



УДК 517.36

С. И. Голинько

Об устойчивости плоского гироскопического маятника

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Установлены условия устойчивости плоского гироскопического маятника. С использованием специальных замен система дифференциальных уравнений возмущенного движения с импульсным воздействием приводится к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Найдены условия возникновения параметрического резонанса колебаний плоского гироскопического маятника.

Теория гироскопических приборов, включая маятник, развита в работах [1–4] и многих других. Анализ устойчивости импульсных систем со структурными возмущениями приводится в работах [5, 6]. Теория параметрического резонанса в механических системах изложена в [7], некоторое применение теории параметрического резонанса представлено в работах [8–10].

В данной работе исследуется устойчивость плоского гироскопического маятника при импульсных и параметрических возмущениях. Система уравнений возмущенного движения маятника линеаризуется в окрестности положения равновесия в моменты импульсного воздействия. С применением метода усреднения [11], замены переменных из работы [12] и замены А. М. Ляпунова линейных переменных из линеаризованной системы уравнений возмущенного движения исключаются гироскопические силы. При этом система дифференциальных уравнений возмущенного движения с импульсным воздействием приводится к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Поведение решений последней полностью определяет свойства устойчивости состояния равновесия маятника при импульсных воздействиях.

Рассмотрим плоский гироскопический маятник в предположении, что на кожух гироскопа действует специальный момент, создаваемый с помощью асинхронного мотора, и в фиксированные моменты времени $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, маятник подвергается импульсному воздействию \vec{p}_0 , направленному вертикально вверх. Пусть α — угол отклонения маятника от вертикального положения; β — угол поворота кожуха; ω — собственная угловая скорость гироскопа. Принимаем, что система осуществляет малые колебания в окрестности поло-

жения равновесия, $\alpha = \beta = 0$, $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$. Используя уравнение Лагранжа второго рода, приходим к уравнениям движения маятника [3]

$$\begin{aligned} I_0 \ddot{\alpha} + \gamma' \dot{\alpha} - I\omega \dot{\beta} + Pl_1 \alpha &= 0, & t \neq kT, \\ I_1 \ddot{\beta} + \gamma'' \dot{\beta} + I\omega \dot{\alpha} + c\beta &= 0, & t \neq kT, \end{aligned}$$

и условиям сопряжения в момент импульсного воздействия

$$\begin{aligned} I_0 \dot{\alpha}(t+0) &= I_0 \dot{\alpha}(t) - p_0 l \alpha(t), & t = kT, \\ I_1 \dot{\beta}(t+0) &= I_1 \dot{\beta}(t), & t = kT, \end{aligned}$$

где I_0 — момент инерции маятника относительно оси вращения; I_1 — экваториальный момент инерции гироскопа и кожуха; I — полярный момент инерции гироскопа; l — расстояние от оси вращения до центра масс гироскопа и кожуха; P — вес всей системы; l_1 — расстояние от оси вращения до центра масс всей системы; c — коэффициент, характеризующий жесткость пружины, которой соединены кожух и маятник; γ' и γ'' — коэффициенты вязкого трения; T — период. Определим вектор $x = (\alpha, \beta)^T$ и матрицы

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & \gamma'' \end{pmatrix}, & G &= I \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = IJ, & C &= \begin{pmatrix} Pl_1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} -p_0 l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\tilde{G} = A^{-1/2} G A^{-1/2}, \quad \tilde{B} = A^{-1/2} B A^{-1/2}, \quad \tilde{C} = A^{-1/2} C A^{-1/2}, \quad \tilde{M} = A^{-1/2} M A^{-1/2}.$$

Примем

$$\omega = \frac{\omega_0 I}{\sqrt{I_0 I_1}}, \quad \theta = \frac{\omega_0 I T}{\sqrt{I_0 I_1}}$$

