



УДК 536.24

А. П. Слесаренко, О. П. Демьянченко, Н. А. Сафонов

Аналитическое моделирование тепловых процессов в теплоизлучающих телах с использованием S -функций

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Л. Шубенко)

Предложен метод встречных функционалов решения нелинейных краевых задач для теплоизлучающих тел, который позволяет впервые получить приближенные аналитические решения с двухсторонней сходимостью к точному решению задачи. В построенных аналитических структурах решения точно удовлетворяются главные граничные условия, точную информацию о частях поверхности тела сложной формы в аналитических структурах решения предлагается учитывать с помощью S -функций.

Ключевые слова: аналитическое моделирование, тепловые процессы, S -функции, встречные функционалы, краевые задачи, структуры решения.

Развитие теплофизики высоких температур поставило ряд задач по теоретическому определению тепловых полей с учетом, наряду с теплопроводностью и конвекцией, передачи тепла излучением. Первые два способа передачи теплоты возможны лишь при непосредственном контакте между телами. Тепловое излучение зависит от температуры тела. Чем выше его температура, тем большую роль играет излучение тепла в общем процессе теплопереноса. Тепловое излучение всегда сопровождается переходом энергии из одной формы в другую и носит волновой характер. При излучении теплота превращается в энергию электромагнитных колебаний, которая со скоростью света распространяется в окружающее пространство. При поглощении она полностью или частично трансформируется в тепловую энергию.

Определение температурного поля теплоизлучающего тела имеет большое значение в случае высокотемпературных процессов, таких как отливка массивных тел, остывание тел в вакууме, разогрев тел, поглощающих или испускающих тепло. Это есть нелинейная краевая задача математической физики: внутри тела температура удовлетворяет уравнению теплопроводности, а на его поверхности имеет место излучение тепла по закону Стефана–Больцмана, который приводит к нелинейному краевому условию.

Рассмотрим задачу о распределении температуры в конечном цилиндре с полостью (рис. 1) при условии, что поверхность S_0 поддерживается при температуре φ , ниже

© А. П. Слесаренко, О. П. Демьянченко, Н. А. Сафонов, 2015

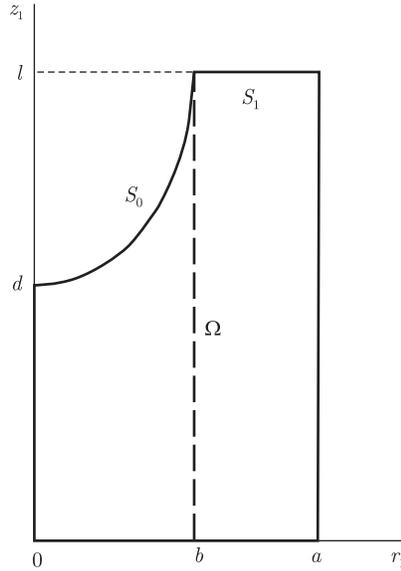


Рис. 1. Исследуемая область

основание $z = 0$ теплоизолировано, а остальная поверхность S_1 излучает тепло по закону Стефана–Больцмана. Определение температурного поля в цилиндре в этом случае сводится к решению нелинейной краевой задачи [1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$T = \varphi \quad \text{на } S_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} + \chi T^4 = 0 \quad \text{на } S_1, \quad (4)$$

где ν — направление внешней нормали к поверхности S_1 , $z = z_1 l^{-1}$; $r = r_1 l^{-1}$.

Сведем решение нелинейной краевой задачи (1)–(4) к решению последовательности линейных краевых задач теплопроводности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{ij}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (5)$$

$$T_{ij} = \varphi \quad \text{на } S_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \nu} + \chi T_{P_{ij}}^3 T_{ij} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad (8)$$

$$T_{3j} = 0,5(T_{1j} + T_{2j}) \quad \text{в } \Omega, \quad P_{1j} \rightarrow 3, j - 1, \quad P_{2j} \rightarrow 1, j,$$

где j — номер итерации. Начальное распределение температурного поля было выбрано как $T_{11} = \varphi$ в Ω . Коэффициенты теплоотдачи $\chi T_{P_{ij}}^3$ в граничных условиях (8) определяются из

решений задач на предыдущих итерациях таким образом, что попеременно математические модели в итерационном процессе моделируют исследуемый нелинейный процесс теплообмена с более высокой и менее высокой интенсивностью теплообмена по отношению к исходной нелинейной модели теплообмена.

Структуры решения краевых задач (5)–(8), точно удовлетворяющие главному краевому условию, представим в виде

$$T_{ij} = \varphi + \sum_{k,s} C_{ks}^{(ij)} \omega_{ks}, \quad (9)$$

где $\omega(r, z) = 0$ — уравнение поверхности S_0 . Базисные функции φ_{ks} выбирались в виде сплайнов Шенберга первой степени, определенных на равномерной по обоим переменным сетке и в виде степенных полиномов четной степени $\varphi_{ks} = r^{2k} z^{2s}$.

