

И. А. Лоза

## О распространении осесимметричных электроупругих волн в полом цилиндре из функционально градиентного пьезокерамического материала

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

*Проведен кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в неоднородном по толщине полом цилиндре из функционально градиентного материала, поляризованного в радиальном направлении при электрическом способе возбуждения волн. Свойства материала цилиндра изменяются по экспоненциальному закону в направлении радиальной координаты. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты бесконечно тонкими электродами, к которым приложена гармонически изменяющаяся разность потенциалов  $\pm V_0 e^{i(kz - \omega t)}$ . Для решения этой задачи предложен эффективный численно-аналитический метод. После применения метода разделения переменных и представления решения в виде бегущих волн по длине цилиндра начальная задача теории электроупругости в частных производных сводится к неоднородной краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Полученная система решается устойчивым методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты численных исследований для цилиндра из функционально градиентной пьезокерамики PZT 4.*

В данной работе рассматривается осесимметричная задача о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в неоднородном по толщине полом цилиндре из функционально градиентной пьезокерамики, поляризованной в радиальном направлении. Первые наборы частных решений дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений Ламе) в цилиндрических координатах были построены в работах Похгаммера [1] и Кри [2, 3]. С того времени выполнено значительное количество работ, посвященных исследованию волновой картины в бесконечном упругом цилиндре кругового поперечного сечения. Содержание этих исследований достаточно полно отражено в обзорах [4, 5 и др.] и монографиях [6, 7 и др.]. Связанные поля значительно усложняют выполнение исследований. Так, для пьезокерамического цилиндра только в случае осевой поляризации пьезокерамики для продольных осесимметричных волн и в случае окружной поляризации для крутильных волн возможно представление решения через специальные функции. Учет неоднородности материала цилиндра еще более усложняет задачу, в то время как в большинстве устройств используются именно неоднородные пьезоэлектрические материалы (биморфы). Исследования, посвященные этой проблематике, можно найти в [8, 9]. На сегодняшний день все более широкое применение находят так называемые функционально градиентные пьезоэлектрические материалы (ФГПМ), сочетающие преимущества биморфов и лишенные проблемной зоны — поверхности соединения материалов с различными коэффициентами температурного расширения. Попытка учесть непрерывно изменяющиеся свойства материала приводит нас к тому, что модули материала являются не константами, а функциями по одной из координат [10–12 и др.]. Это составляет серьезную проблему для применения многих численных методов.

---

© И. А. Лоза, 2015

В данной работе для решения задачи о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в неоднородном по толщине полом цилиндра из функционально градиентной пьезокерамики, поляризованной в радиальном направлении, предложен эффективный численно-аналитический подход. На основании предложенного подхода проведен кинематический анализ распространяющихся вдоль оси цилиндра акустоэлектрических волн. Исследовано также влияние фактора неоднородности на кинематические характеристики распространяющихся волн.

**Постановка задачи. Основные уравнения.** Осесимметричные продольные уравнения движения в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r}D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (2)$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}u_r; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\rho$  — плотность материала;  $\omega$  — круговая частота;  $u_i$  — компоненты вектора перемещений;  $D_i$  — компоненты вектора электрической индукции;  $E_i$  — компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\phi$  — электростатический потенциал;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в радиальном направлении, таковы:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_r; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_r; \\ \sigma_{rz} &= 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_z; \\ D_r &= e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{13}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_r; \\ D_z &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{33}E_z, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $c_{ij}$  — компоненты тензора модулей упругости;  $e_{ij}$  — компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Указанные выше компоненты являются функциями радиальной координаты:

$$c_{ij} = c_{ij}^o e^{mr}, \quad e_{ij} = e_{ij}^o e^{mr}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^o e^{mr}.$$

Здесь  $c_{ij}^o$ ,  $e_{ij}^o$  и  $\varepsilon_{ij}^o$  — значения соответствующих модулей на внешней поверхности цилиндра; значение  $m$  определяется экспериментально и обычно находится в пределах  $-2 \leq m \leq 2$ .

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при  $r = R_0 \pm h$ ) задаются следующие.

