



УДК 517.9

А. Л. Гуляницький

Слабкі розв'язки і збіжність методу Гальоркіна для дробового рівняння дифузії

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Побудовано напівдискретний метод Гальоркіна для дробового за часом рівняння дифузії. Доведено слабку збіжність цього методу у випадку правої частини зі значеннями у негативному просторі за просторовою змінною. Також доведено неперервність розв'язку задачі зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій.

Диференціальні рівняння у частинних похідних з дробовою похідною за часом використовуються для опису ряду фізичних процесів, серед яких можна назвати дифузію у пористих і тріщинуватих середовищах [1, 2], перенесення носіїв заряду в аморфних напівпровідниках [3], а також внутрішньоклітинну дифузію [4]. Ці рівняння одержуються з моделей випадкових блукань з неперервним часом зі степеневою щільністю часу очікування.

Абстрактні теореми розв'язності для дробових еволюційних рівнянь з похідною Рімана-Ліувілья одержано у [5]. Проте застосований метод не пов'язаний з побудовою послідовності наближень, яка збігається до розв'язку початково-крайової задачі, тому проблема побудови й обґрунтування чисельних методів залишається відкритою. Цій проблемі присвячено ряд публікацій, наприклад, [6], а також [7] (для опуклих многогранних областей).

У даній статті обґрунтовано слабку збіжність гальоркінських наближень для слабкої постановки початково-крайової задачі для рівняння дифузії з похідною Капуто, а також встановлено, що розв'язок задачі неперервний за часом зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій.

Основні позначення. Розглянемо задачу

$${}^*D_0^\alpha u + \mathcal{A}u = f, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Тут $u: [0, T] \rightarrow H$ — невідома функція зі значеннями у гільбертовому просторі функцій змінної $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$; ${}^*D_0^\alpha$ — похідна Капуто порядку α за часом з початком у точ-

ці 0; $\alpha \in (0, 1)$; \mathcal{A} — еліптичний диференціальний оператор другого порядку, що діє за змінною x :

$$(\mathcal{A}\varphi)(x) = - \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x)\varphi_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^N a_i(x)\varphi_{x_i} + a(x)\varphi.$$

Припустимо, що оператор \mathcal{A} визначений на просторі $H_0^1(\Omega)$ і задається коерцитивною білінійною формою $a(\cdot, \cdot)$. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначимо двоїстість між $H_0^{-1}(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$.

Введемо еволюційні дробові за часом соболевські простори

$$W_0^{\alpha,p}([0, T], H) = \{u \in L_p([0, T], H) \mid {}^*D_0^\alpha u \in L_p([0, T], H), u(0) = 0\},$$

де H — гільбертів простір, з нормою $\|u\|_{W_0^{\alpha,p}([0, T], H)} = \|{}^*D_0^\alpha u\|_{L_p([0, T], H)}$.

Слабка розв'язність і гальоркінські наближення. Розглянемо випадок негладкої правої частини рівняння.

Означення 1. Слабким розв'язком задачі (1)–(2) з правою частиною $f \in L_p([0, T], H_0^{-1}(\Omega))$ назвемо елемент $u \in L_p([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap W_0^{\alpha,p}([0, T], H_0^{-1}(\Omega))$, що задовольняє тождество

$$\langle {}^*D_0^\alpha u(t), v \rangle + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle \quad (3)$$

для довільного $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та майже всіх $t \in [0, T]$, а також початкову умову $u(0) = 0$.

Зауважимо, що завдяки однорідності початкової умови похідна Капуто збігається з похідною Рімана–Ліувілля. Крім того, сформульоване означення слабкої розв'язності рівносильне строгій L_p -розв'язності [5] у просторі $H_0^{-1}(\Omega)$. Тому при зроблених припущеннях щодо оператора \mathcal{A} справедлива теорема існування та єдиності розв'язку.

