Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2015

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 517.977.55

М. М. Копець

Оптимальне керування динамічною системою другого порядку

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

Розглядається проблема мінімізації квадратичного функціонала на розв'язках системи диференціальних рівнянь другого порядку. Для дослідження сформульованої задачі оптимізації застосовано метод множників Лагранжа. Такий підхід дав можливість отримати необхідні умови оптимальності. На основі цих умов виведена система диференціальних рівнянь Ріккаті. Розв'язок отриманої системи дозволяє виписати явну формулу для оптимального керування.

Ключові слова: квадратичний функціонал, метод множників Лагранжа, необхідні умови оптимальності, оптимальне керування, система диференціальних рівнянь Ріккаті.

Посадка справедливо вважається одним з найбільш важливих і відповідальних етапів польоту літака. Такий висновок пояснюється в першу чергу тією обставиною, що основна частина польоту проходить при приблизно стабільних кутових і лінійних параметрах польоту, тоді як під час посадки ці параметри істотно змінюються. Саме з цієї причини згідно зі статистичними даними найбільша кількість катастроф і аварій припадає на етап посадки літака. У зв'язку з актуальністю проблеми збільшення надійності згаданого етапу польоту літака вагомого значення набуває вивчення математичної моделі цього процесу. Одна з таких моделей розглянута в [1, с. 253–254]. Запропонований метод називається автопілотом для посадки літака за глісадою (від франц. glissade — ковзання). Однак розгляд задачі оптимізації в [1] має декілька недоліків, через що практичне використання сформульованих там результатів неможливе. Зокрема, для системи диференціальних рівнянь (1) не вказані початкові умови. Про необхідні умови оптимальності зовсім не згадується. Відсутнє виведення системи диференціальних рівнянь Ріккаті. Як наслідок, ця система складається з трьох, а не з чотирьох (як повинно бути) рівнянь. Додаткові умови для цієї системи не вказані. Основна мета даної роботи полягає в усуненні вищезгаданих недоліків.

Постановка задачі. Процес посадки літака за глісадою описується такою системою двох лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} = u(t), \tag{1}$$

де через t позначено змінну, що описує час, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, дійсні числа t_0 та t_1 задані, функції $x_1(t)$ та $x_1(t)$ описують положення літака в момент часу t, функція $u(t)$ називається допустимим керуванням і належить до класу кусково-неперервних функцій. Для системи рівнянь (1) задані початкові умови

$$x_1(t_0) = x_{10}, \qquad x_2(t_0) = x_{20}, \tag{2}$$

де числа x_{10} і x_{20} відомі.

Якість процесу керування оцінюється за допомогою функціонала

$$I(x_1, x_2, u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} [f x_1^2(t) + g x_2^2(t) + u^2(t)]\, dt, \tag{3}$$

де числа f і g також задані. Задача полягає в знаходженні допустимого керування $u(t)$, на якому функціонал (3) досягає свого найменшого значення. Якщо таке керування існує, то воно називається *оптимальним керуванням*.

Необхідні умови оптимальності. Для знаходження оптимального керування використаємо метод множників Лагранжа. З цією метою замість функціонала (3) розглянемо такий функціонал

$$J(p_1, p_2, x_1, x_2, u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} [f x_1^2(t) + g x_2^2(t) + u^2(t)]\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} p_1(t)\left[x_2(t) - \frac{dx_1(t)}{dt}\right] dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} p_2(t)\left[u(t) - \frac{dx_2(t)}{dt}\right] dt, \tag{4}$$

Далі знаходимо приріст $\triangle J$ функціонала (4):

$$\triangle J = J(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{u}) - J(p_1, p_2, x_1, x_2, u),$$