и будем предполагать, что $\frac{\sqrt{I_0 I_1}}{\omega_0 I} \ll 1$. Тогда

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma'}{I_0} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma''}{I_1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{G} = J, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \frac{Pl_1}{I_0} & 0 \\ 0 & \frac{c}{I_1} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{-p_0 l}{I_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений возмущенного движения может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\tilde{B} + \omega \tilde{G}) \dot{x} + \tilde{C} x &= 0, & t \neq kT, \\ x(t+0) &= x(t), & t = kT, \\ \dot{x}(t+0) &= \dot{x}(t) + \tilde{M} x(t), & t = kT. \end{aligned}$$

Введем малый параметр $\varepsilon = 1/\omega$ и $\tau = \omega t$, тогда в новых переменных запишем систему уравнений возмущенного движения, линеаризованную в окрестности положения равновесия в момент импульсного воздействия,

$$\begin{aligned} x'' + (\tilde{G} + \varepsilon\tilde{B})x' + \varepsilon^2\tilde{C}x &= 0, & \tau \neq k\theta, \\ x(\tau + 0) &= x(\tau), & \tau = k\theta, \\ x'(\tau + 0) &= x'(\tau) + \varepsilon\tilde{M}x(\tau), & \tau = k\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Для системы (1) рассмотрим замену переменных

$$z = -G^{-1}e^{-G\tau}\eta_2 + \eta_1, \quad z' = e^{-G\tau}\eta_2,$$

которая является заменой Ляпунова. В новых переменных систему дифференциальных уравнений можно представить в виде

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \left(\varepsilon \left(D_1(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta(\tau - k\theta) \right) + \varepsilon^2 D_2(\tau) \right) \eta(\tau). \quad (2)$$

Исследуем эту систему, применяя классические асимптотические методы, развитые для этого класса систем в работе [13]. Находим замену переменных, являющуюся при достаточно малых ε заменой Ляпунова

$$\zeta(\tau) = (I + \varepsilon R_1(\tau) + \varepsilon^2 R_2(\tau) + \dots) \eta(\tau),$$

приводящую систему уравнений (2) к виду

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = (\varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \dots) \zeta, \quad (3)$$

где G_1 и G_2 — постоянные матрицы и \dots обозначает члены порядка ε^3 . Введем обозначения $a = p_0 l / I_0$, $b = \gamma' / I_0 + \gamma'' / I_1$ и $d = \gamma' / I_0 - \gamma'' / I_1$. Тогда блочные элементы матриц G_1 и G_2 имеют вид

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, & g_{12} &= 0, & g_{21} &= 0, & g_{22} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b & \frac{a}{\theta} \\ -\frac{a}{\theta} & -b \end{pmatrix}, \\ \bar{g}_{11} &= \begin{pmatrix} -\frac{\gamma'' a}{\theta I_1} & -\frac{c}{I_1} \\ \frac{Pl_1}{I_0} - \frac{a^2}{2\theta} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix}, & \bar{g}_{21} &= \begin{pmatrix} -\frac{ab}{4} - \frac{a^2}{4\theta} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & 0 \\ \frac{ab}{4} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{a^2}{4\theta} & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{g}_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma'' b}{2I_1} & -\frac{a\gamma'}{2\theta I_0} \\ \frac{3a\gamma''}{2\theta I_1} + \frac{ab}{4} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \frac{a^2}{4\theta} & b \left(\frac{a}{4} + \frac{\gamma'}{2I_0} \right) - \frac{a^2}{4\theta} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \bar{g}_{22} &= \begin{pmatrix} -\frac{3ad}{8\theta} & \frac{a}{8\theta} (b + a \operatorname{ctg} \theta) + \frac{cI_0 + Pl_1 I_1}{2I_1 I_0} \\ \frac{a}{8\theta} (3a \operatorname{ctg} \theta - b) - \frac{cI_0 + Pl_1 I_1}{2I_1 I_0} & \frac{a^2}{4\theta} + \frac{ad}{8\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для этой системы условия устойчивости могут быть выписаны на основе теоремы Рауса–Гурвица в варианте, предложенном в работе [12].