Теорема 1. Для довільного $f \in L_p([0, T], H_0^{-1}(\Omega))$ існує і єдиний слабкий розв'язок задачі (1)–(2).

Надалі припускатимемо, що $p > 2/\alpha$. Нехай q — таке число, для якого $2/p + 1/q = 1$.

Побудуємо для задачі (1) нестационарний проєкційний метод. Виберемо базис $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Задля простоти викладення припустимо, що цей базис ортонормований у просторі $L_2(\Omega)$. Розглянемо проєкційні задачі

$$\langle {}^*D_0^\alpha u_m(t), w_j \rangle + a(u_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j \rangle, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4)$$

з однорідними початковими умовами

$$u_m|_{t=0} = 0.$$

Ці елементи шукатимемо у вигляді $u_m(t) = \sum_{i=1}^m \psi_{im}(t) \cdot w_i$; тоді (4) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь дробового порядку з невідомими $\psi_{im}(t)$, $i = 1, \dots, m$, $t \in [0, T]$:

$${}^*D_0^\alpha \psi_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m a(w_i, w_j) \psi_{im}(t) = \langle f(t), w_j \rangle, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5)$$

$$\psi_{jm}|_{t=0} = 0.$$

Розв'язність цієї системи з правою частиною $F(t) = ((f(t), w_j))_{j=1}^m \in L_2([0, T])^m$ можна встановити, використавши вираз для розв'язання системи з гладкою правою частиною [8] і безпосередньо довівши апріорні нерівності, які дають змогу розширити оператор системи до відображення на $L_2([0, T])^m$.

Лема 1. Для $u \in L_2([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap W_0^{\alpha, 2}([0, T], H_0^{-1}(\Omega))$, для яких відображення $t \rightarrow \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2$ абсолютно неперервне на $[0, T]$, справедлива нерівність

$${}^*D_0^\alpha \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2({}^*D_0^\alpha u(t), u(t)).$$

Ця лема узагальнює нерівність для скалярнозначних функцій, доведену А. Аліхановим [9]. Доведення в цілому повторюють міркування для цього випадку.

Теорема 2. Якщо для функцій u_m справедлива нерівність з леми 1, то послідовність (u_m) збігається до розв'язку задачі (1)–(2) слабо в $L_2([0, T], H_0^1(\Omega))$ і $*$ – слабо в $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$.

Доведення. Домножуючи (5) на $\psi_{jm}(t)$, просумовуючи за $j = 1, \dots, m$ і використовуючи нерівність Аліханова, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^*D_0^\alpha \|u_m(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(u_m(t), u_m(t)) &\leq ({}^*D_0^\alpha u_m(t), u_m(t)) + a(u_m(t), u_m(t)) = \\ &= (f(t), u_m(t)) \leq \|f(t)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon^2} \|f(t)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2 + \epsilon^2 \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right), \quad \epsilon > 0. \end{aligned}$$

Перегруповуючи доданки з урахуванням коерцитивності оператора \mathcal{A} , тобто нерівності $a(u_m(t), u_m(t)) \geq c_0 \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2$, маємо

$$\frac{1}{2} {}^*D_0^\alpha \|u_m(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left(c_0 - \frac{\epsilon^2}{2} \right) \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\epsilon^2} \|f(t)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2.$$

Діючи дробово-інтегральним оператором порядку α , вибираючи ϵ з умови $c_0 - \epsilon^2/2 > 0$ і застосовуючи нерівність Юнга для дійсних чисел, одержимо оцінку

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \frac{(2c_0 - \epsilon^2) \|u_m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{(t-s)^{1-\alpha}} ds &\leq \int_0^t \frac{\|f(s)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2}{\epsilon^2 (t-s)^{1-\alpha}} ds \leq \\ &\leq \int_0^t \frac{\|f(s)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^p}{\epsilon^{2p}} ds + \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{q(1-\alpha)}} ds \leq M \end{aligned}$$

