УДК 517.9+514.8

В. І. Легенький

Теоретико-груповий аналіз розв'язків д'Аламбера основного рівняння зовнішньої балістики

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Розглянуто основне рівняння зовнішньої балістики та доведено, що всі запропоновані д'Аламбером у 1744 р. спеціалізації функції аеродинамічного опору перетворюють це рівняння на таке, яке допускає фундаментальну систему розв'язків у сенсі Лі–Шеферса. Саме завдяки цій прихованій властивості воно зводиться до класичних рівнянь Бернуллі та Ріккаті.

Основне рівняння зовнішньої балістики від початку 18 ст. і дотепер привертає увагу фахівців у галузі диференціальних рівнянь. Пошуком його розв'язків у різні часи займались Ж. Л. д'Аламбер (1744) [1], Л. Ейлер (1753) [2], А.-М. Лежандр (1782), К.-Г. Якобі (1842), Ф. Сіаччі (1901) [3], Ж. Драш (1920) [4], М. Куренський (1931–1934) [5, 6]. Цьому рівнянню присвячені відповідні розділи в класичних підручниках з механіки та балістики, воно ввійшло у відомий довідник Е. Камке [7, с. 543–544]. Основне рівняння зовнішньої балістики з'являється при розгляді рівнянь руху будь-якого тіла, що кинуте у вертикальній площині під деяким кутом до горизонту.

Рівняння руху можуть бути подані системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dH}{dt} = V\sin\theta, \qquad \frac{dL}{dt} = V\cos\theta, \qquad \frac{dV}{dt} = -\frac{F(V)}{m} - g\sin\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{V}, \tag{1}$$

де H — висота, L — дальність, V — швидкість, θ — кут нахилу траєкторії, m — маса тіла, g — прискорення сили тяжіння, $F(V)$ — сила аеродинамічного опору.

Внаслідок припущення, що $(m,\, g)$ — константи, які можуть бути "усунуті" з рівнянь перетвореннями еквівалентності, та з огляду на те, що праві частини рівнянь не залежать від H, L, t (система інваріантна відносно зсувів у часі і просторі), визначальним ("розв'язуючим") виявляється рівняння між швидкістю та кутом нахилу траєкторії, а саме:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{V(F(V) + \sin\theta)}{\cos\theta}. \tag{2}$$

Це рівняння називається основним рівнянням балістики, або рівнянням годографа. Якщо вдається розв'язати рівняння (2), решта рівнянь системи (1) інтегрується в квадратурах [6].

Складність інтегрування рівняння (2) полягає в тому, що функція опору $F(V)$, яка фігурує в правій частині цього рівняння, не є апріорі визначеною функцією (вона не має точної теоретичної спеціалізації). Багато зусиль було докладено балістиками для з'ясування цієї залежності, але загальноприйнятої отримано не було. Зважаючи на це, д'Аламбер [1] поставив задачу про знаходження такого вигляду функції $F(V)$, при якому рівняння (2) інтегрується в квадратурах. Він встановив чотири спеціалізації, що задовольняють попередньо висунуту вимогу, а саме:

$$
\begin{aligned}
&1)\ F(V) = aV^n + b,\\
&2)\ F(V) = a\ln V + b,\\
&3)\ F(V) = aV^n + bV^{-n} + c,\\
&4)\ F(V) = a\ln^2 V + b\ln V + c,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

та для цих випадків проінтегрував рівняння (2). Він також зауважив, що цей перелік функцій, можливо, не є вичерпним.

Зазначимо, що довільні константи (a, b, c, n), що характеризують вказані функції, можуть бути використані при апроксимації реальних залежностей, здобутих експериментальним шляхом.

д'Аламбер не запропонував методу для знаходження таких спеціалізацій, тому мета даної публікації — проінтерпретувати результат д'Аламбера з сучасних теоретико-групових позицій.

Щоб з'ясувати, чи можливі на цьому шляху якісь інші спеціалізації, будемо спиратись на теоретичний доробок С. Лі, а саме на його теорію фундаментальних розв'язків та пов'язану із нею теорію неперервних груп перетворень одновимірного простору [8, 9]. Як показав Лі, рівняння першого порядку

$$\frac{dV}{d\theta} = f(V, \theta)$$

може допускати систему фундаментальних розв'язків, якщо і тільки якщо його можна подати у вигляді

$$\frac{dV}{d\theta} = \xi^1(V)\eta^1(\theta) + \xi^2(V)\eta^2(\theta) + \xi^3(V)\eta^3(\theta),$$

де оператори

$$X_i = \xi^i(V)\partial_V, \qquad i = \overline{1,3}, \tag{4}$$

утворюють алгебру Лі проективних перетворень прямої, яка ізомофна алгебрі Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ або одній з її підалгебр.

