УДК 512.554

Л. А. Курдаченко, О. О. Пипка, І. Я. Субботін

Про деякі взаємні зв'язки між факторами верхніх та нижніх центральних рядів в алгебрах Лі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Для алгебр Лі одержано узагальнення теоретико-групової теореми Бера, яка ілюструє зв'язки між факторами верхнього та нижнього центральних рядів групи.

Ключові слова: теорема Бера, верхній центральний ряд, нижній центральний ряд, Z-розклад, верхній гіперцентр, нільпотентний резидуал.

Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$ та нехай

$$\zeta(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ для кожного елемента } y \in L\} \text{ —}$$

це центр алгебри L. Очевидно, що $\zeta(L)$ є L-підалгеброю, більш того, центр алгебри L буде її ідеалом. Побудуємо тепер верхній центральний ряд

$$\langle 0 \rangle = \zeta_0(L) \leqslant \zeta_1(L) \leqslant \zeta_2(L) \leqslant \cdots \zeta_\alpha(L) \leqslant \zeta_{\alpha+1}(L) \leqslant \cdots \zeta_\gamma(L) = \zeta_\infty(L)$$

алгебри L за таким правилом. Нехай $\zeta_1(L) = \zeta(L)$ — це центр алгебри L, а далі для кожного порядкового числа α покладемо $\zeta_{\alpha+1}(L)/\zeta_\alpha(L) = \zeta(L/\zeta_\alpha(L))$ та для кожного граничного порядкового числа λ визначимо $\zeta_\lambda(L) = \bigcup\limits_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(L)$. Останній член $\zeta_\infty(L)$ цього ряду називається *верхнім гіперцентром* алгебри L. Позначимо також через $zl(L)$ довжину верхнього центрального ряду алгебри L.

У випадку, коли $L = \zeta_\infty(L)$, алгебра L називається *гіперцентральною.*

Побудуємо тепер нижній центральний ряд алгебри L

$$L = \gamma_1(L) \geqslant \gamma_2(L) \geqslant \cdots \gamma_\alpha(L) \geqslant \gamma_{\alpha+1}(L) \geqslant \cdots \gamma_\lambda(L) = \gamma_\infty(L)$$

за таким правилом. Нехай $\gamma_1(L) = L$, $\gamma_2(L) = [L, L]$, а далі для кожного порядкового числа α покладемо $\gamma_{\alpha+1}(L) = [\gamma_\alpha(L), L]$ та для кожного граничного порядкового числа λ визначимо $\gamma_\lambda(L) = \bigcap\limits_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(L)$. Останній член $\gamma_\infty(L)$ цього ряду називається *нижнім гіпоцентром* алгебри L. У випадку, коли $L = \gamma_\infty(L)$, алгебра L називається *гіпоцентральною.*

Природно, що першим почав розглядатися випадок, коли алгебра Лі L має скінченний верхній центральний ряд. Зокрема, якщо вона є нільпотентною (тобто збігається з верхнім гіперцентром, який має скінченний номер), то її нижній центральний ряд також скінченний, а його довжина збігається з довжиною верхнього центрального ряду (див., наприклад, [1]). У зв'язку з цим природно виникає питання про алгебри Лі, у яких верхній центральний ряд скінченний, а верхній гіперцентр має скінченну ковимірність. Важливим частинним випадком тут буде ситуація, коли центр алгебри Лі має скінченну ковимірність. Будова алгебр Лі, що мають таку властивість, є відомою, більш того, з теореми 2 статті [2] маємо:

Теорема LZD. *Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$. Якщо фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ має скінченну вимірність d, то похідний ідеал $[L, L]$ також має скінченну вимірність. Більш того,* $\dim_{\Bbbk}([L, L]) \leqslant d(d + 1)/2$.