(обмеженість останнього інтеграла впливає з припущення $p > 2/\alpha$). Таким чином, для деякого $M = M(\epsilon) > 0$ і майже всіх $t \in [0, T]$

$$\|u_m(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M,$$

$$\int_0^t \frac{\|u_m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \leq \frac{M}{2c_0 - \epsilon^2}.$$

З цих двох оцінок випливає обмеженість $(u_m)_{m=1}^\infty$ у просторах $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ і $L_2([0, T], H_0^1(\Omega))$. Справді,

$$\frac{2c_0 - \epsilon^2}{T^{1-\alpha}} \int_0^t \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \int_0^t \frac{(2c_0 - \epsilon^2) \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{(t-s)^{1-\alpha}} \leq M.$$

Покладаючи $t = T$, одержуємо

$$\frac{2c_0 - \epsilon^2}{T^{1-\alpha}} \int_0^T \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \int_0^T \frac{(2c_0 - \epsilon^2) \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{(T-s)^{1-\alpha}} \leq M. \quad (6)$$

Тому існують підпослідовність (u_{m_k}) й елемент $u \in L_\infty([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_2([0, T], H_0^1(\Omega))$, для яких $u_{m_k} \rightharpoonup u$ у $L_2([0, T], H_0^1(\Omega))$ і $u_{m_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ у $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$.

Помноживши перший доданок (4) на $\varphi \in C^\infty([0, T])$, таке, що $({}_T I^{1-\alpha} \varphi)(t)|_{t=T} = 0$ (${}_T I^{1-\alpha}$ — інтегральний оператор Рімана–Ліувілля з кінцем у точці T), проінтегрувавши по $[0, T]$ і застосувавши формулу дробового інтегрування частинами, а також здійснивши граничний перехід ($k \rightarrow \infty$), можна показати, що u є слабким розв’язком задачі (1)–(2). Оскільки такий розв’язок єдиний, звідси випливає збіжність усієї послідовності $(u_m)_{m=1}^\infty$.

Неперервність розв’язку. Дослідимо розв’язок початково-крайової задачі на неперервність.

Терема 3. *Розв’язок u задачі (1)–(2) належить простору $C([0, T], L_2(\Omega))$.*

Доведення. Доведення здійснимо методом згладжень (усереднень). Для $\epsilon > 0$ покладемо

$$u_\epsilon = \eta^\epsilon * u,$$

де

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\eta^\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{t}{\epsilon}\right),$$

а стала C вибирається з умови $\int \eta(t) dt = 1$.

Доозначимо u нулем на відрізках $[-\theta, 0)$ і $(T, T + \theta]$. Відомо [10], що для $u \in L_p([a, b], H)$ $u_\epsilon \rightarrow u$ за нормою простору $L_p([a, b], H)$, а самі усереднення належать класу $C^\infty([a, b], X)$. Тому можна застосувати нерівність Аліханова:

$${}^* D_0^\alpha \|u_\epsilon(t) - u_\delta(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2({}^* D_0^\alpha u_\epsilon(t) - {}^* D_0^\alpha u_\delta(t), u_\epsilon(t) - u_\delta(t))_{L_2(\Omega)},$$

де $t \in [0, T]$.

Інтегруючи (з показником α), маємо

$$\|u_\epsilon(t) - u_\delta(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|u_\epsilon(0) - u_\delta(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \frac{\langle {}^* D_0^\alpha u_\epsilon(\tau) - {}^* D_0^\alpha u_\delta(\tau), u_\epsilon(\tau) - u_\delta(\tau) \rangle}{|t - \tau|^{1-\alpha}} d\tau.$$

Оскільки $u \in L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$, множина $\{u_\epsilon(0) | \epsilon > 0\}$ обмежена в нормі $L_2(\Omega)$. Дійсно, $u_\epsilon(0) = \int_0^T \eta^\epsilon(s)u(s) dt$. Оскільки $\int \eta^\epsilon(t) dt = 1$, за нерівністю Бохнера маємо

