

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.11.028>

УДК 539.3

**Є.А. Сторожук, А.В. Яцура, С.М. Комарчук, О.В. Піголь**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: [stevan@ukr.net](mailto:stevan@ukr.net)

## **Точні розв'язки деяких задач статички для некругових циліндричних оболонок з врахуванням деформацій поперечного зсуву**

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком)*

*Дано постановку і отримано аналітичні (точні) розв'язки крайових задач для композитних нескінченно довгих циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу при дії статичних навантажень. Система розв'язувальних рівнянь записана на основі співвідношень уточненої теорії непологих оболонок з низькою зсувною жорсткістю. Наведено вирази для внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень замкненої і відкритої циліндричних оболонок овального поперечного перерізу, навантажених внутрішнім тиском і поперечною силою.*

**Ключові слова:** *довга циліндрична оболонка, некруговий поперечний переріз, точний розв'язок, композитний матеріал, деформації поперечного зсуву, статичне навантаження.*

Напружено-деформований стан (НДС) циліндричної оболонки некругового (еліптичного, овального, параболічного тощо) перерізу описується системою диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Тому розв'язання крайових задач для некругових оболонок пов'язане із значними математичними труднощами.

Історично першою працею з аналітичного розв'язання задачі про НДС циліндричної оболонки еліптичного перерізу була робота [1]. Проте цей розв'язок одновимірної задачі для довгої оболонки під дією внутрішнього тиску давав рівні за абсолютною величиною моменти й переміщення у вершинах поперечного перерізу. Коректні значення моментів, напевне, вперше були отримані Тимошенком у 1933 р. і опубліковані в монографії [2]. Моменти обчислювались за допомогою таблиці деяких коефіцієнтів для ряду значень співвідношень півосей еліпса.

В публікаціях з даної проблеми, які вийшли після зазначених вище робіт, за допомогою чисельних, аналітичних (наближених) і експериментальних методів досліджено НДС [3], стійкість [4, 5] і коливання [6, 7] овальних та еліптичних циліндричних оболонок при дії різного виду навантажень. І тільки в роботі [8] з використанням співвідношень теорії пологих оболонок (в спрощеній постановці) отримано точні аналітичні розв'язки крайових задач для відкритої некругової циліндричної оболонки.

© Є.А. Сторожук, А.В. Яцура, С.М. Комарчук, О.В. Піголь, 2016

Нижче дано загальну постановку задач статки для нескінченно довгої циліндричної оболонки некругового перерізу і отримано точні розв'язки деяких крайових задач для овальної непологої циліндричної оболонки.

**Постановка задачі й основні рівняння.** Розглянемо нескінченно довгу циліндричну оболонку некругового поперечного перерізу постійної товщини  $h$ , яка виготовлена з композитного ортотропного матеріалу і навантажена поверхневими  $q$  та погонними  $P$  силами, рівномірно розподіленими вздовж твірних (в напрямку осі циліндра). Геометрію серединної поверхні оболонки задамо в глобальній декартовій системі координат  $(X, Y, Z)$ , вісь  $OX$  якої напрямлена по осі циліндра. Площину поперечного перерізу оболонки віднесемо до системи координат  $(Y, Z)$ , а його рівняння запишемо в параметричній формі:

$$Y = Y(\varphi); Z = Z(\varphi); \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

де  $\varphi$  – кут між нормаллю до серединної поверхні і вертикальною віссю  $OZ$ .

Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат  $(s, \varphi, \zeta)$ , спряженої з лініями головних кривин оболонки. Тут  $s, \zeta$  – довжини твірної і нормалі до серединної поверхні. Прийmemo, що напрямки ортотропії матеріалу в кожній точці оболонки збігаються з напрямками осей координат  $(s, \varphi, \zeta)$ . Деформації і напруження в кожному поперечному перерізі оболонки будуть однаковими, а всі шукані величини будуть залежати тільки від кута  $\varphi$ .