Поверхности свободны от внешних усилий  $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$  и покрыты тонкими электродами, к которым подведена гармоническая разность потенциалов:  $\phi = \pm V_0 e^{i(kz - \omega t)}$ ,  $R_0$  — радиус серединной поверхности цилиндра;  $h$  — половина толщины цилиндра.

Разрешающий вектор выбираем смешанного типа:

$$\mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \phi, u_r, u_z, D_r\}^T. \quad (5)$$

Решая систему (1)–(4) относительно разрешающего вектора, после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left( \frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r + \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left( \frac{\Delta_2}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z; \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{e_{15}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{e_{55}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{c_{11}} \sigma_{rr} - \frac{e_{33}}{c_{11}} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_r - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r. \end{aligned} \quad (6)$$

**Решение задачи.** Решение задачи будем искать в виде волн, бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, t) &= i\lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz - \omega t)}; & \sigma_{rz}(r, z, t) &= \lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ \phi(r, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \phi(r) e^{i(kz - \omega t)}; & u_r(r, z, t) &= ihu_r(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ u_z(r, z, t) &= hu_z(r) e^{i(kz - \omega t)}; & D_r(r, z, t) &= \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя представление (5), исходную двумерную задачу теории электроупругости в частных производных можно свести к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \varsigma, \Omega) \mathbf{R} \quad (8)$$

с граничными условиями:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2, \quad (9)$$

где вектор  $\mathbf{C}_1 = \{0, 0, -V_0, 0, 0\}^T$  и вектор  $\mathbf{C}_2 = \{0, 0, V_0, 0, 0\}^T$ .

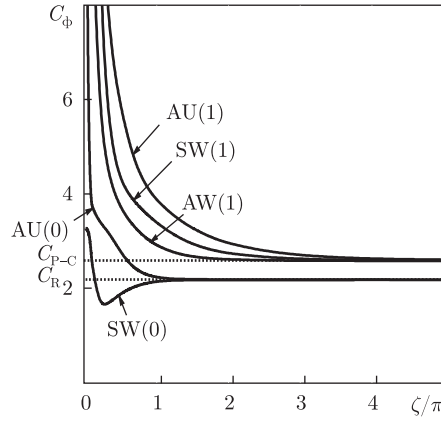


Рис. 1

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^0}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}^0}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^0}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h},$$

где  $\rho$  — плотность материала цилиндра;  $R_0$  — радиус срединной поверхности;  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\lambda = 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

Решение задачи (8) и (9) было выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

**Результаты численного анализа.** Ниже приведены результаты численного анализа краевой задачи (8), (9). На внешней поверхности цилиндра заданы следующие характеристики пьезокерамики PZT 4:

$$\begin{aligned} c_{11}^0 &= 13,9 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; & c_{12}^0 &= 7,43 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; & c_{13}^0 &= 7,78 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \\ c_{33}^0 &= 11,5 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; & c_{55}^0 &= 2,56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; & e_{13}^0 &= -5,2 \frac{\text{К}}{\text{м}^2}; \\ e_{15}^0 &= 12,7 \frac{\text{К}}{\text{м}^2}; & e_{33}^0 &= 15,1 \frac{\text{К}}{\text{м}^2}; & \varepsilon_{11}^0 &= 730; & \varepsilon_{33}^0 &= 635. \end{aligned}$$

Для случая однородной задачи (свободные движения) наблюдаются (как это было отмечено в работах [13]) качественные различия в дисперсионных соотношениях. Лучше это видно, если рассмотреть фазовые скорости распространяющихся волн. Так для однородного цилиндра (рис. 1) первые две волны  $SW(0)$  и  $AU(0)$  в коротковолновом диапазоне выходят на поверхностную волну рэлеевского типа. В рисунках используются обозначения для волн, принятые в работе [13]. Маркировка  $SW(0)$  означает, что волна рождается ( $z = 0$ ) как симметричные продольные колебания (колебания расширения–сжатия),  $AU(0)$  — антисимметричные (изгибные) радиальные колебания. Остальные ветви в коротковолновом диапазоне довольно быстро выходят на волны, распространяющиеся без дисперсии, с постоянной скоростью, которая больше скорости поверхностных волн и меньше скорости объемных волн в безграничном пространстве. Назовем эти волны волнами Похгаммера–Кри по аналогии с волнами Лэмба в пластине.

