезпечують порядок найкращого наближення вказаних класів тригонометричними поліномами в метриці L_q .

Нехай L_p , $1 \leq p \leq \infty$, — простір 2π -періодичних сумовних функцій φ зі скінченною нормою $\|\varphi\|_p$, де при $p \in [1, \infty)$ $\|\varphi\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}$, а при $p = \infty$ $\|\varphi\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_t |\varphi(t)|$.

Нехай далі $L_{\beta,p}^\psi$, $1 \leq p \leq \infty$, — клас 2π -періодичних функцій $f(x)$, що майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ задаються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\Psi_\beta * \varphi)(x) := \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \perp 1, \quad (1)$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1$, а $\Psi_\beta(t)$ — сумовне на $[0, 2\pi)$ ядро, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Функцію φ в зображенні (1) називають (ψ, β) -похідною функції f і позначають через f_β^ψ . Поняття (ψ, β) -похідної належить О.І. Степанцю (див. [1, с. 132]).

Якщо $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то класи $L_{\beta,p}^\psi$ є класами Вейля–Надя і позначаються через $W_{\beta,p}^r$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що послідовність $\psi(k)$, яка визначає класи згорток, є слідом на множині натуральних чисел \mathbb{N} деякої неперервної функції $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$.

Позначимо через Θ_ϱ , $1 \leq \varrho < \infty$, множину монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, для яких існує стала $\alpha > 1/\varrho$ така, що функція $t^\alpha \psi(t)$ майже спадає, тобто для будь-яких $t_1 > t_2 \geq 1$ виконується нерівність $t_1^\alpha \psi(t_1) \leq K t_2^\alpha \psi(t_2)$, в якій K — деяка додатна стала. Прикладами функцій ψ , що задовольняють умову $\psi \in \Theta_\varrho$, є, зокрема, функції вигляду $\psi_1(t) = 1/t^r$, $r > 1/\varrho$; $\psi_2(t) = (\ln^\alpha(t+c))/t^r$, $r > 1/\varrho$, $\alpha > 0$, $c > e^{\frac{2\alpha}{r-1/e}} - 1$; $\psi_3(t) = 1/(t^r \ln^\alpha(t+c))$, $r > 1/\varrho$, $\alpha > 0$, $c > 0$; $\psi_4(t) = (\ln \ln^\alpha(t+c))/t^r$, $r > 1/\varrho$, $\alpha > 0$, $c > e^{\frac{2\alpha}{r-1/e}} - 1$.

У даній роботі будемо вимагати, щоб $\psi \in \Theta_{q'}$, $1/q + 1/q' = 1$, $1 < q < \infty$. Умова $\psi \in \Theta_{q'}$, як неважко переконатись, гарантує справедливість включення $\Psi_\beta \in L_q$ (див., наприклад, [2,

с. 657]), а отже, і вкладення $L_{\beta,1}^\psi \subset L_q$, $1 < q < \infty$ (див., наприклад, нерівність (1.5.28) із роботи [3, с. 43]).

Сумами Зигмунда функції f із L_1 називають тригонометричні поліноми вигляду

$$Z_{n-1}^s(f; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right) (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad s > 0, \quad (2)$$

де a_k і b_k — коефіцієнти Фур'є функції f . При $s = 1$ поліноми Z_{n-1}^s є відомими сумами Фейєра, які позначаються через $\sigma_{n-1}(f; t)$.

У роботі досліджуватимемо величини

$$\mathcal{E}(L_{\beta,p}^\psi; Z_{n-1}^s)_q = \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \|f(\cdot) - Z_{n-1}^s(f; \cdot)\|_q$$

з метою одержання для них точних порядкових оцінок при $\psi \in \Theta_{q'}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $1 < q < \infty$ і $p = 1$.

Також розглядатимемо найкращі наближення класів $L_{\beta,p}^\psi$, $p \geq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ тригонометричними поліномами t_{n-1} порядку $n - 1$, тобто величини вигляду

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi)_q = \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \inf_{t_{n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_q, \quad 1 \leq p, \quad q \leq \infty,$$

за умови, що $L_{\beta,p}^\psi \subset L_q$. Далі буде вказано область допустимих значень параметрів ψ , s і q , при яких порядки спадання величин $\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q$ і $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_q$ збігаються.