Приближенное равенство $\theta \approx \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, соответствует параметрическому резонансу в рассматриваемой системе. Исследуем вопрос об условиях такого резонанса, полагая $\theta \approx \varepsilon\delta + \pi n$, $\varepsilon \neq 0$. Далее разложим функции $\operatorname{ctg} \theta$, $\operatorname{ctg}(\theta/2)$ и $1/\theta$ в ряды Маклорена по ε и подставим в уравнение (3), тогда

$$\frac{d\xi}{dt} = (\varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots)\xi.$$

Соответствующие элементы матриц S_1 и S_2 после преобразования при нечетных n будут представлены таким образом:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a}{\pi n} & 0 \end{pmatrix}, & s_{22} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b & \frac{a}{\pi n} + \frac{a^2}{8\pi n\delta} \\ \frac{3a^2}{8\pi n\delta} - \frac{a}{\pi n} & -b \end{pmatrix}, & \bar{s}_{11} &= \begin{pmatrix} -\frac{\gamma'' a}{\pi n I_1} & -\frac{c}{I_1} \\ \frac{Pl_1}{I_0} - \frac{a\delta}{\pi^2 n^2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{s}_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma'' b}{2I_1} & -\frac{a\gamma'}{2\pi n I_0} \\ \frac{3a\gamma''}{2\pi n I_1} + \frac{a^2}{4\pi n} & b \left(\frac{a}{4} + \frac{\gamma'}{2I_0} \right) \end{pmatrix}, & \bar{s}_{21} &= \begin{pmatrix} -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{a^2}{4\pi n} & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{s}_{22} &= \begin{pmatrix} -\frac{3ad}{8\pi n} & \frac{ab}{8\pi n} + \frac{cI_0 + Pl_1 I_1}{2I_1 I_0} - \frac{a\delta}{2\pi^2 n^2} - \frac{a^2}{8\pi^2 n^2} \\ -\frac{ab}{8\pi n} - \frac{cI_0 + Pl_1 I_1}{2I_1 I_0} + \frac{a\delta}{2\pi^2 n^2} - \frac{3a^2}{8\pi^2 n^2} & \frac{ab}{4\pi n} + \frac{ad}{8\pi n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Соответствующие элементы матриц S_1 и S_2 после преобразования при четных n будут представлены таким образом:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a}{\pi n} - \frac{a^2}{\delta\pi n} & 0 \end{pmatrix}, & s_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ab}{2\delta} & -\frac{a^2}{2\delta\pi n} \end{pmatrix}, & s_{21} &= \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2\delta\pi n} & 0 \\ \frac{ab}{2\delta} & 0 \end{pmatrix}, \\ s_{22} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b & \frac{a}{\pi n} + \frac{a^2}{8\pi n\delta} \\ \frac{3a^2}{8\pi n\delta} - \frac{a}{\pi n} & -b \end{pmatrix}, & \bar{s}_{11} &= \begin{pmatrix} -\frac{\gamma'' a}{\pi n I_1} & -\frac{c}{I_1} \\ \frac{Pl_1}{I_0} - \frac{a\delta}{\pi^2 n^2} + \frac{a^2}{\pi^2 n^2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{s}_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma'' b}{2I_1} & -\frac{a\gamma'}{2\pi n I_0} \\ \frac{3a\gamma''}{2\pi n I_1} + \frac{a^2}{4\pi n} & b \left(\frac{a}{4} + \frac{\gamma'}{2I_0} \right) + \frac{a^2}{2\pi^2 n^2} \end{pmatrix}, & \bar{s}_{21} &= \begin{pmatrix} -\frac{ab}{4} + \frac{a^2}{2\pi^2 n^2} & 0 \\ -\frac{a^2}{4\pi n} & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{s}_{22} &= \begin{pmatrix} -\frac{3ad}{8\pi n} & \frac{ab}{8\pi n} + \frac{cI_0 + Pl_1 I_1}{2I_1 I_0} - \frac{a\delta}{2\pi^2 n^2} - \frac{a^2}{8\pi^2 n^2} \\ -\frac{ab}{8\pi n} - \frac{cI_0 + Pl_1 I_1}{2I_1 I_0} + \frac{a\delta}{2\pi^2 n^2} - \frac{3a^2}{8\pi^2 n^2} & \frac{ab}{4\pi n} + \frac{ad}{8\pi n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Условия устойчивости и неустойчивости равновесия по линейному приближению рассматриваемой импульсной системы при достаточно малых значениях параметра ε являются следствием условий Рауса–Гурвица и теоремы III из работы [12].

