



УДК 537.9

С. С. Апостолов

Многократное андреевское отражение в двухмерном топологическом изоляторе

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. А. Ямпольским)

Электронный транспорт на краю двухмерного топологического изолятора между двумя сверхпроводящими электродами определяется многократными андреевскими отражениями. В работе предлагается модель такого транспорта с учетом андреевского и нормального отражений на контакте и электрон-электрон-примесного рассеяния на краю. На основании этой модели вычисляются функции распределения и определяются характерные особенности, возникающие в результате указанных явлений. Полученные результаты позволяют в эксперименте определять соотношение вкладов от нормального отражения от сверхпроводящего контакта и от электрон-электрон-примесного рассеяния на краю, влияющие на квантовый электронный транспорт в топологическом изоляторе.

Ключевой особенностью квантового спинового эффекта Холла является появление бесщелевых краевых состояний, существующих одновременно со щелевыми объемными состояниями. Эти краевые состояния распространяются во взаимно противоположных направлениях и несут противоположные спины. Такая корреляция между направлением движения и ориентацией спина способствовала возникновению термина “спиральная электронная жидкость” [1]. За счет симметрии обращения времени спиральные состояния имеют топологическую защиту от упругого обратного рассеяния электрона на немагнитной примеси, тем самым обеспечивая возможность для бездиссипативного транспорта с универсальной, не зависящей от температуры, проводимостью квантованной по $e^2/2\pi$, где e — элементарный заряд (в работе мы используем систему единиц, где постоянная Планка $\hbar = 1$ и постоянная Больцмана $k = 1$). Это явление было подтверждено экспериментально в гетероструктурах HgTe/HgCdTe и InAs/GaSb со спиральными краевыми состояниями, когда проводимость близка к ее квантовому значению [2, 3]. Однако были обнаружены отклонения от этого значения: проводимость подавляется при увеличении размера системы [4, 5], что подразумевает наличие неупругого рассеяния электронов. Эти исследования привлекли внимание и вызвали множество предложений для возможных механизмов рассеяния, влияющих на идеально баллистический транспорт на краю [1, 6–9].

© С. С. Апостолов, 2015

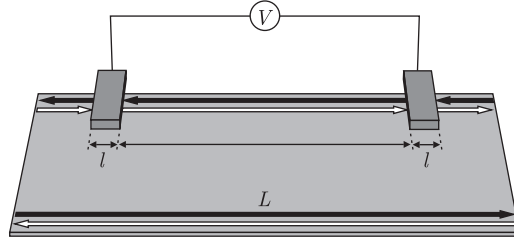


Рис. 1. Схематическое изображение участка топологического изолятора длиной L и двух сверхпроводящих контактов длиной l , между которыми приложено напряжение V

Наиболее очевидная причина для обратного рассеяния отдельных электронов обусловлена магнитными примесями, которые могут перевернуть спин и таким образом вызвать переходы между встречными краевыми состояниями [1, 7]. Также отражение от примеси может возникнуть непосредственно в результате приложения магнитного поля, когда нарушена симметрия обращения времени. В данной работе мы не будем рассматривать такие магнитные рассеяния. Если же симметрия обращения времени сохраняется, то неупругие процессы в главном порядке связаны с обратным рассеянием электронных пар [1, 7]. В работе [8] показано, что наибольшую скорость (порядка T^4 при низких температурах) имеет процесс обратного рассеяния электрона на примеси, который сопровождается возбуждением электрон-дырочной пары, а также выведен эффективный гамильтониан, соответствующий такому процессу рассеяния,

$$H = \sum_{\alpha=\pm} \sum_k \varepsilon_{\alpha k} \psi_{\alpha,k}^\dagger \psi_{\alpha,k} + H_{\text{эф}} \left(\sum_{\alpha=\pm} \sum_{k,k',q} \frac{k-k'}{k_F} \psi_{\alpha,k+q}^\dagger \psi_{-\alpha,k'-q}^\dagger \psi_{\alpha,k'} \psi_{\alpha,k} + \text{h.c.} \right), \quad (1)$$