де $\overline{p}_1 = p_1 + \varepsilon\delta p_1$, $\overline{p}_2 = p_2 + \varepsilon\delta p_2$, $\overline{x}_1 = x_1 + \varepsilon\delta x_1$, $\overline{x}_2 = x_2 + \varepsilon\delta x_2$, $\overline{u} = u + \varepsilon\delta u$. Після очевидних спрощень (розкриття дужок, інтегрування частинами та зведення подібних членів) останнє співвідношення матиме вигляд

$$\triangle J = \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg[\left[f x_1(t) + \frac{dp_1(t)}{dt}\right]\delta x_1(t) + \left[g x_2(t) + p_1(t) + \frac{dp_2(t)}{dt}\right]\delta x_2(t) +$$

$$+ [u(t) + p_2(t)]\delta u(t)\Bigg] dt - p_1(t_1)\delta x_1(t_1) - p_2(t_1)\delta x_2(t_1) +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta p_1(t)\left[x_2(t) - \frac{dx_1(t)}{dt}\right] dt + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta p_2(t)\left[u(t) - \frac{dx_2(t)}{dt}\right] dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} [f[\delta x_1(t)]^2 + g[\delta x_2(t)]^2 + [\delta u(t)]^2] dt. \tag{5}$$

На підставі рівності (5) можна сформулювати таке твердження.

Теорема 1. *Оптимальне керування* $u(t)$ *в задачі* (1)–(3) *єдине і визначається із співвідношень*

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} = u(t), \tag{6a}$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \qquad x_2(t_0) = x_{20}, \tag{6b}$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -fx_1(t), \qquad \frac{dp_2(t)}{dt} = -gx_2(t) - p_1(t), \tag{6c}$$

$$p_1(t_1) = 0, \qquad p_2(t_1) = 0, \tag{6d}$$

$$u(t) + p_2(t) = 0. \tag{6e}$$

Виведення системи диференціальних рівнянь Ріккаті. Оскільки система співвідношень (6a)–(6e) лінійна, то цілком обгрунтованою є гіпотеза про існування таких залежностей:

$$p_1(t) = r_{11}(t)x_1(t) + r_{12}(t)x_2(t), \tag{7}$$

$$p_2(t) = r_{21}(t)x_1(t) + r_{22}(t)x_2(t), \tag{8}$$

де функції $r_{ij}(t)$ $(i = 1, 2; j = 1, 2)$ потрібно знайти. Диференціюючи рівність (7) та враховуючи співвідношення (6a), (6e), (8), отримаємо рівняння

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \left[\frac{dr_{11}(t)}{dt} - r_{12}(t)r_{21}(t)\right]x_1(t) + \left[\frac{dr_{12}(t)}{dt} - r_{12}(t)r_{22}(t) + r_{11}(t)\right]x_2(t).$$

Порівнюючи останнє співвідношення і співвідношення $\dfrac{dp_1(t)}{dt} = -fx_1(t)$ та враховуючи, що обидва ці співвідношення мають місце для довільних x_1, x_2, отримаємо такі два рівняння:

$$\frac{dr_{11}(t)}{dt} - r_{12}(t)r_{21}(t) + f = 0, \tag{9}$$

$$\frac{dr_{12}(t)}{dt} - r_{12}(t)r_{22}(t) + r_{11}(t) = 0. \tag{10}$$

Аналогічно із співвідношень (8) та (6c) знаходимо

$$\frac{dr_{21}(t)}{dt} - r_{21}(t)r_{22}(t) + r_{11}(t) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{dr_{22}(t)}{dt} + r_{12}(t) + r_{21}(t) - r_{22}^2(t) + g = 0. \tag{12}$$

На підставі співвідношень (6d), (7) та (8) отримаємо такі умови:

$$r_{11}(t_1) = 0, \qquad r_{12}(t_1) = 0, \qquad r_{21}(t_1) = 0, \qquad r_{22}(t_1) = 0. \tag{13}$$

Беручи до уваги попередні міркування, приходимо до такого висновку.

Теорема 2. *Функції* $r_{ij}(t)$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ *є розв'язком системи диференціальних рівнянь* (9)–(12) *та задовольняють умови* (13).

Зауваження. Враховуючи умови (13) і порівнюючи рівняння (10) та (11), маємо рівність $r_{12}(t) = r_{21}(t)$.