Вихідними при дослідженні НДС даного класу оболонок є загальні рівняння уточненої теорії непологих оболонок, в якій враховуються деформації поперечного зсуву [3, 9]. В цьому випадку для геометричних співвідношень маємо вирази:

$$\varepsilon = \frac{du}{rd\varphi} + \frac{w}{r}; \gamma = \vartheta + \frac{d\vartheta}{rd\varphi} - \frac{1}{r}u; \varkappa = \frac{d\vartheta}{rd\varphi}. \quad (1)$$

Зв'язок зусиль і момента з компонентами деформації прийmemo на основі закону Гука:

$$N = D_N \varepsilon; D_N = \frac{E_{\varphi\varphi} h}{(1 - \nu_{s\varphi} \nu_{\varphi s})}; Q = D_Q \gamma; D_Q = k G_{\varphi\zeta} h; M = D_M \varkappa; D_M = \frac{E_{\varphi\varphi} h^3}{12(1 - \nu_{s\varphi} \nu_{\varphi s})}. \quad (2)$$

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\frac{dN}{rd\varphi} + \frac{1}{r}Q = 0; \frac{dQ}{rd\varphi} - \frac{1}{r}N + q = 0; \frac{dM}{rd\varphi} - Q = 0, \quad (3)$$

де  $N, Q, M$  – внутрішні зусилля і момент;  $r$  – радіус кривини поперечного перерізу;  $\varepsilon, \gamma, \varkappa$  – мембранна, поперечна зсувна і згинна деформації;  $u, w$  – тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні оболонки;  $\vartheta$  – кут повороту нормалі;  $E_{\varphi\varphi}$  – модуль пружності матеріалу оболонки в напрямку  $\varphi$ ;  $\nu_{s\varphi}, \nu_{\varphi s}$  – коефіцієнти Пуассона;  $G_{\varphi\zeta}$  – модуль зсуву в площині поперечного перерізу;  $k$  – коефіцієнт, який залежить від характеру розподілу зсуву по товщині та способу визначення середнього значення зсуву.

При розв'язанні конкретних задач до рівнянь рівноваги (3) і геометричних та фізичних співвідношень (1) і (2) потрібно приєднати відповідні граничні умови.

**Замкнена довга циліндрична оболонка овального поперечного перерізу при дії комбінованого навантаження.** Перейдемо до побудови точного розв'язку крайової задачі для замкненої по напрямній  $(-\pi \leq \varphi \leq \pi)$  нескінченно довгої некругової циліндричної оболонки (тобто труби), яка навантажена рівномірним внутрішнім тиском  $q$  і парою діаметрально

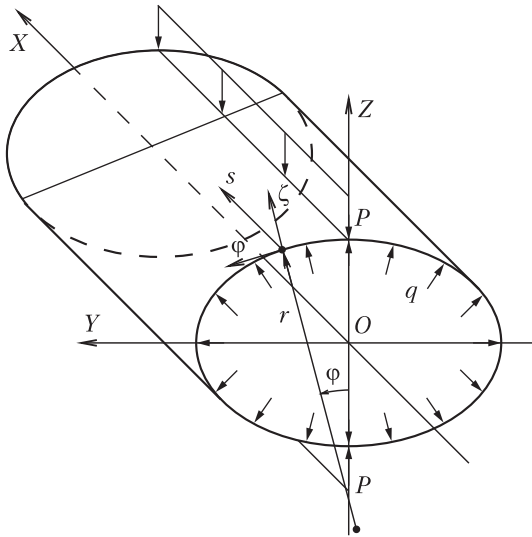


Рис. 1

Тут  $a, b$  — велика і мала півосі поперечного перерізу.

Для радіуса кривини овала з використанням рівнянь (4) отримаємо таку формулу:

$$r = r_0 (1 + \xi \cos 2\varphi). \quad (5)$$

Враховуючи геометричну і силову симетрію, за розрахункову схему приймемо четверту частину оболонки  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  і задамо такі граничні умови:  $u = \vartheta = 0$  і  $Q = P/2$  на краю  $\varphi = 0$  та  $u = \vartheta = Q = 0$  на краю  $\varphi = \pi/2$ .