где $\varepsilon_{\alpha k} = \alpha v_F k$ — линейная энергия электрона со спиральностью α и импульсом k ; $H_{\text{эф}} = 4(k_F/k_0)^2 [U(0) + U(2k_F)] V(2k_F) / (L^2 \varepsilon_F)$; $U(q)$ и $V(q)$ — фурье-преобразования кулоновского и примесного потенциалов соответственно; L — размер системы; v_F , k_F и $\varepsilon_F = v_F k_F$ — скорость, импульс и энергия Ферми соответственно. Обратим внимание, что операторы спиральных состояний $\psi_{\pm,k}$ связаны с операторами электронных состояний с определенным спином $\psi_{\uparrow,\downarrow,k}$ за счет спин-орбитального взаимодействия. При достаточно малых импульсах $k \approx k_F \ll k_0$ эта связь может быть записана в таком виде:

$$\psi_{\uparrow,k} = \psi_{+,k} - \eta \psi_{-,k}, \quad \psi_{\downarrow,k} = \psi_{-,k} + \eta \psi_{+,k}, \quad (2)$$

где $\eta = k_F^2/k_0^2$ — параметр спин-орбитального взаимодействия; k_0 параметризует масштаб, на котором ось квантования спина вращается с импульсом k .

Рассмотрим топологический изолятор, участок края которого ограничен двумя сверхпроводящими электродами, к которым приложено напряжение V (рис. 1). Предполагаем, что благодаря эффекту близости электроды индуцируют сверхпроводящее состояние на конечной длине l внутри края, определяющейся литографической толщиной сверхпроводящих электродов, которые будем считать порядка или несколько раз больше, чем длина когерентности ξ в сверхпроводнике, $l \gtrsim \xi = v_F/\Delta$, где Δ — ширина энергетической щели в сверхпроводнике. Расстояние L между сверхпроводниками предполагается достаточно большим, $L \gg l$.

Электронный транспорт между контактами в топологическом изоляторе определяется как рассеянием электронов при движении между контактами, так и многократным

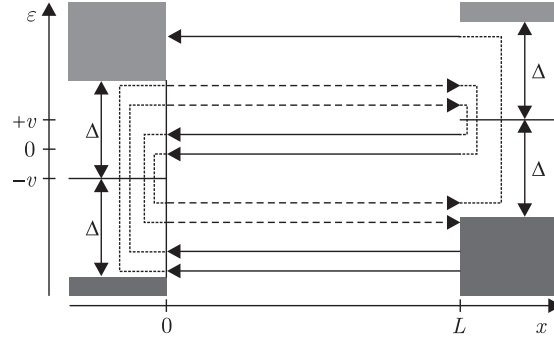


Рис. 2. Диаграмма, представляющая многократные андреевские отражения электронов, двигающихся между двумя сверхпроводящими контактами

андреевским и нормальным отражением от контактов. Для подробного описания этого транспорта удобно ввести в рассмотрение функции распределения $f_{\varepsilon}^{\pm}(x)$ электронов по энергии ε , где координата x меняется от 0 на левом контакте, до L — на правом. Верхние индексы “+” и “-” обозначают направление движения спирального состояния (и жестко привязанное к нему направление спина) слева направо или справа налево соответственно. Здесь энергию ε в нижнем индексе функции распределения для удобства дальнейшего изложения будем отсчитывать от среднего значения между уровнями Ферми в сверхпроводящих контактах.