Если поверхность S_0 имеет сложную форму, то непрерывно-дифференцируемую функцию $\omega(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям $\omega > 0$ при $(x, y, z) \in \Omega$, $\omega|_{S_0} = 0$, можно построить с помощью S -функций [2].

Задачи (5)–(8) сведем к соответствующим вариационным задачам о минимуме встречаемых функционалов

$$I(T_{ij}) = \int_{\Omega} (\text{grad } T_{ij})^2 d\Omega + \int_{S_1} \chi T_{P_{ij}}^3 T_{ij}^2 dS_1 \quad (10)$$

при решении задачи (1)–(4). Неопределенные коэффициенты $C_{ks}^{(ij)}$ для вариационных задач (10) находятся из соответствующих систем Рунца [3].

Расчет тепловых полей проводился для следующих значений параметров задачи: $l = 1$ м; $a = 0,25$ м; $b = 0,1875$ м; $\chi = 0,5896 \cdot 10^{-9}$ Вт/(м² · К⁴); $\varphi = 2000$ К. При значении $d = 1 - b$ полость будет иметь вид полусферы. Функция $\omega(r, z)$ в аналитической структуре решения (9) имеет вид $\omega(\rho, z) = (z - 1)^2 + r^2 - b^2 l^{-2}$. Результаты вычислительного эксперимента (ВЭ) для этого случая представлены в табл. 1. В первой строке приводятся результаты ВЭ с использованием аппроксимации полиномами четной степени при линейаризации вида (8), во второй — с использованием сплайн-аппроксимации [4] при той же линейаризации.

При тех же значениях параметров и для $dl^{-1} = 0,2$ (полуэллипсоид вращения) результаты ВЭ для температуры в отдельных точках области представлены в табл. 2. В первой

Таблица 1. Значения температуры в цилиндре со сферической полостью, К

$z \setminus r$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
1,0					1835,0	1501,0
					1799,9	1507,1
0,8	1906,0	1864,0	1756,0	1626,0	1499,0	1372,0
	1900,5	1860,4	1751,9	1617,2	1486,1	1372,4
0,6	1166,0	1160,0	1143,0	1116,0	1085,0	1055,0
	1164,6	1160,3	1144,1	1119,2	1088,1	1053,1
0,4	932,0	930,0	924,0	914,0	900,0	879,0
	913,6	912,5	906,0	897,1	884,5	868,8
0,2	833,0	832,0	829,0	822,0	813,0	807,0
	803,6	802,9	799,5	793,9	786,1	776,3
0,0	745,0	744,0	740,0	734,0	726,0	712,0
	771,8	771,1	768,2	763,5	756,8	748,4

строке представлены значения температуры, полученные с использованием аппроксимации полиномами четной степени при линеаризации вида (8), во второй строке — с использованием сплайн-аппроксимации при том же представлении нелинейного краевого условия. В этом случае функция $\omega(\rho, z)$ в аналитической структуре решения (9) имеет вид
$$\omega(r, z) = \frac{(z-1)^2}{0,64} + \frac{r^2}{b^2 l^{-2}} - 1.$$

Третий вариант полости S_0 для задачи (1)–(5) представлял собой конечный круговой цилиндр, нижнее основание которого совпадает с плоскостью $z = dl^{-1}$. Оси внутреннего и наружного цилиндров совпадают. В этом случае непрерывно дифференцируемая функция $\omega(r, z)$ в структуре решения (9) задачи (1)–(5) строится с помощью S -функций [2] в виде
$$\omega(r, z) = f_1 \underset{S}{\vee} f_2 = f_1 + f_2 + \sqrt[2k]{f_1^{2k} + f_2^{2k} + \beta_1 \exp[-\beta_2(f_1^{2k} + f_2^{2k})]}, \beta_1 = 10^{-N}; \beta_2 = 10^N,$$
 $f_1 = r^2 - b^2 l^{-2}; f_2 = dl^{-1} - z$. Вычислительный эксперимент проводился для тех же значений параметров, что и в предыдущих случаях, $dl^{-1} = 0,2$. В табл. 3. представлены значения температуры в цилиндре с полостью, полученные с использованием сплайн-аппроксимации. Для иллюстрации сходимости от шага сетки по переменным r и z численные значения представлены в зависимости от числа базисных функций (сплайнов) по координате $r(n_r)$ и по координате $z(n_z)$. Сетка сплайнов прямоугольная и равномерная по обоим переменным. В первой строке таблицы — приближенное решение, полученное для значений $n_r = 7, n_z = 13$, во второй строке — $n_r = 9, n_z = 21$, а в третьей — $n_r = 17, n_z = 41$. При расчетах использовались итерации вида (8) при $k = 3, N = 10$.

Для подтверждения достоверности результатов сравним полученное решение задачи при значении $z = 0,6 T_{\text{прибл}}(0,21875) = 1823$ К и $T_{\text{прибл}}(0,25) = 1670$ К с решением этой же задачи для бесконечного цилиндра, допускающей точное решение: $T(0,21875) = 1823$ К и $T(0,25) = 1670$ К.