З перших двох рівнянь рівноваги (3) дістанемо наступне рівняння для знаходження поперечного зусилля:

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + Q = 2r_0 q \xi \sin 2\varphi. \quad (6)$$

Характеристичне рівняння  $k^2 + 1 = 0$  відповідного однорідного рівняння має корені  $k_{1,2} = \pm i$ , тому загальним розв'язком однорідного рівняння буде функція  $Q^* = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$ . Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6) знайдемо методом невизначених коефіцієнтів:  $Q^{**} = A_1 \sin 2\varphi + B_1 \cos 2\varphi$ , де  $A_1 = -2qr_0\xi/3$ ,  $B_1 = 0$ . З крайових умов  $Q(0) = P/2$  і  $Q(\pi/2) = 0$  визначимо сталі інтегрування  $C_1 = P/2$  і  $C_2 = 0$ . Розв'язок рівняння (6), який задовольняє заданим крайовим умовам, має вигляд

$$Q = \frac{P}{2} \cos \varphi - \frac{2qr_0\xi}{3} \sin 2\varphi. \quad (7)$$

З другого рівняння рівноваги знаходимо тангенціальне зусилля

$$N = rq + \frac{dQ}{d\varphi} = r_0 q - \frac{P}{2} \sin \varphi - \frac{1}{3} r_0 q \xi \cos 2\varphi. \quad (8)$$

За допомогою інтегрування з третього рівняння рівноваги одержимо вираз для моменту

$$M = \int r Q d\varphi + C_3. \quad (9)$$

Використовуючи співвідношення для згинної деформації (1) та закон Гука для моменту (2), отримаємо формулу для знаходження кута повороту

$$\vartheta = \frac{1}{D_M} \int r M d\varphi + C_4. \quad (10)$$

протилежних рівномірно розподілених уздовж твірних поперечних зусиль  $P$ , прикладених у вершинах поперечного перерізу (рис. 1).

Прийmemo, що поперечний переріз оболонки має форму овала з двома взаємно перпендикулярними осями симетрії і задається параметричними рівняннями вигляду:

$$\begin{aligned} Y &= r_0 \left[ \left( 1 + \frac{\xi}{2} \right) \sin \varphi + \frac{\xi}{6} \sin 3\varphi \right]; \\ Z &= r_0 \left[ \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) \cos \varphi + \frac{\xi}{6} \cos 3\varphi \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$r_0 = \frac{a+b}{2}; \quad \xi = 3 \frac{a-b}{a+b}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Після виконання інтегрування у формулах (9), (10) та визначення з крайових умов  $\vartheta(0) = 0$  і  $\vartheta(\pi/2) = 0$  сталих інтегрування  $C_4 = Pr_0^2\delta/2D_M$  і  $C_3 = -qr_0^2\xi^2/6 - Pr_0\delta/\pi$  дістанемо остаточні вирази для моменту і кута повороту нормалі:

$$M = \frac{Pr_0}{2} \left[ -\frac{2\delta}{\pi} + \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) \sin \varphi + \frac{\xi}{6} \sin 3\varphi \right] + \frac{qr_0^2\xi}{3} \left( -\frac{\xi}{2} + \cos 2\varphi + \frac{\xi}{4} \cos 4\varphi \right);$$

$$\vartheta = -\frac{Pr_0^2}{2D_M} \left[ -\delta + \frac{2\delta}{\pi} \varphi + \left(1 - \frac{\xi^2}{6}\right) \cos \varphi + \frac{\xi\delta}{\pi} \sin 2\varphi + \left(\frac{2\xi}{9} + \frac{\xi^2}{12}\right) \cos 3\varphi + \frac{\xi}{60} \cos 5\varphi \right] +$$

$$+ \frac{qr_0^3\xi}{6D_M} \left[ \left(1 - \frac{3\xi^2}{8}\right) \sin 2\varphi + \frac{3\xi}{8} \sin 4\varphi + \frac{\xi^2}{24} \sin 6\varphi \right], \quad (11)$$

де  $\delta = 1 + 2\xi/9 - \xi^2/15$ .