Для определения вариации функций $f_{\varepsilon}^{\pm}(x)$ между контактами воспользуемся уравнением Больцмана

$$\pm L \partial_x f_{\varepsilon}^{\pm}(x) = \zeta I_{\varepsilon}^{\pm}(x), \quad (3)$$

где безразмерный параметр $\zeta = 4(2\Delta/k_0 v_F)^4 [U(0) + U(2k_F)]^2 V^2 (2k_F)/v_F^4$ определяет силу рассеяния, а I_{ε}^{\pm} — безразмерный интеграл столкновений, определяемый эффективным гамильтонианом (1),

$$I_{\varepsilon}^{\pm} = \sum_{\alpha\beta\gamma=\mp} \iint \frac{d\varepsilon_1}{2\pi} \frac{d\varepsilon_2}{2\pi} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1 \pm \alpha\varepsilon_2)^2}{\Delta^4} [f_{\varepsilon}^{\pm} f_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}^{\alpha} g_{\varepsilon - \varepsilon_2}^{\beta} g_{\varepsilon_1}^{\gamma} - g_{\varepsilon}^{\pm} g_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}^{\alpha} f_{\varepsilon - \varepsilon_2}^{\beta} f_{\varepsilon_1}^{\gamma}]. \quad (4)$$

Здесь для удобства мы ввели $g_{\varepsilon}^{\pm} = 1 - f_{\varepsilon}^{\pm}$.

Кроме рассеяния внутри топологического изолятора, электроны претерпевают многократные андреевские и нормальные отражения от контактов. На рис. 2 схематически представлен процесс многократных андреевских отражений для двух электронов, двигающихся из валентной зоны правого сверхпроводящего контакта. Электрон, претерпевая андреевское отражение, превращается в дырку с энергией, симметричной энергии исходного электрона относительно уровня Ферми. Сплошные стрелки на рисунке указывают направление движения и уровень энергии электронов, штриховые — дырок. Один электрон после нескольких отражений попадает в зону проводимости левого контакта, в то время как второй электрон возвращается в валентную зону правого контакта в виде дырки.

В данной работе мы рассматриваем сверхпроводящие контакты конечной ширины l . Это приводит к тому, что электрон, кроме отражения, может с некоторой вероятностью пройти сквозь контакт. Обозначая коэффициент андреевского и нормального отражения

через A_ε и N_ε соответственно, можем записать уравнения, которым подчиняются функции распределения на границе топологического изолятора и сверхпроводящих контактов,

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon-v}^+(0) &= A_\varepsilon[1 - f_{-\varepsilon-v}^-(0)] + N_\varepsilon f_{\varepsilon-v}^-(0) + T_\varepsilon f_\varepsilon^{\text{out}}, \\ f_{\varepsilon+v}^-(L) &= A_\varepsilon[1 - f_{-\varepsilon+v}^+(L)] + N_\varepsilon f_{\varepsilon+v}^+(L) + T_\varepsilon f_\varepsilon^{\text{out}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее слагаемое в правой части уравнений определяется электронами, которые попадают в участок между контактами из внешней части края. В предположении, что внешний размер достаточно велик, функция распределения $f_\varepsilon^{\text{out}}$ представляет собой функцию Ферми, $f_\varepsilon^{\text{out}} = [1 + \exp(\varepsilon/T)]^{-1}$, где T — температура. Коэффициенты андреевского A_ε и нормального N_ε отражения и T_ε прохождения дают в сумме 1, поскольку электрон либо претерпевает отражение, либо проходит сквозь контакт: $A_\varepsilon + N_\varepsilon + T_\varepsilon = 1$.

Для вычисления коэффициентов нормального и андреевского отражения запишем уравнения Боголюбова с учетом спин-орбитального взаимодействия (2)

$$(\varepsilon \pm iv_F \partial_x) \chi_\varepsilon^\pm(x) = \Delta[\chi_\varepsilon^\mp(x) \pm \eta \chi_{-\varepsilon}^\pm(x)]. \quad (6)$$

Система этих уравнений запутывает между собой четыре оператора спиральных состояний в топологическом изоляторе: $\chi_{\pm\varepsilon}^\pm(x) = \psi_{+, \pm\varepsilon}(x)$ электронов со спиральностью «+» и с энергией $\pm\varepsilon$, и $\chi_{\pm\varepsilon}^\mp(x) = \psi_{-, \mp\varepsilon}(x)$ дырки со спиральностью “-” и с энергией $\mp\varepsilon$.