Для случая, когда материал цилиндра неоднородный, наблюдается существенная перестройка спектра фазовых скоростей. Для положительного значения параметра неодно-

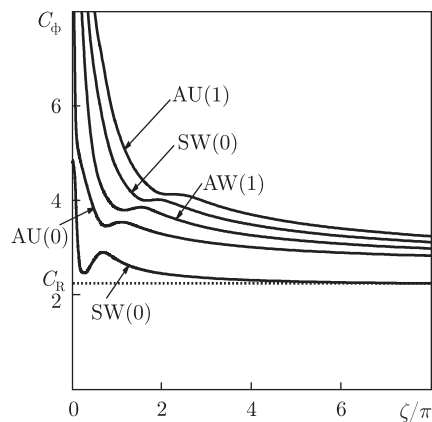


Рис. 2

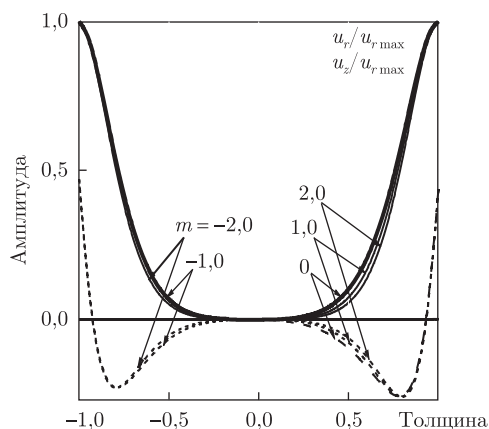


Рис. 3

родности  $m = 1,5$  (модули материала имеют меньшие значения на внешней поверхности цилиндра) соответствующие фазовые скорости распространяющихся волн представлены на рис. 2. Из приведенного рисунка видно, что только первая ветвь выходит на бездисперсионную волну, все остальные распространяются с существенной дисперсией.

Рассмотрим, как происходит трансформация распределения перемещений по толщине при уменьшении длины волны. Для случая однородного материала (рис. 3, жирная линия), первая ветвь  $SW(0)$  выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Вторая ветвь  $AU(0)$  в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра (рис. 4, жирная линия).

Данные представлены для значения  $\zeta = 3\pi$ . В случае же, когда материал цилиндра неоднородный, наблюдаются качественные отличия в характере распределения амплитуд перемещений. Как это уже отмечалось выше, только первая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа (рис. 3), причем значительно позже, чем в случае однородного материала. Как видно из приведенного рисунка, для положительных значений параметра неоднородности  $m$  (случай, когда модули материала имеют большие значения на внутренней поверхности цилиндра) распределения амплитуд перемещений в волне качественно совпа-

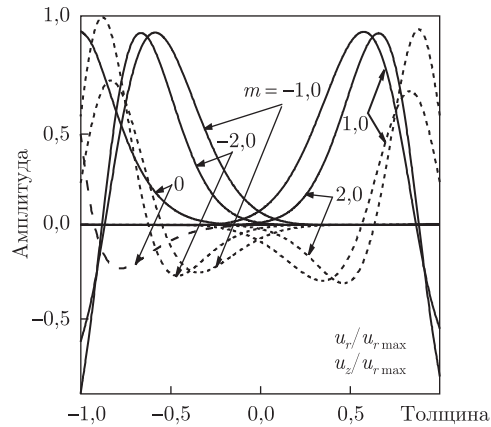


Рис. 4

дают со случаем однородного материала. То есть первая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Для отрицательных значений параметра неоднородности  $m$  (случай, когда модули материала имеют большие значения на внешней поверхности цилиндра) первая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра.

Таким образом, в обоих случаях первая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль поверхности с меньшими значениями модулей.