Вихідним для знаходження тангенціального переміщення є лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{D_N} \frac{d(rN)}{d\varphi} - \frac{rQ}{Dq} + r\vartheta. \quad (12)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд  $u^* = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi$ . Частинний розв'язок  $u^{**}$  неоднорідного рівняння знайдемо методом невизначених коефіцієнтів і отримаємо такий вираз для загального розв'язку рівняння (12):

$$u = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi + A_0 + B_0\varphi + A_{11}\varphi \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi + (B_2 + B_{21}\varphi) \cos 2\varphi +$$

$$+ B_3 \cos 3\varphi + A_4 \sin 4\varphi + B_5 \cos 5\varphi + A_6 \sin 6\varphi + B_7 \cos 7\varphi + A_8 \sin 8\varphi. \quad (13)$$

Тут позначено:

$$A_0 = \frac{Pr_0^3\delta}{2D_M}; \quad A_2 = \frac{4qr_0^3\xi}{9D_N} - \frac{r_0^3\xi}{18D_M} \left[ qr_0 \left(1 - \frac{3\xi^2}{16}\right) + \frac{5P\delta}{\pi} \right] - \frac{2qr_0^2\xi}{9D_Q};$$

$$A_4 = -\frac{2qr_0^2\xi^2}{45D_N} - \frac{r_0^3\xi^2}{60D_M} \left[ -\frac{qr_0}{3} \left(\frac{7}{4} - \frac{\xi^2}{3}\right) + \frac{P\delta}{\pi} \right] - \frac{qr_0^2\xi^2}{45D_Q}; \quad A_6 = -\frac{11qr_0^4\xi^3}{10080D_M};$$

$$A_8 = -\frac{qr_0^4\xi^4}{18144D_M}; \quad A_{11} = \frac{Pr_0}{4D_N} \left(\frac{\xi}{2} - 1\right) - \frac{Pr_0^3}{4D_M} \left(1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{18} - \frac{\xi^3}{24}\right) - \frac{Pr_0}{4D_Q} \left(1 + \frac{\xi}{2}\right);$$

$$B_0 = -\frac{Pr_0^3\delta}{\pi D_M}; \quad B_2 = -\frac{Pr_0^3\xi\delta}{6D_M}; \quad B_3 = \frac{3Pr_0\xi}{32D_N} - \frac{Pr_0^3\xi}{32D_M} \left(\frac{13}{9} - \frac{\xi}{6} - \frac{3\xi^2}{20}\right) + \frac{Pr_0\xi}{32D_Q};$$

$$B_5 = \frac{Pr_0^3\xi^2}{576D_M} \left(\frac{23}{15} + \frac{\xi}{2}\right); \quad B_7 = \frac{Pr_0^3\xi^3}{11520D_M}; \quad B_{21} = \frac{Pr_0^3\xi\delta}{3\pi D_M}.$$

Сталі інтегрування  $C_5$  і  $C_6$  визначимо з крайових умов  $u(0) = 0$  і  $u(\pi/2) = 0$ :

$$C_5 = -A_0 - B_2 - B_3 - B_5 - B_7; \quad C_6 = B_2 - A_0 + \pi(B_{21} - B_0 - A_{11})/2. \quad (14)$$

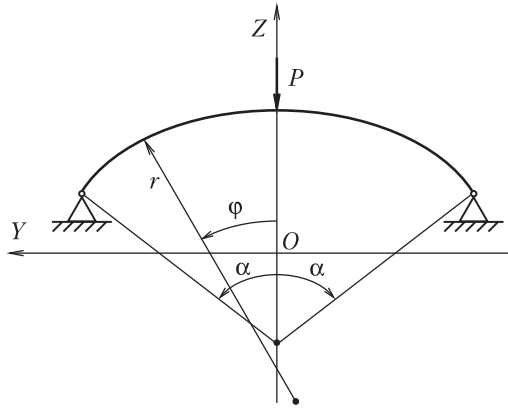


Рис. 2

Тепер за допомогою співвідношення  $w = rN/D_N - u'_{\varphi}$  можна записати розгорнутий вираз для прогину