Решая систему (6) внутри ($\Delta \neq 0$) и вне ($\Delta = 0$) сверхпроводящего контакта и учитывая непрерывность функций $\chi_\varepsilon^\pm(x)$ на границах, можем определить коэффициенты андреевского и нормального отражений

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \Theta \left\{ \text{Re}^2 \left[(1 + i\eta) k_\varepsilon \text{ctg} \left(\frac{k_\varepsilon l}{\xi} \right) \right] + \left(\frac{\varepsilon}{\Delta} \right)^2 \right\}, \\ N_\varepsilon &= \Theta \left(\frac{\varepsilon}{\Delta} \right)^2 \text{Im}^2 \left[k_\varepsilon \text{ctg} \left(\frac{k_\varepsilon l}{\xi} \right) \right], \\ \Theta &= 4 \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\Delta} \right)^2 + (1 + \eta^2) + |k_\varepsilon|^2 \left[\left| 1 + \text{ctg}^2 \left(\frac{k_\varepsilon l}{\xi} \right) \right| + \left| \text{ctg}^2 \left(\frac{k_\varepsilon l}{\xi} \right) \right| \right] \right\}^{-2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $k_\varepsilon = [(\varepsilon/\Delta)^2 - (1 - i\eta)^2]^{1/2}$ — безразмерный волновой вектор спиральных состояний в сверхпроводящем контакте.

В предельном случае отсутствия спин-орбитального взаимодействия, $\eta = 0$, отсутствует нормальное отражение $N_\varepsilon^{(0)} = 0$, а коэффициент андреевского отражения $A_\varepsilon^{(0)}$ описывается следующим выражением:

$$A_\varepsilon^{(0)} = \left[\left(\frac{\varepsilon}{\Delta} \right)^2 + k_\varepsilon^2 \text{ctg}^2 \left(\frac{k_\varepsilon l}{\xi} \right) \right]^{-1}. \quad (8)$$

Уравнение Больцмана (3) совместно с граничными уравнениями (5) позволяет определить функции распределения $f_\varepsilon^\pm(x)$ в топологическом изоляторе. Ниже представим численную схему решения этой задачи для малых значений параметров рассеяния ζ и спин-орбитального взаимодействия η .

Сначала решим задачу аналитически при $\zeta = \eta = 0$. В этом случае функции распределения $f_\varepsilon^\pm(x)$ оказываются не зависимыми от координаты x , поскольку нет рассеяния электронов внутри топологического изолятора, а нормальное отражение отсутствует, $N_\varepsilon^{(0)} = 0$.

Это позволяет взаимно исключить из уравнений (5) функции f_ε^\pm и решить полученные рекуррентные соотношения в явной форме:

$$f_\varepsilon^{\pm(0)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\prod_{m=0}^{l-1} A_{\varepsilon \pm (2m+1)v}^{(0)} \right] [1 - A_{\varepsilon \pm (2l+1)v}^{(0)}] f_{\varepsilon \pm (2l+1)v}^{\text{out}}. \quad (9)$$

Теперь перейдем к случаю, когда один или оба параметра ζ и η отличны от нуля. Для численного решения удобно перейти от непрерывного уравнения по ε к дискретному. Для этого выберем сетку $\varepsilon_n = vn/n_0$ для $n = -Mn_0, \dots, -1, 0, 1, \dots, Mn_0$, где M — целое число, определяющее границы сетки, которое следует выбирать из условия $Mv \gg \Delta$. Такая сетка удобна в том смысле, что если значение ε принадлежит сетке, т. е. $\varepsilon = \varepsilon_n$, то и остальные значения в индексах функций распределения в уравнениях (5) также принадлежат сетке: $\varepsilon_n \pm v = \varepsilon_{n \pm n_0}$ и $-\varepsilon_n \pm v = \varepsilon_{-n \pm n_0}$.