Тому задача знаходження специфікацій функції $F(V)$ може бути поставлена таким чином: з'ясувати, при яких $F(V)$ оператори (4), які асоційовані з вихідним рівнянням (2), є подібними до вказаної проективної алгебри Лі проективної групи, та знайти перетворення подібності. Відповідь на останнє запитання дав також С. Лі в роботі [9]. Зокрема, ним було доведено таке твердження:

Твердження 1 [9, с. 24–26]. *Визначальне рівняння неперервної групи одновимірного многовиду завжди має один із таких виглядів:*

$$
\begin{cases}
\xi' + \alpha(V)\xi = 0,\\
\xi'' + \alpha(V)\xi' + \alpha'(V)\xi = 0,\\
\xi''' + 2\alpha(V)\xi' + \alpha'(V)\xi = 0,
\end{cases}
\tag{5}
$$

та заміною змінних ($\widehat{V} = \Phi(V)$, $\widehat{\xi} = \xi\Phi'(V)$) *завжди може бути спрощено до канонічного вигляду:*

$$\widehat{\xi}' = 0, \qquad \widehat{\xi}'' = 0, \qquad \widehat{\xi}''' = 0, \qquad (\,)' = \frac{d}{d\widehat{V}},$$

а функція $\Phi(V)$ *задовольняє такі рівняння: у перших двох випадках*

$$\Phi'' = \alpha\Phi', \tag{6}$$

а у третьому випадку

$$\Phi'\Phi''' - \frac{3}{2}(\Phi'')^2 = \alpha(\Phi')^2. \tag{7}$$

Таким чином, алгоритм побудови належних специфікацій пропонується в такому вигляді:

1) задаємося розмірністю $r \leqslant 3$ підалгебри алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$;

2) по одному з фіксованих коефіцієнтів операторів (в даному випадку $\xi^1 = V$) за допомогою відповідного рівняння системи (5) знаходимо функцію $\alpha(V)$;

3) за знайденою функцією $\alpha(V)$ знаходимо загальний розв'язок відповідного рівняння (5) та, прирівнюючи його до невідомого коефіцієнта $\xi^2(V)$ (у даному випадку — $VF(V)$), знаходимо специфікацію функції $F(V)$;

4) за формулами (6) або (7) знаходимо відповідні перетворення подібності ($\widehat{V} = \Phi(V)$), які зводять систему (5) та вихідне рівняння до канонічного вигляду.

Розглянемо послідовно асоційовані з вихідним рівнянням рівняння, що мають фундаментальну систему розв'язків з розмірністю підалгебри $r = 1, 2, 3$ алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Випадок $r = 1$. Підстановка $\xi = V$ у перше рівняння системи (5) дає

$$1 + \alpha(V)V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(V) = -\frac{1}{V}.$$

Загальний розв'язок першого рівняння системи (5)

$$\xi' - \frac{1}{V}\xi = 0$$

є $\xi = C_1V$. З рівності $VF(V) = C_1V$ знаходимо $F(V) = C_1 = \text{const}$. Додаткових перетворень змінної V для цього випадку непотрібно.

Випадок $r = 2$. З другого рівняння системи (5) для $\xi = V$ знаходимо рівняння на $\alpha(V)$:

$$\alpha(V) + \alpha'(V)V = 0, \qquad \text{звідки} \qquad \alpha(V) = \frac{C_1}{V}.$$

Доцільно обрати сталу $C_1 = -n$, тоді для загального розв'язку (5) отримаємо рівняння

$$V^2\xi'' - nV\xi' + n\xi = 0,$$

яке, відповідно, має своїм розв'язком функцію

$$\xi(V) = \begin{cases} C_1V + C_2V^n, & n \neq 1, \\ C_1V + C_2V\ln V, & n = 1. \end{cases}$$

Відповідно, розв'язуючи рівняння $\xi(V) = VF(V)$, маємо

$$F(V) = \begin{cases} C_1 + C_2 V^{n-1}, \\ C_1 + C_2 \ln V. \end{cases}$$

Перетворення, що зводять рівняння (2) до лінійного відносно $\widehat{V}$ вигляду, є такими:

$$\widehat{V} = \Phi(V) = \begin{cases} V^{1-n}, & n \neq 1, \\ \ln V, & n = 1. \end{cases}$$

Випадок $r = 3$. Третє рівняння системи (5) при $\xi(V) = V$ дає

$$2\alpha(V) + \alpha'(V)V = 0, \qquad \text{звідки} \qquad \alpha(V) = \frac{C_1}{V^2}.$$