Безпосередньо із теорем 1 та 2 отримаємо таке твердження.

Теорема 3. *Оптимальне* $u(t)$ *керування має вигляд*

$$u(t) = -r_{21}(t)x_1(t) - r_{22}(t)x_2(t),$$

де функції $x_1(t)$ *та* $x_2(t)$ *є розв'язком системи диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} = r_{21}(t)x_1(t) - r_{22}(t)x_2(t)$$

і задовольняють початкові умови (2).

Таким чином, розглянуто задачу оптимального керування процесом посадки літака, актуальність якої обумовлена необхідністю підвищення надійності цього етапу польоту. Як математичну модель процесу обрано лінійно квадратичну задачу оптимального керування для випадку динамічної системи другого порядку. За допомогою методу множників Лагранжа отримано необхідні умови оптимальності. Встановлено умови, що забезпечують єдиність оптимального керування. Отримано систему диференціальних рівнянь Ріккаті та додаткові умови для неї. Розв'язок цієї системи дає можливість подати оптимальне керування в явній формі. В перспективі важливим є отримання формул для обчислення функцій $r_{11}(t)$, $r_{12}(t)$, $r_{21}(t)$, $r_{22}(t)$ методом, запропонованим у [2]. Цікавим для подальших досліджень є також ускладнення розглянутої математичної моделі в напрямках, описаних в [3–5].

Цитована література

1. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. – Москва: Наука, 1969. – 360 с.
2. *Копец М. М.* Задача оптимального управления процессом колебания струны // Теорія оптимальних рішень. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2014. – С. 32–38.
3. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. – Київ: Наук. думка, 1992. – 384 с.
4. *Chikrii A. A., Eidel'man S. D.* Game control problem for quasi-linear systems with fractional derivatives of Riemann–Liouville // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – No 6. – P. 66–99.
5. *Eidel'man S. D., Chikrii A. A.* Dynamic game approach problem for equations of fractional order // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, No 11. – P. 1566–1583.

References

1. *Letov A. M.* Flight dynamics and control, Moscow: Nauka, 1969 (in Russian)
2. *Kopets M. M.* The optimal control problem by process of vibration of string, in Theory of Optimal Solutions, Kiev: Istitute of Cybernatics of the NAS of Ukraine, 2014: 32–38 (in Ukrainian).
3. *Chikrii A. A.* Conflict-controlled processes, Kiev: Naukova Dumka, 1992 (in Russian).
4. *Chikrii A. A., Eidel'man S. D.* Cybernetics and Systems Analysis, 2012, No 6: 66–99.
5. *Eidel'man S. D., Chikrii A. A.* Ukr. Math. J., 2000, **52**, No 11: 1566–1583.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"
Надійшло до редакції 29.12.2014

М. М. Копец

Оптимальное управление динамической системой второго порядка

НТУ Украины "Киевский политехнический институт"

Рассматривается проблема минимизации квадратичного функционала на решениях системы дифференциальных уравнений второго порядка. Для исследования сформулированной задачи оптимизации применен метод множителей Лагранжа. Такой подход дал возможность получить необходимые условия оптимальности. На основе этих условий выведена система дифференциальных уравнений Риккати. Решение полученной системы позволяет выписать явную формулу для оптимального уравнения.

Ключевые слова: квадратичный функционал, метод множителей Лагранжа, необходимые условия оптимальности, оптимальное управление, система дифференциальных уравнений Риккати.

M. M. Kopets

Optimal control over a second-order dynamical system

NTU of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute"

The problem of minimization of the quadratic functional on solutions of the system of differential equations of the second order is considered. The method of Lagrange multipliers is applied to research the formulated optimization problem. Such approach has given a chance to obtain necessary conditions of optimality. On the basis of these conditions, the system of differential Riccati equations is deduced. The solution of this system permits us to write the closed formula for optimal control.

Keywords: quadratic functional, method of Lagrange multipliers, necessary conditions of optimality, optimal control, system of differential Riccati equations.