УДК 517.977.14

В. И. Коробов, Т. В. Ревина

Решение задачи робастного позиционного синтеза для канонической системы

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Рассмотрены задачи глобального и локального робастного позиционного синтеза ограниченного управления системой с неизвестным ограниченным возмущением. Решение основано на методе функции управляемости В. И. Коробова. Найден наибольший отрезок изменения границ возмущения и построено управление, которое переводит произвольную начальную точку в начало координат за конечное время при любом возмущении, удовлетворяющем ограничениям. Получена оценка на время движения из произвольной начальной точки в начало координат.

Ключевые слова: метод функции управляемости, задача робастного синтеза, неизвестное ограниченное возмущение, позиционное ограниченное управление.

Рассмотрим задачу робастного позиционного синтеза ограниченного управления для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + p(t,x))x_2, \\ \dot{x}_i = (1 + r_{ii+1}p(t,x))x_{i+1}, \qquad i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \geqslant 0$, $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, Q — это некоторая окрестность начала координат, u — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leqslant 1$, r_{ii+1}, $i = 2, \ldots, n-1$, — некоторые заданные числа, $p(t,x)$ — *неизвестное* ограниченное возмущение, удовлетворяющее ограничению $d_1 \leqslant p(t,x) \leqslant d_2$, $d_1 < 0$, $d_2 > 0$. В работе [1] рассмотрена задача робастного позиционного синтеза при одном возмущении, т. е. в системе (1) $r_{ii+1} = 0$, $i = 2, \ldots, n-1$. В работе [2] рассмотрен случай симметричного отрезка, т. е. $d_1 = -d_2$. Перепишем систему (1) в матричном виде

$$\dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x + b_0 u,$$

где A_0 — матрица, у которой элементы верхней наддиагонали равны 1, а остальные элементы нулевые, b_0 — вектор, у которого последний элемент равен 1, а остальные элементы нулевые,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{23} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & r_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

© В. И. Коробов, Т. В. Ревина, 2015

Для пары чисел $d_1 < d_2$ через $\mathcal{P}_{d_1,d_2}$ обозначим класс функций $p(t,x)\colon [0;+\infty)\times Q \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $p(t,x)$ непрерывна по совокупности переменных;

2) в каждой области $K_1(\rho_2) = \{(t,x)\colon 0 \leqslant t < +\infty, \|x\| \leqslant \rho_2\}$, функция $p(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|p(t,x'') - p(t,x')| \leqslant \ell_1(\rho_2)\|x'' - x'\|,$$

где $\ell_1(\rho_2)$ зависит от функции p;

3) для всех $(t,x) \in [0;+\infty)\times Q$ функция $p(t,x)$ удовлетворяет ограничению $d_1 \leqslant p(t,x) \leqslant \leqslant d_2$.

Определение 1. Под (d_1,d_2)-*локальным робастным позиционным синтезом ограниченного управления* будем понимать нахождение такого управления $u = u(x)$, $x \in Q$, что:

1) в каждой области $K_2(\rho_1,\rho_2) = \{x\colon 0 < \rho_1 \leqslant \|x\| \leqslant \rho_2\}$ функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|u(x'') - u(x')| \leqslant \ell_2(\rho_1,\rho_2)\|x'' - x'\|;$$

2) $|u(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in Q$;

3) для всех $p(t,x) \in \mathcal{P}_{d_1,d_2}$ траектория $x(t)$ замкнутой системы

$$\dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x + b_0u(x), \tag{2}$$

выходящая из произвольной начальной точки $x_0 \in Q$, оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0,p)$, т. е. $\lim\limits_{t\to T(x_0,p)} x(t) = 0$. Если $Q = \mathbb{R}^n$, то синтез будем называть *глобальным*.

Наша цель — для заданных r_{ii+1}, $i = 2,\ldots,n-1$, получить границы наибольшего отрезка $[d_1;d_2]$ и построить управление, которое переводит произвольную начальную точку в начало координат за конечное время. Заметим, что при $d_1 \leqslant -1$ в системе (1) первая координата не управляема (при $p(t,x) \equiv -1$), т. е. не при всех d_1 и d_2 задача разрешима. Решение задачи основано на *методе функции управляемости* [3–5]. Изложим суть метода.

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = f(t,x,u), \tag{3}$$

где $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, Q — это некоторая окрестность начала координат, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, причем Ω таково, что $0 \in \operatorname{int}\Omega$, $f(t,0,0) = 0$. Под *локальным позиционным синтезом ограниченного управления* будем понимать нахождение такого управления $u = u(x) \in \Omega$, что траектория $x(t)$ замкнутой системы $\dot{x} = f(t,x,u(x))$, выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in Q$, оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0)$, т. е. $\lim\limits_{t\to T(x_0)} x(t) = 0$. При этом если $Q = \mathbb{R}^n$, то синтез называется *глобальным*.