Усредним уравнение (3) вдоль рассматриваемого участка топологического изолятора:

$$f_\varepsilon^\pm(L) - f_\varepsilon^\pm(0) = \pm \zeta J_\varepsilon^\pm, \quad (10)$$

где $J_\varepsilon^\pm = \int_0^L (dx/L) I_\varepsilon^\pm(x)$ — усредненный вдоль участка интеграл столкновений, и исключим с его помощью $f_\varepsilon^-(L)$ и $f_\varepsilon^+(0)$ из уравнений (5), а затем взаимно исключим из полученных уравнений $f_\varepsilon^+(L)$ и $f_\varepsilon^-(0)$. В результате получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} (1 - N_n N_{n \mp 2n_0}) \phi_{n \mp n_0}^\pm - A_n A_{n \pm 2n_0} \phi_{n \pm 3n_0}^\pm + A_n N_{n \pm 2n_0} \phi_{-n \mp n_0}^\pm + N_n A_{n \mp 2n_0} \phi_{-n \pm 3n_0}^\pm = \\ = A_n T_{n \pm 2n_0} \phi_{n \pm 2n_0}^{\text{out}} + N_n T_{n \mp 2n_0} \phi_{n \mp 2n_0}^{\text{out}} + T_n \phi_n^{\text{out}} \pm \zeta (A_n J_{-n \mp n_0}^\mp - N_n J_{n \mp n_0}^\mp + J_{n \mp n_0}^\pm) \end{aligned} \quad (11)$$

относительно неизвестных значений

$$\phi_n^+ = f_{\varepsilon_n}^+(L) - \frac{1}{2}, \quad \phi_n^- = f_{\varepsilon_n}^-(0) - \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Здесь номер в нижнем индексе функции указывает на номер узла сетки, в котором вычислено значение функции. При этом, если номер узла оказывается за пределами сетки, то будем определять значение ϕ_n^\pm следующим образом:

$$\phi_n^\pm = \frac{1}{2}, \quad n < -Mn_0; \quad \phi_n^\pm = -\frac{1}{2}, \quad n > Mn_0, \quad (13)$$

поскольку функции распределения f_ε^\pm стремятся к 0 при $\varepsilon \gg \Delta$ и к 1 при $-\varepsilon \gg \Delta$.

На рис. 3 представлены зависимости дифференциальной функций распределения правобегущих электронов от энергии на левом контакте $-\partial f_\varepsilon^+(0)/\partial \varepsilon$ для нескольких значений параметров силы рассеяния ζ и спин-орбитального взаимодействия η . Остальные параметры $eV/\Delta = 0,5$, $T/\Delta = 0,02$, $l/\xi = 1,5$. Все кривые имеют особенности при значениях энергии $\varepsilon = eV(n + 1/2)$, где n — целое число. Эти особенности связаны с многократными андреевским и нормальным отражениями. Основные отличия между кривыми наблюдаются в структуре особенностей при $\varepsilon > 0$: если спин-орбитальное взаимодействие отсутствует, $\eta = 0$, то особенности при $\varepsilon > 0$ отсутствуют. Чем сильнее спин-орбитальное взаимодействие η , тем больше вклад нормального отражения, и особенности при $\varepsilon > 0$ больше выражены. В свою очередь рассеяние электронов при $\zeta > 0$ приводит к тому, что функция распределения сглаживается и особенности уменьшаются.

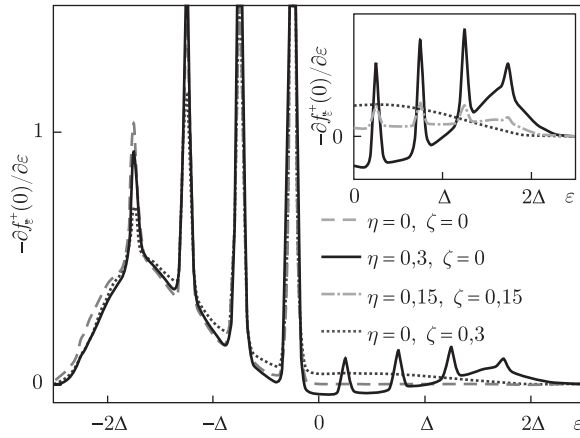


Рис. 3. График зависимости дифференциальной функции распределения на левом контакте от энергии для некоторых значений силы рассеяния ζ и спин-орбитального взаимодействия η