При нечетных n для устойчивости достаточным является выполнение условий

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 > 0, & a_1 &= 2\varepsilon b > 0, & a_2 &= \frac{\varepsilon^2(-3a^4 + 64a^2\delta^2 - 16a^3\delta + 64\delta^2\pi^2n^2b^2)}{64\pi^2n^2\delta^2} > 0, \\
 a_3 &= \frac{\varepsilon^4a(-3a^4\gamma'' - 16a^3\delta\gamma'' + 64a^2\delta^2\gamma'' + 128\pi^2n^2\delta^2bc + 64\delta^2\pi^2n^2b^2\gamma'')}{64I_1I_0\pi^3n^3\delta^2} > 0, \\
 a_4 &= \frac{\varepsilon^5ca(-3a^4 + 64a^2\delta^2 - 16a^3\delta + 64\delta^2\pi^2n^2b^2)}{64I_1\pi^3n^3\delta^2} > 0, \\
 \Delta_3 &= a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 = \frac{\varepsilon^7ba\gamma''(-3a^4 + 64a^2\delta^2 - 16a^3\delta + 64\delta^2\pi^2n^2b^2)^2}{2048\pi^5n^5\delta^4I_1I_0} > 0,
 \end{aligned}$$

а при четных n

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 > 0, & a_1 &= 2\varepsilon b > 0, & a_2 &= \frac{\varepsilon^2(-3a^4 + 64a^2\delta^2 - 16a^3\delta + 64\delta^2\pi^2n^2b^2)}{64\pi^2n^2\delta^2} > 0, \\
 a_3 &= -\frac{\varepsilon^4a}{64I_1I_0^2\pi^3n^3\delta^2}(3a^4I_0\gamma'' + 16a^3I_0\delta\gamma'' - 64a^2I_0\delta^2\gamma'' + 2a^2n^2I_0\pi^2b^2\gamma'' - \\
 &\quad - 128\pi^2n^2\delta^2I_0bc - 64\delta^2\pi^2n^2b^2I_0\gamma'' + 6a^4I_1\gamma' - 16a^3I_1\delta\gamma' + 32a^2n^2I_0\pi^2bc + \\
 &\quad + 128an^2I_0\pi^2bcd - 16a\gamma'\delta n^2I_1\pi^2b^2) > 0, \\
 a_4 &= \frac{\varepsilon^5ca}{64I_1\pi^3n^3\delta^3}(9a^5 - 3a^4\delta - 80a^3\delta^2 + 64a^2\delta^3 + 2a^3n^2\pi^2b^2 - 16a^2n^2\pi^2b^2\delta + \\
 &\quad + 64\delta^3\pi^2n^2b^2 - 64an^2\pi^2\delta^2b^2) > 0, \\
 \Delta_3 &= a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 = -\frac{\varepsilon^7ba}{2048\pi^5n^5\delta^4I_1I_0^2}(-9a^8I_0\gamma'' - 6a^6n^2I_0\pi^2b^2\gamma'' - \\
 &\quad - 4096\delta^4n^4\pi^4b^4I_0\gamma'' + 128\delta^2n^4\pi^4b^4a^2I_0\gamma'' - 8192a^2\delta^4n^2I_0\pi^2b^2\gamma'' - \\
 &\quad - 32a^5\delta n^2I_0\pi^2b^2\gamma'' + 2048a^3\delta^3n^2I_0\pi^2b^2\gamma'' + 512a^4\delta^2n^2I_0\pi^2b^2\gamma'' - 96a^7\delta I_0\gamma'' + \\
 &\quad + 128a^6\delta^2I_0\gamma'' + 2048a^5\delta^3I_0\gamma'' - 4096a^4\delta^4I_0\gamma'' - 18a^8I_1\gamma' - 1024\delta^3n^4\pi^4b^4aI_1\gamma' + \\
 &\quad + 48a^5\delta n^2I_1\pi^2b^2\gamma' + 640a^4\delta^2n^2I_1\pi^2b^2\gamma' - 2048a^3\delta^3n^2I_1\pi^2b^2\gamma' - 48a^7\delta I_1\gamma' + \\
 &\quad + 640a^6\delta^2I_1\gamma' - 1024a^5\delta^3I_1\gamma' - 96a^6n^2I_0\pi^2bc - 8192\delta^4n^4\pi^4b^3I_0c + \\
 &\quad + 8192b^3cn^4\pi^4\delta^4I_0^2 + 1152bcn^2\pi^2\delta I_0^2a^5 + 2048\delta^2n^4\pi^4b^3a^2I_0c + 8192\delta^3n^4\pi^4b^3aI_0c - \\
 &\quad - 384bcn^2\pi^2\delta^2I_0^2a^4 - 10240bcn^2\pi^2\delta^3I_0^2a^3 + 8192bcn^2\pi^2\delta^4I_0^2a^2 + 256b^3cn^4\pi^4\delta I_0^2a^3 - \\
 &\quad - 2048b^3cn^4\pi^4\delta^2I_0^2a^2 - 8192b^3cn^4\pi^4\delta^3I_0^2a - 896a^5\delta n^2I_0\pi^2bc + 384a^4\delta^2n^2I_0\pi^2bc + \\
 &\quad + 10240a^3\delta^3n^2I_0\pi^2bc - 8192a^2\delta^4n^2I_0\pi^2bc) > 0.
 \end{aligned}$$