Отметим трудности решения этой задачи. Поскольку через конечную точку проходит бесконечное число траекторий и время движения по каждой траектории в эту точку конечно, то в силу теоремы о единственности решения правая часть уравнения (3) с выбранным управлением не может удовлетворять условию Липшица в рассматриваемой окрестности.

Для решения задачи позиционного синтеза в 1979 г. В. И. Коробовым был предложен метод функции управляемости [3, 4], развитый в работах [6–8] и др. В работе [9] метод функции управляемости был обобщен на случай систем с возмущением. Задача робастного позиционного синтеза для конкретных систем в формулировке, близкой к изложенной, рассматривалась в [10, 11]. Приложение метода к задачам управления хаосом можно найти в работе [12]. Среди других работ, посвященных проблемам синтеза за конечное время, можно отметить [13, 14].

Опишем один из возможных подходов к решению задачи глобального позиционного синтеза для канонической системы [5, 6]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = x_3, \qquad \ldots, \qquad \dot{x}_{n-1} = x_n, \qquad \dot{x}_n = u, \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, u — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leqslant 1$. Заметим, что при $p(t, x) = 0$ система (1) полностью управляема и совпадает с системой (4). Пусть

$$F^{-1} = \int\limits_0^1 (1-t) e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt, \qquad D(\Theta) = \operatorname{diag}\big(\Theta^{-(2n-2i+1)/2}\big)_{i=1}^n.$$

Пусть f_{ij} — элементы матрицы F.

Теорема 1 [6]. *Пусть функция управляемости $\Theta = \Theta(x)$ — единственное положительное решение уравнения*

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x), \qquad x \neq 0, \qquad \Theta(0) = 0, \tag{5}$$

где постоянная a_0 выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \leqslant \frac{2}{f_{nn}}. \tag{6}$$

Тогда управление вида

$$u(x) = -\frac{1}{2} b_0^* D(\Theta(x)) F D(\Theta(x)) x \tag{7}$$

решает для системы (4) *задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению $|u| \leqslant 1$. При этом функция управляемости $\Theta(x_0)$ является временем движения из произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат.*

Результаты. Обозначим $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$,

$$H = \operatorname{diag}\left(-\frac{2n-2i+1}{2}\right)_{i=1}^n, \qquad F^1 = F - FH - HF = ((2n-i-j+2)f_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Заметим, что F^1 — положительно определенная матрица [5]. Обозначим

$$S(\Theta) = \Theta(FD(\Theta)RD^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta)R^*D(\Theta)F). \tag{8}$$

Справедливо тождество [5] $D(\Theta)RD^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1}R$, откуда следует, что матрица S не зависит от Θ и имеет вид

$$S(\Theta) = S_0 = FR + R^*F.$$

Выберем постоянную a_0, удовлетворяющую неравенству (6). Рассмотрим замкнутую систему (2), где $u(x)$ задается формулой (5), $\Theta(x)$ — единственное положительное решение уравнения (2). Обозначим через $x(t)$ траекторию системы (2) и найдем производную в силу системы $\dot{\Theta} = \dfrac{d}{dt}\Theta(x(t))$. Аналогично [2] имеем

$$\dot{\Theta} = \frac{(-F^1 + p(t,x)S_0)y(\Theta,x), y(\Theta,x))}{(F^1 y(\Theta,x), y(\Theta,x))}. \tag{9}$$

Пусть $\lambda_{\min}(Z)$ и $\lambda_{\max}(Z)$ обозначает наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы Z соответственно.

Теорема 2. *Обозначим* $\widetilde{d}_1^0 = 1/\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0)$, $\widetilde{d}_2^0 = 1/\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0)$. *Выберем* $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$. *Пусть*

$$d_1^0 = \max\{(1-\gamma_1)\widetilde{d}_1^0; (1-\gamma_2)\widetilde{d}_2^0\}, \qquad d_2^0 = \min\{(1-\gamma_1)\widetilde{d}_2^0; (1-\gamma_2)\widetilde{d}_1^0\}. \tag{10}$$

