УДК 539.3

**В. Г. Карнаухов, В. И. Козлов, Т. В. Карнаухова**

# Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоактуаторов при активном демпфировании колебаний прямоугольной пластины

*(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)*

*На основе уточненной модели С. П. Тимошенко исследовано влияние деформаций сдвига на эфективность активного демпфирования вынужденных резонансных колебаний вязкоупругой прямоугольной пластины при помощи пьезолектрического актутаора.*

Проблема демпфирования колебаний тонкостенных элементов конструкций является актуальной для многих областей современной техники: авиа-, судо-, турбостроения, строительства, электроники и др. Для этой цели широкое распространение получило пассивное демпфирование колебаний, при котором амплитуда колебаний уменьшается за счет включения в конструкцию компонент с высокими гистерезисными потерями, например, вязкоупругих слоев [1–4]. В последние годы для демпфирования колебаний стержней, пластин и оболочек широко применяются активные методы, основанные на использовании пьезоэлектрических компонент. Одним из основных методов активного демпфирования колебаний является метод, базирующийся на использовании пьезоактуаторов. При этом в структуру тонкостенной конструкции включаются пьезослои, выполняющие функции актуаторов. К ним подводится разность потенциалов, которая компенсирует механическую нагрузку, так что при совместном действии механической и электрической нагрузок уровень колебаний существенно уменьшается. При использовании такого метода основной задачей является расчет указанной разности потенциалов, которая зависит от многих факторов: механических граничных условий, размещения актуаторов, их размеров и др. Обзор исследований по этим вопросам представлен, например, в [5–10]. Для описания механического поведения тонкостенных элементов можно выбирать различные гипотезы. Если они изготовлены из анизотропного материала и их толщина недостаточно мала, использование классических гипотез Кирхгоффа–Лява может привести к значительным погрешностям при расчете указанной разности потенциалов. В святи с этим возникает необходимость при решении этого вопроса применять уточненные модели тонкостенных элементов, основанные, например, на гипотезах С. П. Тимошенко.

В настоящей статье получено аналитическое решение задачи об активном демпфировании колебаний шарнирно опертой прямоугольной пластины при помощи пъезоактуаторов. Для моделирования колебаний пластины используются гипотезы С. П. Тимошенко [11–13]. Рассматривается пластина из ортотропного и трансверсально-изотропного вязкоупругого материала. Для последнего случая получена очень простая формула для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки при резонансных колебаниях.

**Постановка задачи.** Рассмотрим ортотропную вязкоупругую пластину толщиной $h_0$ размером $a \times b$. Края пластины шарнирно оперты. На верхней и нижней поверхностях пластины нанесены пъезослои толщиной $h_1$ с противоположной поляризацией. На пластину действует равномерно распределенное гармоническое во времени давление $p(t) = P_0 e^{i\omega t}$ с частотой, близкой к резонансной. Для моделирования механического поведения такой пластины применяются гипотезы С. П. Тимошенко. Универсальные соотношения (уравнения движения, кинематические соотношения, механические граничные условия), описывающие колебания пластины на основе этих гипотез, известны и представлены, например, в монографии [13].

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + p(t) = \widetilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = 0. \tag{1}$$

Кинематические характеристики определяются формулами [13]

$$\chi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \chi_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_1, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_2, \tag{2}$$

где $w$ — поперечный прогиб; $\varphi_1$, $\varphi_2$ характеризуют сдвиг в выражениях (2). Для гипотез Кирхгоффа–Лява $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$.

Специфика электромеханического поведения указанной трехслойной пластины описывается определяющими уравнениями для моментов $M_{11}$, $M_{22}$, $H$ и сдвиговых усилий $T_{13}$, $T_{23}$:

$$\begin{aligned} &M_{11} = D_{11}(\chi_1 + \nu_{21}\chi_2) + M_0, \qquad M_{22} = D_{22}(\nu_{12}\chi_1 + \chi_2) + M_0, \\ &H = D_{12}\chi_{12}, \qquad T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}, \qquad T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$M_0 = (h_0 + h_1)\gamma_{31} V_a, \qquad \gamma_{31} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E(1-\nu)}, \qquad \nu = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}. \tag{4}$$

Здесь приняты обозначения [14, 15].