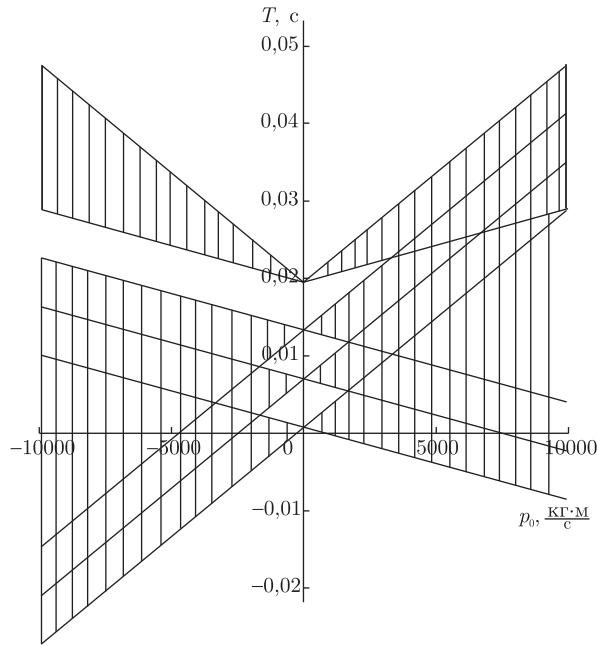


Рис. 1

Из этой же теоремы условия параметрического резонанса при нечетных и четных n имеют вид

$$\frac{\frac{p_0^3 l^3}{I_0^3} - \frac{p_0^2 l^2}{I_0^2} \sqrt{\frac{4p_0^2 l^2}{I_0^2} + 3\pi^2 n^2 \left(\frac{\gamma'}{I_0} + \frac{\gamma''}{I_1}\right)^2}}{\frac{8p_0^2 l^2}{I_0^2} + 8\pi^2 n^2 \left(\frac{\gamma'}{I_0} + \frac{\gamma''}{I_1}\right)^2} < \omega^2 T - \omega \pi n < \frac{\frac{p_0^3 l^3}{I_0^3} + \frac{p_0^2 l^2}{I_0^2} \sqrt{\frac{4p_0^2 l^2}{I_0^2} + 3\pi^2 n^2 \left(\frac{\gamma'}{I_0} + \frac{\gamma''}{I_1}\right)^2}}{\frac{8p_0^2 l^2}{I_0^2} + 8\pi^2 n^2 \left(\frac{\gamma'}{I_0} + \frac{\gamma''}{I_1}\right)^2}. \quad (4)$$