Так само, для спрощення подальших перетворень приймаємо $C_1 = 1 - n^2$. Відповідно, для $\xi(V)$ отримуємо рівняння

$$V^3\xi''' + (1 - n^2)V\xi' - (1 - n^2)\xi = 0,$$

яке має загальний розв'язок

$$\xi(V) = \begin{cases} C_1 V + C_2 V^{1+n} + C_3 V^{1-n}, & n \neq 0, \\ C_1 V + C_2 V \ln V + C_3 V \ln^2 V, & n = 0. \end{cases}$$

Відповідно, для $F(V)$ отримуємо:

$$F(V) = \begin{cases} C_1 + C_2 V^n + C_3 V^{-n}, \\ C_1 + C_2 \ln V + C_3 \ln^2 V. \end{cases}$$

Розв'язки рівняння (7), відповідно, дають

$$\widehat{V} = \Phi(V) = \begin{cases} \dfrac{2n(1 + V^n)}{(1 - V^n)}, & n \neq 0, \\ (\ln V)^{-1}, & n = 0. \end{cases}$$

Таким чином, ми довели нижченаведений результат.

Твердження 2. *Спеціалізації д'Аламбера* (3) *довільної функції* $F(V)$ *і тільки вони перетворюють основне рівняння зовнішньої балістики на таке, яке допускає фундаментальну систему розв'язків.*

Отже, базуючись на фундаментальних результатах Лі, ми запропонували алгоритм знаходження специфікацій довільної функції $F(V)$, при яких вихідне рівняння є таким, яке допускає фундаментальну систему розв'язків. Ми також знайшли відповідні перетворення, що редукують вихідне рівняння до лінійного рівняння (випадки $r = 1, 2$) або рівняння Ріккаті (випадок $r = 3$). Знайдені специфікації збігаються (з точністю до позначень) з тими, які знайшов д'Аламбер у 1744 р. Отриманий результат має не тільки теоретичне, а й методологічне значення, відкриваючи шлях до часткової групової класифікації рівнянь першого порядку з довільною функцією одного аргументу.

1. *d'Alembert J. L.* Traite de l'équilibre et du mouvement des fluides. – Paris, 1744. – 458 p.
2. *Эйлер Л.* Исследования по баллистике. – Москва: Физматгиз, 1961. – 590 с.
3. *Siacci F.* Sur un probléme de d'Alembert // C. r. Acad. Sci. – 1901. – **132**. – P. 1175–1178; **133**. – P. 381–382.
4. *Drach J.* L'équation différentielle de la balistique extériure et son intégration par quadratures // Ann. sci. École Norm. Supér. Sér. 3. – 1920. – **37**. – P. 1–94.
5. *Kourensky M.* Sur l'équation fondamentale de la balistiqe extérieure // C. r. Acad. Sci. – 1931. – **193**. – P. 571–572.
6. *Куренськuй М. К.* Літ снаряда: Основна задача зовнішньої балістики про літ снаряда. – Київ: Вид-во ВУАН, 1934. – 139 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 4-е изд., испр. – Москва: Наука, 1971. – 576 с.
8. *Ли С.* Теория групп преобразований. В 3 ч.: Ч. 3. – Москва; Ижевск: Ижев. ин-т компьютер. исследований, 2013. – 937 с.
9. *Ли С.* Симметрии дифференциальных уравнений. Лекции о непрерывных группах с геометрическими и другими приложениями. Т. 2. – Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. – 840 с.
10. *Яковенко Г. Н.* Дифференциальные уравнения с фундаментальными решениями: Софус Ли и другие. – Москва: Физматкнига, 2006. – 112 с.

Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, Київ

Надійшло до редакції 25.09.2014

В. И. Легенький

Теоретико-групповой анализ решений д'Аламбера основного уравнения внешней баллистики

Рассмотрено основное уравнение внешней баллистики и доказано, что все предложенные д'Аламбером в 1744 г. специализации функции аэродинамического сопротивления превращают указанное уравнение в такое, которое допускает систему фундаментальных решений в смысле Ли–Шefферса. Именно благодаря этому скрытому свойству оно сводится к классическим уравнениям Бернулли и Риккати.

V. I. Lehenkyi

The group-theoretic analysis for d'Alembert's solutions of the basic equation of exterior ballistics

We consider the basic equation of exterior ballistics and prove that all specializations of the drug function presented by d'Alembert in 1744 transform this equation to some Lie–Sheffers equation. Due to this hidden property, it can be converted to the classical Bernoulli or Riccati equations.