За счет наличия пъезослоев жесткостные характеристики в (3) модифицируются [14, 15]. Подставляя (2) в (3), а полученный результат — в (1), записываем три уравнения движения относительно $w$, $\varphi_1$, $\varphi_2$:

$$\begin{aligned} &B_{13}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) + B_{23}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) + p(t) + \left(\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}\right) = \widetilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ &D_{11}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \nu_{21}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}\right) + D_{12}\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}\right) - B_{13}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_1\right) = 0, \\ &D_{22}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \nu_{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}\right) + D_{12}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}\right) - ?_{23}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_2\right) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

**Решение задачи.** Для шарнирного опирания торцов пластины при колебаниях по моде $(m, n)$, когда

$$\begin{aligned} &P_0 = p_{mn}\sin k_m x \sin p_n y, \qquad M_0 = M_{mn}\sin k_m x \sin p_n y, \qquad k_m = \frac{m\pi}{a}, \\ &p_n = \frac{n\pi}{b}, \qquad p_{mn} = \frac{16P_0}{abk_m p_n}, \qquad M_{mn} = \frac{16M_0}{abk_m p_n}, \end{aligned} \tag{6}$$

решение системы (5) может быть представлено в виде

$$
\begin{aligned}
&w = w_{mn}\sin k_m x \sin p_n y,\\
&\varphi_1 = \varphi_{1mn}\cos k_m x \sin p_n y, \qquad \varphi_2 = \varphi_{2mn}\sin k_m x \sin p_n y.
\end{aligned} \tag{7}
$$

В результате из (1)–(6) получим следующие обыкновенное дифференциальное уравнение, которое описывает изгибные колебания ортотропной пластины при совместном действии механической и электрической нагрузок:

$$
\widetilde{\rho}\ddot{w}_{mn} + A^1_{mn}w_{mn} + A^2_{mn}M_{mn} - P_{mn} = 0. \tag{8}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
A^1_{mn} &= B_{13}k_m\frac{\Delta_{13}\Delta_{22}-\Delta_{23}\Delta_{12}}{\Delta} + B_{12}p_n\frac{\Delta_{23}\Delta_{11}-\Delta_{13}\Delta_{21}}{\Delta},\\
A^2_{mn} &= B_{13}k_m\frac{\Delta_{01}\Delta_{22}-\Delta_{02}\Delta_{12}}{\Delta} + B_{23}p_n\frac{\Delta_{02}\Delta_{11}-\Delta_{01}\Delta_{21}}{\Delta}.
\end{aligned}
$$

Для ортотропного материала:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{11} = k_m^2D_{11} + p_n^2D_{12} + B_{13}, \qquad \Delta_{22} = k_m^2D_{12} + p_n^2D_{22} + B_{23},\\
&\Delta_{12} = -(D_{11}\nu_{12} + D_{12})k_m p_n = \Delta_{21}, \qquad \Delta_{13} = -\Delta_{01}B_{13}, \qquad \Delta_{01} = k_m,\\
&\Delta_{23} = -\Delta_{02}B_{23}, \qquad \triangle_{02} = p_n, \qquad \Delta = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Для трансверсально-изотропного материала:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{11} = \left(k_m^2 + \frac{1-\nu}{2}p_n\right)D + B', \qquad \Delta_{22} = \left(\frac{1-\nu}{2}k_m^2 + p_n^2\right)D + B',\\
&\Delta_{12} = \Delta_{21} = \frac{1+\nu}{2}Dk_m p_n, \qquad \Delta_{13} = -k_m B',\\
&\Delta_{23} = -p_n B', \qquad B' = hk^2G', \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Gh^3}{6(1-\nu^2)}, \qquad k^2 = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Для трансверсально-изотропного материала в уравнении (8)

$$
A^1_{mn} = D\frac{(k_m^2+p_n^2)^2}{1+c(k_m^2+p_n^2)}, \qquad A^2_{mn} = D\frac{(k_m^2+p_n^2)^2}{1+c(k_m^2+p_n^2)}, \qquad c = \frac{D}{B'}. \tag{11}
$$

**Анализ решения.** Из уравнения (8) для резонансных гармонических колебаний получаем

$$
w_{mn} = \frac{P_{mn} - A^2_{mn}M_{mn}}{A^2_{mn} - \widetilde{\rho}\omega^2}. \tag{12}
$$