Між групами та алгебрами Лі існує певна аналогія. Для багатьох результатів, що були отримані в теорії груп, вдалося отримати аналоги в теорії алгебр Лі, і навпаки. Більш того, в деяких випадках в алгебрах Лі можливе більш глибоке просування (звичайно, у випадку, коли розглядається алгебра Лі над полем) (див., наприклад, [3]).

Аналогом теореми LZD в теорії груп є нижченаведена теорема.

Теорема ZD. *Нехай G — група, C — така підгрупа центру $\zeta(G)$, що фактор-група G/C скінченна. Тоді комутант $[G, G]$ групи G є скінченною підгрупою.*

Цей загальний результат відіграє досить велику роль в теорії нескінченних груп, він лежить у фундаменті багатьох важливих її результатів. Вперше цей результат у такій формі з'явився в роботі Б. Неймана [4]. Але в кінці роботи Б. Нейман пише, що показував цю статтю Р. Беру, і той зазначив, що ця теорема є наслідком більш загального результату, який був ним доведений у статті [5]. Дійсно, в теоремі 3 цієї роботи доведено, що якщо нормальна підгрупа H групи G має скінченний індекс, то скінченним буде і фактор $([G, G] \bigcap H)/[H, G]$. Разом з тим Р. Бер у статті [6] наводить теорему ZD у її звичайному вигляді і дає їй нове доведення. Тут виникає природне питання: *як пов'язані між собою порядки* $|G/\zeta(G)| = t$ *та* $|[G, G]|$? Дослідження цієї задачі ініціював Б. Нейман у роботі [4]. Більш того, він перший отримав оцінку для $|[G, G]|$ в термінах $|G/\zeta(G)|$. Найкращу оцінку для $|[G, G]|$ отримав Дж. Вайголд. У роботі [7] він довів, що $|[G, G]| \leqslant t^m$, де $m = (\log_p t - 1)/2$, а p — це найменше число, яке ділить t. Більш того, він довів, що ця нерівність досягається тоді і тільки тоді, коли $t = p^n$, де p — це просте число. Якщо t має більше одного простого дільника, то ситуація стає значно складнішою.

Р. Бер у роботі [6] отримав узагальнення теореми ZD. Він розглянув ситуацію, коли верхній центральний ряд групи є скінченним, а верхній гіперцентр має скінченний індекс. Точніше, він довів, що скінченність фактор-групи $G/\zeta_n(G)$ тягне за собою скінченність $\gamma_{n+1}(G)$. У своїх знаменитих лекціях [8, теорема 8.7] про нільпотентні групи Ф. Холл отримав узагальнення як теореми ZD, так і теореми Бера. Слід зазначити, що в цих лекціях Ф. Холл називає теорему ZD *теоремою Шура*. Наслідуючи Ф. Холла, в наш час багато алгебраїстів називають теорему ZD теоремою Шура.

Аналог результату Холла для алгебр Лі був отриманий Я. Стюартом [9, теорема 5.2]. Зокрема, з цієї теореми випливає аналог теореми Бера для алгебр Лі. Ця тематика видається досить цікавою, вона вказує на дуже тісний зв'язок між факторами верхнього та нижнього центральних рядів. Також вона отримала продовження як в алгебрах Лі (див., наприклад, [10]), так і в їх узагальненнях [11].

З лієвського аналогу теореми Бера випливає, що у випадку, коли гіперцентр з номером n алгебри Лі L має скінченну ковимірність d, то $\dim_{\Bbbk}(\gamma_{n+1}(L))$ також є скінченною. У свою чергу, той факт, що вимірність $\dim_{\Bbbk}(\gamma_{n+1}(L))$ є скінченною, тягне за собою існування такого найменшого ідеалу K в алгебрі L, що фактор-алгебра L/K є нільпотентною. Більш того, в цьому випадку K має скінченну вимірність. Інакше кажучи, нільпотентний резидуал алгебри L буде скінченновимірним. Буде доречним тут нагадати деякі визначення.

Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$. І нехай $\mathfrak{X}$ — це клас алгебр Лі. Покладемо

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{X}}(L) = \{H \mid H - \text{ідеал алгебри } L\text{, для якого } L/H \in \mathfrak{X}\}.$$

Тоді перетин $L_{\mathfrak{X}}$ всіх ідеалів з множини $\mathrm{Res}_{\mathfrak{X}}(L)$ називається $\mathfrak{X}$-*резидуалом* (або $\mathfrak{X}$-*корадикалом*) алгебри L. Якщо $\mathrm{Res}_{\mathfrak{X}}(L)$ має найменший елемент R, то $R = L_{\mathfrak{X}}$ та $L/L_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$. Проте в загальному випадку $L/L_{\mathfrak{X}} \notin \mathfrak{X}$.

Якщо $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ — це клас абелевих алгебр Лі, то $\mathfrak{A}$-резидуал $L_{\mathfrak{A}}$ в точності є похідним ідеалом $[L, L]$ алгебри L. Зокрема, маємо $L/L_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$.

Якщо $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_c$ — це клас нільпотентних алгебр Лі, ступінь нільпотентності яких не перевищує c, то $\mathfrak{N}_c$-резидуал $L_{\mathfrak{N}_c}$ збігається з підалгеброю $\gamma_{c+1}(L)$. Зокрема, також маємо $L/L_{\mathfrak{N}_c} \in \mathfrak{N}_c$.

Проте якщо $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ — це клас всіх нільпотентних алгебр Лі, то в загальному випадку $L/L_{\mathfrak{N}} \notin \mathfrak{N}$.

Перший наш результат якраз і дає границю для вимірності нільпотентного резидуалу у випадку, коли вимірність $\dim_{\Bbbk}(L/\zeta_n(L))$ є скінченною. Цікавим є той факт, що його вимірність не залежить від n, а лише від вимірності фактор-алгебри $L/\zeta_n(L)$.

Суттєву роль у доведенні цього результату відіграє наявність у деяких абелевих ідеалів важливих специфічних прямих розкладів.

Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$ і нехай M — це непорожня підмножина алгебри L, а H — це підалгебра алгебри L. Покладемо

$$C_H(M) = \{x \in H \mid [x, y] = 0 \text{ для всіх } y \in M\}.$$

Підмножина $C_H(M)$ називається *централізатором* (або *анулятором*) M в підалгебрі H. Неважко перевірити, що $C_H(M)$ є підалгеброю алгебри L. Більш того, якщо M — це ідеал в L, то $C_H(M)$ також є ідеалом в L.

Нехай M — це підалгебра алгебри L. І нехай A, B — це такі ідеали в M, що $B \leqslant A$. Визначимо $C_M(A/B)$ за таким правилом:

$$C_M(A/B) = \{x \in M \mid [x, a] \in B \text{ для всіх } a \in A\}.$$

Інакше кажучи, $C_M(A/B)/B = C_{M/B}(A/B)$.

Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$. І нехай B, C — це такі ідеали алгебри L, що $B \leqslant C$. Фактор C/B називається L-*центральним*, якщо $C_L(C/B) = L$. Якщо A — це ідеал алгебри L, то ми можемо визначити *верхній L-центральний ряд*

$$\langle 0 \rangle = \zeta_{0,L}(A) \leqslant \zeta_{1,L}(A) \leqslant \ldots \zeta_{\alpha,L}(A) \leqslant \ldots \zeta_{\gamma,L}(A) = \zeta_{\infty,L}(A)$$

ідеалу A за таким правилом: $\zeta_{1,L}(A) = \zeta(L) \bigcap A$, $\zeta_{\alpha+1,L}(A)/\zeta_{\alpha,L}(A) = \zeta(L/\zeta_{\alpha,L}(A)) \bigcap \bigcap A/\zeta_{\alpha,L}(A)$ для всіх порядкових чисел α та $\zeta_{\lambda,L}(A) = \bigcup\limits_{\mu<\lambda} \zeta_{\mu,L}(A)$ для кожного граничного порядкового числа λ. Останній член $\zeta_{\infty,L}(A)$ цього ряду називається *верхнім L-гіперцентром* ідеалу A. За самим визначенням видно, що кожний член $\zeta_{\alpha,L}(A)$ верхнього L-центрального ряду ідеалу A є ідеалом алгебри L.