Вивчення апроксимативних властивостей сум Зигмунда на різних функціональних класах присвячена значна кількість робіт (з детальною бібліографією з цього напрямку можна ознайомитись в [4]). Зокрема, у [4] знайдено порядкові оцінки величин $\mathcal{E}(L_{\beta,p}^\psi; Z_{n-1}^s)_\infty$ при $\psi \in \Theta_p$, $1 < p < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Порядки спадання величин $E_n(L_{\beta,p}^\psi)_q$ досліджувались багатьма авторами (див. [5, 6] та ін.). У [6] встановлено точні порядкові рівності величин $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_q$, $1 < q \leq \infty$, за умови, що $\psi \in \Theta_{q'} \cap B$, $1/q + 1/q' = 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$, де B — множина монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\psi(t)/\psi(2t) \leq K$, $t \geq 1$.

Дана робота є продовженням досліджень, розпочатих у [4, 6]. Для формулювання основних результатів введемо такі означення.

Будемо казати, що додатна функція $g(t)$, задана на $[1, \infty)$, належить до множини A^+ ($g \in A^+$), якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що $g(t)t^{-\varepsilon}$ зростає на $[1, \infty)$. Якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що $g(t)t^\varepsilon$ спадає на $[1, \infty)$, то будемо казати, що g належить до множини A^- ($g \in A^-$). Через \mathcal{Z} позначимо множину неперервних слабо коливних (у сенсі Зигмунда) функцій, тобто додатних функцій $g(t)$, визначених на $[1/\pi, \infty)$, таких, що при довільному $\delta > 0$ для достатньо великих t $g(t)t^\delta$ зростає, а $g(t)t^{-\delta}$ спадає.

Далі під записом $A(n) = O(B(n))$ розумітимемо, що існує стала $K > 0$ така, що виконується нерівність $A(n) \leq K(B(n))$, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Запис $A(n) \asymp B(n)$ означає, що $A(n) = O(B(n))$ і одночасно $B(n) = O(A(n))$.

Теорема 1. *Нехай $1 < q < \infty$, $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $g_{s,q'}(t) := \psi(t)t^{s+1/q'}$, $1/q + 1/q' = 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді:*

1) якщо $\psi \in \Theta_{q'}$ і $g_{s,q'} \in A^+$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q = O\left(\psi(n)n^{1-1/q}\right); \quad (3)$$

2) якщо $g_{s,q'} \in \mathcal{Z}$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q = O\left(\frac{1}{n^s} \left(\int_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt\right)^{1/q}\right); \quad (4)$$

3) якщо $g_{s,q'} \in A^-$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q = O(n^{-s}). \quad (5)$$

Доведення. З рівностей (1) та (2) випливає, що для будь-якої $f \in L_{\beta,1}^\psi$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$f(x) - Z_{n-1}^s(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) k^s \cos\left(k(x-t) - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \Psi_{\beta,n}(x-t) \right) \varphi(t) dt, \quad (6)$$

де $\|\varphi\|_1 \leq 1$, $\Psi_{\beta,n}(\tau) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(k\tau - \beta\pi/2)$, $n \in \mathbb{N}$.

Із (6), застосовуючи нерівність (1.5.28) з роботи [3, с. 43] та нерівність трикутника, отримуємо

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q \leq \frac{1}{\pi n^s} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) k^s \cos\left(k(\cdot) - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_q + \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\|_q.$$

Тоді, скориставшись формулами (18), (21), (24) та (42) з роботи [4], одержимо оцінки (3)–(5). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай $1 < q < \infty$, $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $g_{s,q'}(t) := \psi(t)t^{s+1/q'}$, $1/q + 1/q' = 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) якщо $\psi \in \Theta_{q'}$, $g_{s,q'} \in A^+$ і функція $1/\psi(t)$ опукла вгору або донизу на $[1, \infty)$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q \asymp E_n(L_{\beta,1}^\psi)_q \asymp \psi(n)n^{1-1/q}; \quad (7)$$

2) якщо $g_{s,q'} \in \mathcal{Z}$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q \asymp \frac{1}{n^s} \left(\int_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt \right)^{1/q}; \quad (8)$$

3) якщо $g_{s,q'} \in A^-$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q \asymp n^{-s}. \quad (9)$$

Доведення. Оцінки зверху для величин $\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q$ в (7)–(9) випливають із співвідношень (3)–(5) відповідно.

Розглянемо випадок $g_{s,q'} \in A^+$, $\psi \in \Theta_{q'}$. У роботі [6, с. 1195], при $\psi \in \Theta_{q'} \cap B$, $1 < q \leq \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, за умови, що функція $1/\psi(t)$ опукла вгору або донизу на $[1, \infty)$, встановлено таку оцінку знизу для величини $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_q$:

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_q \geq K_{\psi,q} \psi(n) n^{1-1/q}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

де $K_{\psi,q}$ — додатна величина, що може залежати лише від ψ та q . Оскільки з включення $g_{s,q'} \in A^+$, $s > 0$, $1 < q \leq \infty$, випливає, що $\psi \in B$, то з оцінок (3), (10) та нерівності $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_q \leq \mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q$, $n \in \mathbb{N}$, випливає порядкова рівність (7).