Тогда для всех d_1 и d_2 таких, что $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$ управление, задаваемое формулой (7), решает задачу (d_1, d_2)-глобального робастного позиционного синтеза. При этом траектория системы (2), выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, оканчивается в точке $x_1(T) = 0$ в некоторый конечный момент времени $T = T(x_0, d_1, d_2)$, для которого выполнена оценка

$$\frac{\Theta(x_0)}{\gamma_2} \leqslant T(x_0, d_1, d_2) \leqslant \frac{\Theta(x_0)}{\gamma_1}. \tag{11}$$

Рассмотрим более общую задачу. Пусть матрица R имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-11} & r_{n-12} & r_{n-13} & r_{n-14} & \dots & r_{n-1n-1} & r_{n-1n} \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & r_{n4} & \dots & r_{nn-1} & r_{nn} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тогда матрица $S(\Theta)$ (8) зависит от Θ. Пусть область Q задается равенством $Q = \{x\colon \Theta(x) \leqslant 1\}$. Пусть $\lambda(\Theta)$ — собственное значение матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$. При достаточно малых Θ выполнено $\lambda(\Theta) = \lambda(0) + \lambda'(0)\Theta + \overline{o}(\Theta)$. Для оценки $\lambda'(0)$ воспользуемся подходом, предложенным в [15, гл. 6.3]. Пусть $\lambda_{\min}$ — наименьшее собственное значение матрицы $(F^1)^{-1}S(0) = (F^1)^{-1}S_0$, а $x_{\min}$ и $y_{\min}$ — соответствующие $\lambda_{\min}$ правый и левый собственные векторы такие, что $y^*_{\min}x_{\min} = 1$. Тогда при достаточно малых Θ справедливо

$$\lambda(\Theta) \geqslant \lambda_1 = \begin{cases} \lambda_{\min}, \quad \text{если} \quad y^*_{\min}(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min} \geqslant 0, \\ \lambda_{\min} + y^*_{\min}(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min}, \quad \text{если} \quad y^*_{\min}(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min} < 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $(F^1)^{-1}S(0) = (F^1)^{-1}S_0$, а $x_{\max}$ и $y_{\max}$ — соответствующие $\lambda_{\max}$ правый и левый собственные векторы такие, что $y^*_{\max}x_{\max} = 1$. Тогда при достаточно малых Θ справедливо

$$\lambda(\Theta) \leqslant \lambda_2 = \begin{cases} \lambda_{\max} + y^*_{\max}(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max}, \quad \text{если} \quad y^*_{\max}(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max} \geqslant 0, \\ \lambda_{\max}, \quad \text{если} \quad y^*_{\max}(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max} < 0. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть матрица возмущений R имеет вид* (12). *Обозначим* $\widetilde{d}_1^0 = 1/\lambda_1$, $\widetilde{d}_2^0 = 1/\lambda_2$. *Выберем* $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$. *Пусть числа* d_1^0 *и* d_2^0 *задаются формулой* (10). *Тогда существует* $c \leqslant 1$ *такое, что в области* Q, *задаваемой равенством* $Q = \{x\colon \Theta(x) \leqslant c\}$, *для всех* d_1 *и* d_2 *таких, что* $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$ *управление, задаваемое формулой (7), решает задачу* (d_1, d_2)*-локального робастного позиционного синтеза. При этом траектория системы (2), выходящая из произвольной начальной точки* $x(0) = x_0 \in Q$, *оканчивается в точке* $x_1(T) = 0$ *в некоторый конечный момент времени* $T = T(x_0, d_1, d_2)$, *для которого выполнена оценка* (11).

Цитированная литература

1. *Korobov V. I., Revina T. V.* Robust feedback synthesis problem for systems with a single perturbation // Commun. Math. Anal. – 2014. – **17**, No 2. – P. 217–230.
2. *Ревина Т. В.* Несколько подходов к определению границ изменения возмущения в задаче глобального робастного синтеза // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. Математика, прикладна математика і механіка. – 2014. – **1133**, вып. 70. – С. 140–155.
3. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сб. – 1979. – **109(151)**, № 4(8). – С. 582–606.
4. *Коробов В. И.* Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости // Докл. АН СССР. – 1979. – **248**, № 5. – С. 1051–1055.
5. *Коробов В. И.* Метод функции управляемости. – Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. – 576 с.
6. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1914. – 1924.
7. *Rodoumta K., Bowong S.* Construction of bounded feedback by the controllability function method // Appl. Math. Sci. – 2007. – **1**, No 6. – P. 267–279.
8. *Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W.* Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique // Proc. of 9$^{\text{th}}$ IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems. – Toulouse, France: IFAC Publ., 2013. – P. 140–145.
9. *Коробов В. И.* Решение задачи синтеза для управляемых процессов с возмущениями с помощью функции управляемости // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 236–243.
10. *Коробов В. И., Гавриляко В. М.* Робастные системы. Синтез ограниченного управления // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. Математика, прикладна математика і механіка. – 2005. – **711**, вып. 55. – С. 23–27.
11. *Ревина Т. В.* Решение одной задачи синтеза управления для робастных систем на основе метода функции управляемости // Динамические системы. Межвед. науч. сб. – 2008. – Вып. **25**. – С. 83–93.
12. *Bowong S., Moukam Kakmeni F. M.* Chaos control and duration time of a class of uncertain chaotic systems // Phys. Lett. – 2003. – **A316**. – P. 206–217.
13. *Bhat S. P., Bernstein D. S.* Finite-time stability of continious autonomous systems // SIAM J. Control and Optimization. – 2000. – **38**, No 3. – P. 751–766.
14. *Ding S., Qian C., Li S.* Global finite-time stabilization of a class of upper-triangular systems // Proc. of the Amer. Control Conf., Baltimore, MD, USA, June 30 – July 2, 2010. – Baltimore, 2010. – P. 4223–4228.
15. *Хорн Р. А., Джонсон Ч. Р.* Матричный анализ. – Москва: Наука, 1989. – 656 с.