Фактор C/B називається L-*ексцентральним*, якщо $C_L(C/B) \neq L$. Ідеал C алгебри L називається L-*гіперексцентральним*, якщо він має зростаючий ряд

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leqslant C_1 \leqslant \cdots C_\alpha \leqslant C_{\alpha+1} \leqslant \cdots C_\gamma = C$$

ідеалів алгебри L, кожен фактор $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ якого є L-ексцентральним та L-головним для кожного $\alpha < \gamma$. Будемо говорити, що ідеал A лієвої алгебри L має Z-*розклад*, якщо

$$A = \zeta_{\infty,L}(A) \oplus \eta_{\infty,L}(A),$$

де $\eta_{\infty,L}(A)$ — це максимальний L-гіперекцентральний ідеал в A. Зазначимо, що в цьому випадку ідеал $\eta_{\infty,L}(A)$ містить кожен L-гіперекцентральний ідеал A. Зокрема, цей розклад єдиний. Дійсно, нехай B — це такий L-гіперекцентральний ідеал алгебри L, що $B \leqslant A$. Покладемо $E = \eta_{\infty,L}(A)$. Якщо фактор $(B+E)/E$ ненульовий, то він містить ненульовий L-головний ідеал U/E фактор-алгебри L/E. Оскільки $(B+E)/E \cong B/(B\bigcap E)$, то фактор U/E L-ізоморфний деякому L-головному фактору з ідеалу B, звідки отримуємо, що $L/C_L(U/E) \neq L$. З іншого боку, $(B+E)/E \leqslant A/E \cong \zeta_{\infty,L}(A)$, тобто $L/C_L(U/E) = L$. Це протиріччя показує, що $B \leqslant E$. А тому ідеал $\eta_{\infty,L}(A)$ містить кожен L-гіперекцентральний ідеал алгебри L і, отже, буде єдиним.

Твердження 1. *Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$. І нехай A — це ідеал алгебри L. Припустимо, що A має скінченний ряд ідеалів алгебри L, кожен фактор якого або L-центральний, або L-екцентральний та L-головний. Якщо фактор-алгебра $L/C_L(A)$ нільпотентна, то A має Z-розклад.*

Наслідок. *Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$. І нехай A — це ідеал алгебри L. Припустимо, що A має скінченну вимірність. Якщо фактор-алгебра $L/C_L(A)$ нільпотентна, то A має Z-розклад.*

Теорема A. *Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$. І нехай R — це нільпотентний резидуал алгебри L. Припустимо, що існує таке натуральне число n, що вимірність $\dim_{\Bbbk}(L/\zeta_n(L)) = d$ скінченна. Тоді фактор-алгебра L/R нільпотентна. Більш того, R має скінченну вимірність, яка не перевищує $d(d+3)/2$.*

Для груп у роботі [12] було отримане таке найбільш широке узагальнення теореми Бера.

Теорема. *Нехай G — група. І нехай Z — це верхній гіперцентр групи G. Якщо порядок фактор-групи G/Z скінченний та дорівнює числу t, то група G містить таку скінченну нормальну підгрупу K, що фактор-група G/K гіперцентральна. Більш того, $|K| \leqslant t^m$, $m = (\log_2 t + 1)/2$.*

Природно виникає питання про те, чи буде мати місце аналогічне твердження для алгебр Лі? Нижченаведений наш результат показує, що відповідь на це питання є ствердною.