Нехай далі $g_{s,q'} \in \mathcal{Z}$. Для встановлення оцінки знизу величини $\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q$, $1 < q < \infty$, розглянемо функцію $\varphi_\alpha(t) = \varphi_\alpha(n, t) = \alpha(V_n(t) - 1/2)$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, де $V_m(t)$ — ядра методу Валле Пуссена,

$$V_m(t) := \frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m-1} D_k(t) = D_m(t) + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m}\right) \cos kt, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$D_k(t) — ядра Діріхле, \quad D_k(t) := \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^k \cos \nu t = \frac{\sin(k+1/2)t}{2 \sin t/2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки (див., наприклад, [6, с. 1192]) $|V_m(t)| < A_1 m$, $0 \leq t \leq \pi$, $|V_m(t)| \leq A_2/(mt^2)$, $0 < t \leq \pi$, де A_i — абсолютні сталі, то нескладно перекоонатися, що

$$\|\varphi_\alpha\|_1 \leq \alpha(\pi + \|V_n\|_1) \leq \alpha A_3. \quad (11)$$

При $\alpha = \alpha_0 = A_3^{-1}$ з (11) одержуємо нерівність $\|\varphi_{\alpha_0}\|_1 \leq 1$.

Із [7, с. 65] випливає, що для функції $f_{\alpha_0}(t) := (\varphi_{\alpha_0} * \Psi_\beta)(t)$ має місце рівність

$$f_{\alpha_0}(t) = \alpha_0 \left(\sum_{k=1}^n \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \psi(k) \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right). \quad (12)$$

Розглянемо інтеграл

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} (f_{\alpha_0}(t) - Z_{n-1}^s(f_{\alpha_0}; t)) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\psi(k)k^{s+1/q'})^{q-1}}{k^{1/q}} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt.$$

Враховуючи (12), (2) та відому формулу

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \cos \left(mt - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \\ \pi, & k = m, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

інтеграл I можна записати у вигляді $I = \frac{\alpha_0 \pi}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\psi(k)k^{s+1/q'})^q}{k}$, звідки одержуємо

$$\begin{aligned} I \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\psi(k)k^{s+1/q'})^q}{k} \right)^{-1/q'} &= \frac{\alpha_0 \pi}{n^s} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\psi(k)k^{s+1/q'})^q}{k} \right)^{1/q} \geq \\ &\geq \frac{K_{\psi,s,q}^{(1)}}{n^s} \left(\int_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt \right)^{1/q}, \end{aligned} \quad (13)$$

тут і далі $K_{\psi,s,q}^{(i)}$ — додатні величини, що можуть залежати тільки від ψ , s та q .

З іншого боку, для оцінки зверху величини I застосуємо нерівність Гельдера та проведемо міркування, використані при доведенні формули (42) з роботи [4], внаслідок чого отримуємо, що при $1 < q < \infty$

$$\begin{aligned} I &\leq \|f_{\alpha_0}(t) - Z_{n-1}^s(f_{\alpha_0}; t)\|_q \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_{s,q'}(k))^{q-1}}{k^{\frac{1}{q}}} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{q'} \leq \\ &\leq K_{\psi,s,q}^{(2)} \|f_{\alpha_0}(t) - Z_{n-1}^s(f_{\alpha_0}; t)\|_q \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_{s,q'}(k))^q}{k} \right)^{1/q'}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Об'єднуючи (13) та (14), маємо

$$\frac{K_{\psi,s,q}^{(1)}}{n^s} \left(\int_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt \right)^{1/q} \leq I \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_{s,q'}(k))^q}{k} \right)^{-1/q'} \leq K_{\psi,s,q}^{(2)} \|f_{\alpha_0}(t) - Z_{n-1}^s(f_{\alpha_0}; t)\|_q. \quad (15)$$

З (15) отримуємо $\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q \geq \|f_{\alpha_0}(t) - Z_{n-1}^s(f_{\alpha_0}; t)\|_q \geq \frac{K_{\psi,s,q}^{(3)}}{n^s} \left(\int_1^n \frac{(g_{s,q'}(t))^q}{t} dt \right)^{1/q}$.

Оцінку знизу величини $\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q$ у випадку $g_{s,q'} \in \mathcal{Z}$, $1 < q < \infty$ доведено.