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon(0)\|_{L_2(\Omega)} &= \left\| \int_0^T \eta^\epsilon(t)u_\epsilon(t) dt \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \int_0^T |\eta^\epsilon(t)| \|u_\epsilon(t)\|_{L_2(\Omega)} dt \leq \\ &\leq \|u\|_{L_\infty([0, T], L_2(\Omega))} \int_0^T |\eta^\epsilon(t)| dt = \|u\|_{L_\infty([0, T], L_2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Тому якщо вибрати послідовність $(\epsilon_n)_{n=1}^\infty: \epsilon_n \rightarrow 0$, то відповідно до властивості Банаха–Сакса знайдеться підпослідовність $(n_k)_{k=1}^\infty$, така, що

$$\left\| \frac{\sum_{k=1}^m u_{\epsilon_{n_k}}(0)}{m} - u(0) \right\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

З іншого боку, як легко бачити,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\sum_{k=1}^m u_{\epsilon_{n_k}}}{m} - u \right\|_{L_p([0, T], H_0^1(\Omega))} &\rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \\ \left\| \frac{\sum_{k=1}^m {}^*D_0^\alpha u_{\epsilon_{n_k}}}{m} - {}^*D_0^\alpha u \right\|_{L_p([0, T], H_0^{-1}(\Omega))} &\rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Позначимо через u_n $u_{\epsilon_{n_k}}$. Тоді можна записати

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \|u_n(0) - u_m(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ 2 \int_0^t \frac{\langle {}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau), u_n(\tau) - u_m(\tau) \rangle}{|t - \tau|^{1-\alpha}} d\tau \leq \|u_n(0) - u_m(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ 2 \int_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}}{|t - \tau|^{1-\alpha}} d\tau \leq \\ &\leq \|u_n(0) - u_m(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2}{|t - \tau|^{1-\alpha}} d\tau + \\ &+ \int_0^t \frac{\|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{|t - \tau|^{1-\alpha}} d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

(в останньому переході використано нерівність $2ab \leq a^2 + b^2$). Оцінимо окремо кожний з інтегралів:

$$\int_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2}{|t - \tau|^{1-\alpha}} d\tau \leq$$

$$\leq \left(\int_0^t \| {}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau) \|_{H_0^{-1}(\Omega)}^p d\tau \right)^{2/p} \left(\int_0^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}} d\tau \right)^{1/q},$$

де останній інтеграл збіжний при $q(1-\alpha) < 1$, тобто $p > 2/\alpha$. Неважко переконатися, що $J(t, s) = \int_s^t d\tau / |t-\tau|^{q(1-\alpha)}$ є обмеженою функцією. З іншого боку,

$$\int_0^t \| {}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau) \|_{H_0^{-1}(\Omega)}^p d\tau \leq \int_0^T \| {}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau) \|_{H_0^{-1}(\Omega)}^p d\tau.$$

Аналогічно дослідимо другий доданок з (7):

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\| u_n(\tau) - u_m(\tau) \|_{H_0^1(\Omega)}^2}{|t-\tau|^{1-\alpha}} d\tau &\leq \left(\int_s^t \| u_n(\tau) - u_m(\tau) \|_{H_0^1(\Omega)}^p d\tau \right)^{2/p} \left(\int_s^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}} d\tau \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\int_0^T \| u_n(\tau) - u_m(\tau) \|_{H_0^1(\Omega)}^p d\tau \right)^{2/p} \left(\int_s^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}} d\tau \right)^{1/q} \leq \\ &\leq M \left(\int_0^T \| u_n(\tau) - u_m(\tau) \|_{H_0^1(\Omega)}^p d\tau \right)^{2/p}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \| u_n(t) - u_m(t) \|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \| u_n(0) - u_m(0) \|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ M \left[\left(\int_0^T \| {}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau) \|_{H_0^{-1}(\Omega)}^p d\tau \right)^{2/p} + \left(\int_0^T \| u_n(\tau) - u_m(\tau) \|_{H_0^1(\Omega)}^p d\tau \right)^{2/p} \right]. \end{aligned}$$