На рис. 1 представлена область параметрического резонанса для $I_0 = 0,08 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_1 = 0,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $l = 0,15 \text{ м}$, $\gamma' = 0,3$, $\gamma'' = 0,7$, $n = 1, 2, 3, 4$, $\omega = 500 \text{ Гц}$.

Из полученных результатов следует, что резонанс имеет место в интервале (4). Ширина резонансных областей (областей неустойчивости) пропорциональна ω . Параметрический резонанс приводит к неустойчивости гироскопического маятника, т. е. к нарастанию малых последующих возмущений. Если параметры рассматриваемой импульсной системы при достаточно малых значениях параметра ε такие, что неравенство (4) выполняется на неограниченном интервале, то полученные условия являются достаточными для неустойчивости.

Таким образом, в работе получены условия устойчивости положения равновесия плоского гироскопического маятника из условий устойчивости линейного приближения системы дифференциальных уравнений, которые описывают его поведение. Из условий неустойчивости этого же линейного приближения получены условия параметрического резонанса.

1. *Ишминский А. Ю., Борзов В. И., Степаненко Н. П.* Лекции по теории гироскопов. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 248 с.
2. *Новицький В. В.* Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки // Праці Ін-ту математики НАН України: Т. 78. Математика та її застосування. – Київ, 2008. – 122 с.
3. *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. 2-е изд., испр. – Москва: Наука, 1987. – 384 с.
4. *Koshlyakov V. N., Makarov V. L.* The theory of gyroscopic systems with non-conservative forces // J. Appl. Math. Mech. – 2001. – **65**, No 4. – P. 681–687.
5. *Мартынюк А. А., Миладжанов В. Г.* Об устойчивости импульсных систем при структурных возмущениях // Электрон. моделирование. – 1994. – **16**, № 3. – С. 3–7.
6. *Martyniuk A. A., Stavroulakis I. P.* Direct Lyapunov's matrix-function method for impulsive systems under structural perturbations // Canadian Appl. Math. Quart. – 1999. – **7**, No 2. – P. 159–183.
7. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. – Москва: Наука, 1987. – 328 с.
8. *Очеретнюк Е. В., Слын'ко В. И.* Параметрический резонанс в задачах динамики твердого тела на длинном струнном подвесе // Механика тв. тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 64–84.
9. *Kozlov V. V.* Gyroscopic stabilization and parametric resonance // J. Appl. Math. Mech. – 2001. – **65**, No 5. – P. 715–721.
10. *Ocheretnyuk Ye. V., Slyn'ko V. I.* The conditions for loss of stability of the rotation of a dynamically symmetrical rigid body suspended on a string with parametric perturbations // Ibid. – 2013. – **77**, No 2. – P. 145–150.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 448 с.
12. *Штокало И. З.* Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами // Мат. сб. – 1946. – **19**, № 61. – Вып. 2. – С. 263–286.
13. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 56–64.

*Институт механіки ім. С. П. Тимошенко
НАН України, Київ*

Поступило в редакцію 22.10.2014

С. І. Голінько

Про стійкість плоского гіроскопічного маятника

Встановлено умови стійкості плоского гіроскопічного маятника. З використанням спеціальних замінів система диференціальних рівнянь збуреного руху з імпульсною дією приводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Знайдено умови виникнення параметричного резонансу коливань плоского гіроскопічного маятника.

S. I. Golinko

On the stability of a plane gyroscopic pendulum

The stability of a plane gyroscopic pendulum is considered. The system of differential equations of perturbed motion with impulsive action, using the special changes of variables, is reduced to a linear system of ordinary differential equations with constant coefficients. The conditions of existence of the parametric resonance of plane gyroscopic pendulum's oscillations are obtained.