Проверка эффективности предложенного метода встречных функционалов для решения нелинейных краевых задач теплоизлучающих тел проводилась при решении одномерных задач для бесконечной пластины и бесконечного полого цилиндра путем сравнения полученных результатов с точными решениями нелинейных задач. Относительные погрешности полученных приближенных решений с недостатком и избытком не превосходили 0,1% уже после шестой итерации по отношению к точному решению.

Приведенные результаты моделирования тепловых процессов в теплоизлучающих телах вращения неканонической формы показали эффективность предлагаемого подхода и со

Таблица 2. Значения температуры в цилиндре с эллиптической полостью, К

$z \setminus r$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
1,0					1854,0	1540,0
					1840,6	1537,0
0,8					1923,0	1661,0
					1894,6	1648,5
0,6					1839,0	1610,0
					1801,2	1590,1
0,4				1900,0	1664,0	1497,0
				1855,7	1639,8	1479,9
0,2	2000,0	1937,0	1788,0	1606,0	1455,0	1352,0
	2000,0	1815,6	1630,5	1496,2	1386,5	1298,0
0,0	1365,0	1353,0	1325,0	1297,0	1278,0	1207,0
	1385,0	1379,5	1346,3	1300,4	1246,1	1189,4

Таблица 3. Значения температуры в цилиндре с полостью в виде конечного кругового цилиндра, К

$z \setminus r$	0,00000	0,06250	0,12500	0,15625	0,18750	0,21875	0,25000
1,0					2000	1684	1539
					2000	1685	1537
					2000	1673	1533
0,9					2000	1817	1662
					2000	1819	1665
					2000	1817	1663
0,6					2000	1817	1660
					2000	1824	1671
					2000	1823	1671
0,5					2000	1817	1665
					2000	1824	1671
					2000	1823	1671
0,3					2000	1814	1664
					2000	1821	1665
					2000	1820	1666
0,2	2000	2000	2000	2000	2000	1765	1612
	2000	2000	2000	2000	2000	1760	1611
	2000	2000	2000	2000	2000	1750	1605
0,1	1758	1738	1680	1634	1576	1507	1434
	1756	1738	1685	1642	1584	1515	1438
	1754	1737	1683	1639	1581	1512	1436
0,0	1661	1640	1586	1545	1496	1439	1376
	1662	1642	1586	1544	1494	1437	1374
	1660	1641	1585	1543	1493	1436	1373

стороны универсальности аналитической структуры решения по отношению к изменению формы части поверхности тела, на которой поддерживается очень высокая температура.

Цитируемая литература

1. *Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П.* Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений. – Киев: Наук. думка, 2014. – 293 с.
2. *Слесаренко А. П.* S -функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм // Вост.-Европ. журн. передовых технологий. – 2012. – № 1/4 (55). – С. 4–10.
3. *Слесаренко А. П.* Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях // Пробл. машиностроения. – 2002. – 5, № 4. – С. 72–80.
4. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.

References

1. *Matsevityi Yu. M., Slesarenko A. P.* Ill-posed multiparametric problems of heat transfer and regional-structural regulation for their solution, Kiev: Naukova Dumka, 2014 (in Russian).
2. *Slesarenko A. P.* East-Europ. J. of Enterprise Technology, 2012, No 1/4 (55): 4–10 (in Russian).
3. *Slesarenko A. P.* Machine-Building Problems, 2002, 5, No 4: 72–80 (in Russian).
4. *Zavyalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L.* Methods of spline-functions, Moscow: Nauka, 1980 (in Russian).

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков
Азовский морской институт Одесской
национальной морской академии, Мариуполь*

Поступило в редакцию 08.01.2015

А. П. Слесаренко, О. П. Демьянченко, М. О. Сафонов

Аналітичне моделювання теплових процесів в тепловипромінюючих тілах з використанням S -функцій

Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАН України, Харків
Азовський морський інститут Одеської національної морської академії, Маріуполь

Запропоновано метод зустрічних функціоналів розв'язання нелінійних крайових задач для тепловипромінюючих тіл, який дозволяє вперше отримати наближені аналітичні розв'язки з двосторонньою збіжністю до точного розв'язку задачі. У побудованих аналітичних структурах розв'язку точно задовольняються головні граничні умови, точну інформацію про частини поверхні тіла складної форми в аналітичних структурах розв'язку пропонується враховувати за допомогою S -функцій.

Ключові слова: аналітичне моделювання, теплові процеси, S -функції, зустрічні функціонали, структури розв'язку.

A. P. Slesarenko, O. P. Demyanchenko, M. O. Safonov

Analytical modeling of thermal processes in heat-radiating bodies using S -functions

A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine, Kharkiv
Azov Maritime Institute of the Odesa National Maritime Academy, Mariupol

We propose a method of counter functional solutions of the nonlinear boundary-value problems for heat radiating bodies, which allows us to first obtain the approximate analytical solutions with two-way convergence to the exact solution of the problem. The in-built analytic structure of the solution exactly met the main boundary conditions. It is proposed to obtain the accurate information about parts of the body surface in the complex analytic structures of the solution, by using S -functions.

Keywords: analytical modeling, heat processes, S -functions, reciprocal functions, boundary-value problems, problem solving structure.