**Анализ результатов.** Неоднородность материала цилиндра приводит к существенным отличиям в характере распределения амплитуд перемещений бегущих волн. Особенно существенные отличия наблюдаются для первых двух ветвей дисперсионных соотношений. Так, в случае однородного материала цилиндра первая ветвь в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Вторая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра. В случае же неоднородного материала только первая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль поверхности с наименьшими значениями модулей. Вторая же ветвь не выходит на поверхностную волну и распространяется с дисперсией.

1. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder // J. Reine Angew. Math. – 1876. – **81**, No 4. – P. 324–336.
2. Cree C. Longitudinal vibration of circular bar // Quart. J. Pure and Appl. Math. – 1886. – **21**, No 83/84. – P. 287–298.
3. Cree C. The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – PtIII. – P. 250–369.
4. Физическая акустика / Подред. У. Мэзона. Р. Терстона. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1 – Т. 7. – 663 с.
5. Thurston R. N. Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – **64**, No 1. – P. 1–37.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
7. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. – Москва: ИЛ, 1955. – 192 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Отв. ред. А. Н. Гузь; АН УССР Ин-т механики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
9. Шульга Н. А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах, волноводы с усложненными свойствами // Успехи механики. – В 6-ти т., 2007. – С. 681–702.

10. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // ASME Appl. Mech. Rev. – 2007. – **195**. – P. 195–216.
11. Wu C.-P., Tsai T.-C. Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method // Appl. Math. Model. – 2012. – **36**, Iss. 5. – P. 1910–1930.
12. Grigorenko A., Müller W. H., Wille R., Loza I. Nonaxisymmetric vibrations of radially polarized hollow cylinders made of functionally gradient piezoelectric materials // Continuum Mech. Thermodyn. – 2012. – **24**, No 4–6. – P. 515–524.
13. Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими слоями, поляризованными в осевом направлении // Прикл. механика. – 2011. – **47**, № 6. – С. 118–124.

Національний транспортний університет, Київ

Поступило в редакцію 22.10.2014

**І. А. Лоза**

### **Про поширення осесимметричних електропружних хвиль у порожнистому циліндрі з функціонально градієнтного п'єзокерамічного матеріалу**

*Проведено кінематичний аналіз поширення вісесимметричних електропружних хвиль у неоднорідному по товщині порожнистому циліндрі з функціонально градієнтного матеріалу, поляризованого у радіальному напрямі при електричному способі збудження хвиль. Властивості матеріалу змінюються за експоненціальним законом в напрямі радіальної координати. Бічні поверхні циліндра вільні від механічних навантажень та вкриті нескінченно тонкими електродами, до яких підведена гармонічно змінна різниця потенціалів  $\pm V_0 e^{i(kz - \omega t)}$ . Для розв'язання даної задачі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Після розділення змінних і зображення розв'язку у вигляді хвиль, біжучих вздовж циліндра, початкова задача теорії електропружності у частинних похідних зводиться до неоднорідної крайової задачі у звичайних диференціальних рівняннях. Отримана система розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати чисельного аналізу для циліндра з функціонально градієнтної п'єзокераміки PZT 4.*

**I. A. Loza**

### **On the propagation of axisymmetric elastoelastic waves in a hollow cylinder made of a functionally gradient piezoceramic material**

*The problem of kinematic analysis of the propagation of axisymmetric elastoelastic waves in a hollow cylinder made of a piezoceramic functionally gradient material polarized in the radial direction is considered. Properties of the material are changed by the exponential law in the radial direction. The external surface of the cylinder is free of loads and is covered by infinitely thin electrodes, to which a harmonically changing potential difference  $\pm V_0 \exp[i(kz - \omega t)]$  is applied. To solve the problem, an efficient numerical-analytical method is offered. After the separation of variables and the representation of the solution as the waves traveling along the cylinder, the initial problem of the theory of electroelasticity in partial derivatives is reduced to a boundary-value inhomogeneous one described by a system of ordinary differential equations. The system is solved by the stable method of discrete orthogonalization. The results of numerical analysis for a cylinder made of PZT 4 functionally gradient piezoceramics are presented.*