References

1. *Korobov V. I., Revina T. V.* Commun. Math. Anal., 2014, **17**, No 2: 217–230.
2. *Revina T. V.* Visn. Kharkiv. Univ., Ser. Mat., Prykl. Mat. i Mekh., 2014, **1113**, Iss. 70: 140–155 (in Russian).
3. *Korobov V. I.* Math. USSR Sb., 1980, **37** No 4: 535–557.
4. *Korobov V. I.* Sov. Math., Dokl., 1979, **20**: 1112–1116.
5. *Korobov V. I.* The controllability function method, Moscow, Izhevsk: R&C Dynamics, 2007 (in Russian).
6. *Korobov V. I., Sklyar G. M.* Differ. Equ., 1990, **26**, No 11: 1422–1431.

7. *Rodoumta K., Bowong S.* Appl. Math. Sci., 2007, **1**, No 6: 267–279.
8. *Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W.* Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique, Proc. of 9$^{\text{th}}$ IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems, Toulouse, France: IFAC Publ., 2013: 140–145.
9. *Korobov V. I.* Differ. Equ., 1987, **23**, No 2: 169–175.
10. *Korobov V. I., Gavrylyako V. M.* Visn. Kharkiv. Univ., Ser. Mat., Prykl. Mat. i Mekh., 2005, **711**, Iss. 55: 23–27 (in Russian).
11. *Revina T. V.* Dinamichiskie Sistemy, 2008, Iss. **25**: 83–93 (in Russian).
12. *Bowong S., Moukam Kakmeni F. M.* Phys. Lett., 2003, **A316**: 206–217.
13. *Bhat S. P., Bernstein D. S.* SIAM J. Control and Optimization, 2000, **38**, No 3: 751–766.
14. *Ding S., Qian C., Li S.* Global finite-time stabilization of a class of upper-triangular systems. Proc. of the Amer. Control Conf., Baltimore, MD, USA, June 30 – July 2, 2010: 4223–4228.
15. *Horn R. A., Johnson Ch. R.* Matrix analysis, Cambridge, 1985.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 05.01.2015

В. І. Коробов, Т. В. Ревіна

Розв'язок задачі робастного позиційного синтезу для канонічної системи

Харьківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

Розглянуто задачі глобального і локального робастного позиційного синтезу обмеженого керування системою з невідомим обмеженим збуренням. Розв'язок базується на методі функції керованості В. І. Коробова. Знайдено найширший відрізок зміни меж збурення та побудовано керування, яке переводить довільну початкову точку в початок координат за скінченний час для довільного збурення, яке задовольняє обмеження. Отримано оцінку на час руху з довільної початкової точки в початок координат.

Ключові слова: метод функції керованості, задача робастного синтезу, невідоме обмежене збурення, позиційне обмежене керування.

V. I. Korobov, T. V. Revina

The solution of the robust feedback synthesis problem for a canonical system

V. N. Karasin National University of Kharkov

The problems of the global and local robust feedback syntheses of a bounded control for a system with unknown bounded perturbation are considered. Our approach is based on the controllability function method suggested by V. I. Korobov. We have found the largest segment, where the perturbation can vary, and have given a positional control, which steers an arbitrary initial point to the origin in some finite time for any admissible perturbation from this segment. An estimate of the time of motion from an initial point to the origin has been given.

Keywords: controllability function method, robust feedback synthesis problem, unknown bounded perturbation, positional bounded control.