Переходячи до границі, одержуємо

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{m,n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \| u_n(t) - u_m(t) \|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \\ &\leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} \| u_n(0) - u_m(0) \|_{L_2(\Omega)}^2 \lim_{m,n \rightarrow \infty} M \left(\int_0^T \| {}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau) \|_{H_0^{-1}(\Omega)}^p d\tau \right)^{2/p} + \\ &+ \lim_{m,n \rightarrow \infty} M \left(\int_0^T \| u_n(\tau) - u_m(\tau) \|_{H_0^1(\Omega)}^p d\tau \right)^{2/p} = 0, \end{aligned}$$

тобто u можна ототожнити (з точністю до множини міри 0) з границею послідовності (u_n) за нормою $\| \cdot \|_{C([0, T], L_2(\Omega))}$.

Зауваження 1. Неперервність розв'язку дає змогу розглядати задачі оптимального керування з критеріями якості вигляду $J(u) = \max_{t \in [0, T]} \| u(t) - \tilde{u}(t) \|_{L_2(\Omega)}$, $J = \| u(T) - \omega \|_{L_2(\Omega)}$ тощо.

Отже, у роботі досліджено питання збіжності методу Гальоркіна (з дискретизацією за простором) для розв'язку дробового за часом рівняння у частинних похідних. На відміну від випадку рівняння цілого порядку, доведення уже використовує існування і єдиність розв'язку, а не дає змогу обґрунтувати їх. Крім того, предметом подальших досліджень є уточнення класу функцій, для яких застосовна нерівність Аліханова. Також доведено неперервність розв'язку зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій, причому міркування загалом подібні до доведення аналогічного твердження у випадку похідної першого порядку.

1. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – R161–R208.
2. Учайкин В. В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
3. Сибатов Р. Т., Учайкин В. В. Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках // Усп. физ. наук. – 2009. – **179**, № 10. – С. 1079–1104.
4. Sokolov I. M. Models of anomalous diffusion in crowded environments // Soft Matter. – 2012. – **42**, No 8. – P. 9043–9052.
5. Vazhlekova E. Fractional evolution equations in Banach spaces, PhD Thesis. – Eindhoven Univ. of Technology, 2001.
6. Ford N., Xiao J., Yan Y. A finite element method for the time-fractional partial differential equations // Fract. Calc. Appl. An. – 2011. – **14**, No 3. – P. 454–474.
7. Jin B., Lazarov R., Pasciak J., Zhou Z. Error analysis of semidiscrete finite element methods for inhomogeneous time-fractional diffusion // IMA J. Numer. Anal. – to appear. – doi:10.1093/imanum/dru018.
8. Чукрий А. А., Матичин И. И. Представление решений линейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля, Капуто и Миллера–Росса // Пробл. управления и информатики. – 2008. – № 3. – С. 133–142.
9. Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations // Dif. Equations. – 2010. – **46**, No 5. – P. 660–666.
10. Evans L. C. Partial differential equations. – Providence: Amer. Math. Soc., 1998. – 662 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 17.11.2014

А. Л. Гуляницький

Слабые решения и сходимость метода Галеркина для дробного уравнения диффузии

Построен полудискретный метод Галеркина для дробного по времени уравнения диффузии. Доказана слабая сходимость этого метода в случае правой части со значениями в негативном пространстве по пространственной переменной. Также доказана непрерывность решения задачи со значениями в пространстве интегрируемых с квадратом функций.

A. L. Hulianytskyi

Weak solutions and convergence of the Galerkin method for the fractional diffusion equation

We construct a semidiscrete Galerkin method for the time-fractional diffusion equation. We prove the weak convergence of the method in the case of the right-hand side from a negative space with respect to the space variable. The continuity of the solution with values in a space of square-integrable functions is proven.