Теорема B. *Нехай L — алгебра Лі над полем $\Bbbk$. Припустимо, що її верхній гіперцентр $\zeta_\infty(L)$ має скінченну ковимірність d. Тоді L містить такий скінченновимірний ідеал E, що фактор-алгебра L/E гіперцентральна. Більш того, $\dim_{\Bbbk}(E) \leqslant d(d+3)/2$.*

Цитована література

1. *Бахтурин Ю. А.* Тождества а алгебрах Ли. – Москва: Наука, 1985. – 447 с.
2. *Vaughan-Lee M. R.* Metabelian BFC p-groups // J. London Math. Soc. – 1972. – **5**. – P. 673–680.
3. *Stewart I. N.* Infinite-dimensional Lie algebras in the spirit of infinite group theory // Compositio Math. – 1970. – **22**. – P. 313–331.
4. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate elements // Proc. London Math. Soc. – 1951. – **1**. – P. 178–187.
5. *Baer R.* Representations of groups as quotient groups. II. Minimal central chains of a group // Trans. Amer. Math. Soc. – 1945. – **58**. – P. 348–389.
6. *Baer R.* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen // Math. Ann. – 1952. – **124**. – P. 161–177.
7. *Wiegold J.* Multiplicators and groups with finite central factor-groups // Math. Z. – 1965. – **89**. – P. 345–347.
8. *Hall P.* Nilpotent groups (lectures given at the Canadian Mathematical Congress: University of Alberta, 1957) // Collected Works of Philip Hall. – 1969. – P. 415–462.
9. *Stewart I. N.* Verbal and marginal properties of non-associative algebras in the spirit of infinite group theory // Proc. London Math. Soc. – 1974. – **28**. – P. 129–140.
10. *Stitzinger E., Turner R.* Concerning derivations of Lie algebra // Linear Multilinear Algebra. – 1999. – **45**. – P. 329–331.

11. *Saeedi F., Veisi B.* On Schur theorem and it converses for n-Lie algebras // Linear Multilinear Algebra. – 2014. – **62**. – P. 1139–1145.
12. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* On a generalization of Baer theorem // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – **141**. – P. 2597–2602.

References

1. *Bahturin Yu. A.* Identities in Lie algebras, Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
2. *Vaughan-Lee M. R.* J. London Math. Soc., 1972, **5**: 673–680.
3. *Stewart I. N.* Compositio Math., 1970, **22**: 313–331.
4. *Neumann B. H.* Proc. London Math. Soc., 1951, **1**: 178–187.
5. *Baer R.* Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **58**: 348–389.
6. *Baer R.* Math. Ann., 1952, **124**: 161–177.
7. *Wiegold J.* Math. Z., 1965, **89**: 345–347.
8. *Hall P.* Collected Works of Philip Hall, 1969: 415–462.
9. *Stewart I. N.* Proc. London Math. Soc., 1974, **28**: 129–140.
10. *Stitzinger E., Turner R.* Linear Multilinear Algebra, 1999, **45**: 329–331.
11. *Saeedi F., Veisi B.* Linear Multilinear Algebra, 2014, **62**: 1139–1145.
12. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Proc. Amer. Math. Soc., 2013, **141**: 2597–2602.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 10.11.2014

Л. А. Курдаченко, А. А. Пыпка, И. Я. Субботин

О некоторых взаимных связях между факторами верхних и нижних центральных рядов в алгебрах Ли

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Для алгебр Ли получено обобщение теоретико-групповой теоремы Бэра, которая иллюстрирует связи между факторами верхнего и нижнего центральных рядов группы.

Ключевые слова: теорема Бэра, верхний центральный ряд, нижний центральный ряд, Z-разложение, верхний гиперцентр, нильпотентный резидуал.

L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, I. Ya. Subbotin

On some reciprocal relations between the factors of the upper and lower central series in Lie algebras

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

A generalization of the group-theoretic Baer's theorem regarding relations between the factors of the upper and lower central series for Lie algebras is obtained.

Keywords: Baer's theorem, upper central series, lower central series, Z-decomposition, upper hypercenter, nilpotent residual.