Як впливає з теореми (2.2.1) роботи [1, с. 92], метод Z_{n-1}^s насичений з порядком насичення n^{-s} , тобто величини $\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; Z_{n-1}^s)_q$ не можуть прямувати до нуля швидше за порядком, ніж n^{-s} , звідки випливає, що для довільного $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < q < \infty$, за умови $g_{s,q'} \in A^-$, виконується порядкова рівність (9). Теорему 2 доведено.

Наслідок 1. *Нехай $1 < q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $g_{1,q'}(t) := \psi(t)t^{1+1/q'}$, $1/q + 1/q' = 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді:*

1) якщо $\psi \in \Theta_{q'}$, $g_{1,q'} \in A^+$ і функція $1/\psi(t)$ опукла вгору або донизу на $[1, \infty)$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; \sigma_{n-1})_q \asymp E_n(L_{\beta,1}^\psi)_q \asymp \psi(n)n^{1-1/q};$$

2) якщо $g_{1,q'} \in \mathcal{Z}$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; \sigma_{n-1})_q \asymp \frac{1}{n} \left(\int_1^n \frac{(g_{1,q'}(t))^q}{t} dt \right)^{1/q};$$

3) якщо $g_{1,q'} \in A^-$, то

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^\psi; \sigma_{n-1})_q \asymp n^{-1}.$$

Наслідок 2. *Нехай $r > 1 - 1/q$, $1 < q < \infty$, $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(W_{\beta,1}^r; Z_{n-1}^s)_q \asymp \begin{cases} n^{-(r-1+1/q)}, & 1 - \frac{1}{q} < r < s + 1 - \frac{1}{q}; \\ n^{-s} \ln^{1/q} n, & r = s + 1 - \frac{1}{q}; \\ n^{-s}, & r > s + 1 - \frac{1}{q}. \end{cases} \quad (16)$$

При $s = 1$ із (16) випливають результати, одержані А. І. Камзоловим [8]. Із (16) і теореми 3.6 роботи [9, с. 47] випливає, що при $1 - 1/q < r < s + 1 - 1/q$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(W_{\beta,1}^r; Z_{n-1}^s)_q \asymp E_n(W_{\beta,1}^r)_q \asymp n^{-(r-1+1/q)}, \quad 1 < q < \infty.$$

Рівність (7) показує, що при $\psi \in \Theta_{q'}$, $g_{s,q'} \in A^+$ суми Z_{n-1}^s наближають функції з класу $L_{\beta,1}^\psi$ в метриці L_q за порядком не гірше за найкращі наближення на цьому класі.

1. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. Т. 40. – Киев, 2002. – Ч. I. – 427 с.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. – Москва: Физматгиз, 1961. – Т. 1. – 936 с.
3. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 423 с.
4. Сердюк А. С., Грабова У. З. Оцінки рівномірних наближень сумами Зигмунда на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2013. – 10, № 1. – С. 222–244.
5. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. Т. 40. – Киев, 2002. – Ч. II. – 468 с.
6. Грабова У. З., Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β) -диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – 65, № 9. – С. 1186–1197.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2 т. – Москва: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
8. Камзолов А. И. О приближении классов функций $\widetilde{W}_p^\alpha(L)$ методом Фейера в пространствах $L_s[-\pi, \pi]$ // Мат. заметки. – 1978. – 23, № 3. – С. 343–349.
9. Temlyakov V. N. Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci., 1993. – 419 p.

Східноєвропейський національний університет
ім. Лесі Українки, Луцьк

Надійшло до редакції 06.03.2014

У. З. Грабова

Приближение суммами Зигмунда классов свертков периодических функций в интегральных метриках

Получены точные по порядку оценки отклонений сумм Зигмунда в метриках пространств L_q , $1 < q < \infty$, на классах 2π -периодических функций, которые допускают изображение в виде свертки функций, принадлежащих единичному шару пространства L_1 с фиксированным ядром Ψ_β . Показано, что при определенных значениях параметров, которые определяют класс $L_{\beta,1}^\psi$ и метод приближения, суммы Зигмунда обеспечивают порядок наилучшего приближения указанных классов тригонометрическими полиномами в метрике L_q .

U. Z. Grabova

Approximation of the classes of convolutions of periodic functions by Zygmund sums in integral metrics

We obtain the estimates exact in order for the deviations of Zygmund sums in the metrics of spaces L_q , $1 < q < \infty$, on the classes of 2π -periodic functions that admit a representation in the form of a convolution of functions that belong to a unit ball of the space L_1 with fixed kernel Ψ_β . We show that, at certain values of the parameters that define the class $L_{\beta,1}^\psi$ and a method of approximation, the Zygmund sums provide the order of the best approximation of the given classes by trigonometric polynomials in the metric L_q .