Из формулы (12) видно, что резонансная частота

$$
\omega^p_{mn} = \sqrt{\frac{A^2_{mn}}{\widetilde{\rho}}} \tag{13}
$$

Из той же формулы следует, что, если

$$M_{mn} = \frac{P_{mn}}{A_{mn}^2}, \tag{14}$$

при учете вязкости

$$w_{mn} = 0. \tag{15}$$

Для трансверсально-изотропного материала из (8) и (11) имеем $w_{mn} = 0$ при

$$V_a = \frac{P}{(h_0 + h_1)\gamma_{31}} \frac{1}{k_m^2 + p_n^2} [1 + c(k_m^2 + p_n^2)], \tag{16}$$

или

$$V_a^T = V_a^K [1 + c(k_m^2 + p_n^2)], \tag{17}$$

где $V_a^T$, $V_a^K$ — разность потенциалов, рассчитанная по гипотезе С. П. Тимошенко и Кирхгоффа–Лява соответственно. Как видно из (17), для компенсации механической нагрузки учет сдвига приводит к увеличению разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации заданной механической нагрузки.

Если выбрать поправочный коэффициент $k^2 = \pi^2/12$, то в формуле (17)

$$c = \left(\frac{D}{B'}\right) = \left(\frac{2}{1-\nu}\right)\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2 \left[m^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 n^2\right].$$

Тогда

$$V_a^{yt} = V_a^{kl} \left\{1 + \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2 \left[m^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 n^2\right]\right\}. \tag{18}$$

Для основной моды $m = n = 1$ и из формулы (18) следует

$$V_a^{yt} = V_a^{kl} \left\{1 + \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\right\}. \tag{19}$$

При этом поправка к классическому результату зависит от отношения модулей сдвигов трансверсально-изотропного материала $(G/G')$ и отношения толщины пластины к планарному размеру $a$. В зависимости от их значений величина поправки может быть достаточно большой.


1. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
2. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. – Москва: Мир, 1988. – 448 с.
3. *Савченко Е. В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкцій. – Нежин: ООО “Изд.-во Аспект – Полиграф”. – 2006. – 232 с.
4. *Jones D. I. G.* Handbook of viscoelastic vibration damping. – New York: Wiley, 2001. – 410 p.
5. *Batra R. C., Porfiri M., Spinello D.* Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems // Smart Mater. Struct. – 2007. – **16**. – P. R23-R31.
6. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer, 2001. – 384 p.
7. *Encyclopedia* of smart materials (by Mel Schwartz). – New York: Wiley, 2002. – 1176 p.

8. *Rao S. S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. mech. rev. – 1994. – **47**, No 44. – P. 113–123.
9. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Ibid. – 1998. – **51**, No 8. – P. 505–521.
10. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.
11. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.* Уточнена термомеханічна модель композитних оболонок типу Тимошенка з розподіленими трансверсально-ізотропними актуаторами при моногармонічному навантаженні // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 84–95.
12. *Карнаухов В. Г., Жук Я. А., Карнаухова Т. В.* Уточнена термомеханічна модель вимушених гармонічних коливань фізично нелінійної оболонки з розподіленими трансверсально-ізотропними актуаторами // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 50–55.
13. *Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: Изд.-полиграф. центр "Киев. университет", 2005. – 536 с.
14. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. – Т. 5. – Киев: Наук. думка, 1989. – 290 с.
15. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. – Т. 4. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко*
*НАН Украины, Киев*
*НТУ Украины "Киевский политехнический институт"*

*Поступило в редакцию 01.10.2014*

**В. Г. Карнаухов, В. І. Козлов, Т. В. Карнаухова**

## Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоактуаторів при активному демпфуванні коливань прямокутної пластини

*На основі уточненої моделі С. П. Тимошенка досліджено вплив деформацій зсуву на ефективність активного демпфування вимушених резонансних коливань прямокутної пластин за допомогою п'єзоелектричних актуторів.*

**V. G. Karnaukhov, V. I. Kozlov, T. V. Karnaukhova**

## Influence of shear deformations on the effective work of piezoelectric actuators under the active damping of vibrations of a rectangular plate

*On the base of refined Timoshenko' model, the influence of the shear deformations on the effectiveness of the active daming of forced resonance vibrations of the rectangular plates by the piezoelectric actuators is investigated.*