Таким образом, в работе получены аналитические выражения для коэффициентов нормального и андреевского отражения, составлены и решены численно и аналитически уравнения для функций распределения спиральных электронов по энергиям и определены качественные отличия во влиянии различных факторов на электронный транспорт в двухмерном топологическом изоляторе. Полученные результаты позволяют в эксперименте определять соотношение вкладов от нормального отражения от сверхпроводящего контакта и от электрон-электрон-примесного рассеяния на краю, влияющих на квантовый электронный транспорт в топологическом изоляторе.

1. Wu C., Bernevig B. A., Zhang S.-C. Helical liquid and the edge of quantum spin Hall systems // Phys. Rev. Lett. – 2006. – **96**. – 106401, 4 p.
2. König M., Wiedmann S., Brüne C. et al. Quantum spin hall insulator state in HgTe quantum wells // Science. – 2007. – **318**. – P. 766–770.
3. Knez I., Du R.-R., Sullivan G. Evidence for helical edge modes in inverted InAs/GaSb quantum wells // Phys. Rev. Lett. – 2011. – **107**. – 136603, 4 p.
4. Roth A., Brune C., Buhmann H. et al. Nonlocal transport in the quantum spin Hall state // Science. – 2009. – **325**. – P. 294–297.
5. Nowack K. C., Spanton E. M., Baenninger M. et al. Imaging currents in HgTe quantum wells in the quantum spin Hall regime // Nature Materials. – 2013. – **12**. – P. 787–791.
6. Xu C., Moore J. E. Stability of the quantum spin Hall effect: Effects of interactions, disorder, and \mathbb{Z}_2 topology // Phys. Rev. B. – 2006. – **73**. – 045322, 7 p.
7. Tanaka Y., Furusaki A., Matveev K. A. Conductance of a helical edge liquid coupled to a magnetic impurity // Phys. Rev. Lett. – 2011. – **106**. – 236402, 4 p.
8. Schmidt T. L., Rachel S., Oppen F. V., Glazman L. I. Inelastic electron backscattering in a generic helical edge channel // Ibid. – 2012. – **108**. – 156402, 5 p.
9. Väyrynen J. I., Goldstein M., Glazman L. I. Helical edge resistance introduced by charge puddles // Phys. Rev. Lett. – 2013. – **110**. – 216402, 5 p.

Институт радиофизики и электроники
им. А. Я. Усикова НАН Украины, Харьков
Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 18.09.2014

С. С. Апостолов

Багатократне андріївське відбиття у двовимірному топологічному ізоляторі

Електронний транспорт на межі двовимірного топологічного ізолятора між двома надпровідними електродами визначається багатократними андріївськими відбиттями. В роботі пропонується модель такого транспорту з урахуванням андріївського та нормального відображення на контакті та електрон-електрон-домішкового розсіювання на межі. На підставі цієї моделі обчислюються функції розподілу і визначаються характерні особливості, що виникають в результаті зазначених явищ. Отримані результати дозволяють в експерименті визначати співвідношення вкладів від нормального відбиття на надпровідному контакті та від електрон-електрон-домішкового розсіювання на межі, що впливають на квантовий електронний транспорт у топологічному ізоляторі.

S. S. Apostolov

Multiple Andreev reflection in a two-dimensional topological insulator

The electronic transport at the edge of a two-dimensional topological insulator between two superconducting electrodes is determined by multiple Andreev reflections. We propose a model of such transport with regard for both Andreev and normal reflections at the contact and the electron-electron-impurity scattering at the edge. Based on this model, we calculate the distribution functions and define the features resulting from these phenomena. The results allow one to determine experimentally the ratio of the contributions of the normal reflection from the superconducting contact and the electron-electron-impurity scattering on the edge affecting the quantum electron transport in a topological insulator.