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{r_0^2 q}{D_N} \left( 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{2\xi}{3} \cos 2\varphi - \frac{\xi^2}{6} \cos 4\varphi \right) - \frac{r_0 P}{2D_N} \left[ \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) \sin \varphi + \frac{\xi}{2} \sin 3\varphi \right] - \\
 & - B_0 + (C_5 - A_{11}) \sin \varphi - (C_6 + A_{11}\varphi) \cos \varphi - (2A_2 + B_{21}) \cos 2\varphi + \\
 & + 2(B_2 + B_{21}\varphi) \sin 2\varphi + 3B_3 \sin 3\varphi - 4A_4 \cos 4\varphi + 5B_5 \sin 5\varphi - \\
 & - 6A_6 \cos 6\varphi + 7B_7 \sin 7\varphi - 8A_8 \cos 8\varphi
 \end{aligned} \tag{15}$$

**Відкрита довга циліндрична оболонка овального перерізу з шарнірно закріпленими поздовжніми краями.** Розглянемо відкриту по напрямній  $(-\alpha \leq \varphi \leq \alpha)$  нескінченно довгу циліндричну оболонку овального поперечного перерізу (4), поздовжні краї  $(\varphi = \pm\alpha)$  якої шарнірно оперті на нерухомі опори. Оболонка навантажена рівномірно розподіленою вздовж твірної поперечною силою  $P$ , що прикладена у вершині (рис. 2).

Для поперечного перерізу і навантаження має місце симетрія відносно вертикальної площини  $XOZ$ . Тому розрахунки будемо виконувати для половини оболонки  $(0 \leq \varphi \leq \alpha)$ . На краю  $\varphi = \alpha$  задамо умови шарнірно нерухомого опираювання  $(u = w = M = 0)$ , а на краю  $\varphi = 0$  – такі граничні умови:  $u = \vartheta = 0$  і  $Q = P/2$ .

Знаходження поперечного зусилля зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + Q = 0. \tag{16}$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Q = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi. \tag{17}$$

Для тангенціального зусилля з другого рівняння рівноваги маємо вираз

$$N = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi. \tag{18}$$

З граничної умови  $Q(0) = P/2$  визначимо сталу інтегрування  $C_1 = P/2$  і представимо внутрішні зусилля у вигляді:

$$Q = \frac{P}{2} \cos \varphi + C_2 \sin \varphi; \quad N = -\frac{P}{2} \sin \varphi + C_2 \cos \varphi, \tag{19}$$

де  $C_2$  – невідома стала інтегрування.

Використовуючи формули (9) і (10) та задовольняючи крайові умови  $M(\alpha) = 0$  і  $\vartheta(0) = 0$ , одержимо такі вирази для моменту і кута повороту нормалі:

$$M = \frac{Pr_0}{2} \left[ \delta_1 + \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) \sin \varphi + \frac{\xi}{6} \sin 3\varphi \right] + C_2 r_0 \left[ \delta_2 + \left(\frac{\xi}{2} - 1\right) \cos \varphi - \frac{\xi}{6} \cos 3\varphi \right];$$

$$\vartheta = \frac{Pr_0^2}{2D_M} \left[ \delta + \delta_1 \varphi - \left(1 - \frac{\xi^2}{6}\right) \cos \varphi + \frac{\xi \delta_1}{2} \sin 2\varphi - \left(\frac{2\xi}{9} + \frac{\xi^2}{12}\right) \cos 3\varphi - \frac{\xi^2}{60} \cos 5\varphi \right] +$$

$$+ \frac{C_2 r_0^2}{D_M} \left[ \delta_2 \varphi + \left(\frac{\xi^2}{6} - 1\right) \sin \varphi + \frac{\xi \delta_2}{2} \sin 2\varphi + \left(\frac{\xi^2}{12} - \frac{2\xi}{9}\right) \sin 3\varphi - \frac{\xi^2}{60} \sin 5\varphi \right]. \quad (20)$$

Тут  $\delta_1 = -(1 + \xi/2) \sin \alpha - \xi \sin 3\alpha/6$ ;  $\delta_2 = (1 - \xi/2) \cos \alpha + \xi \cos 3\alpha/6$ .

Значення тангенціального переміщення отримаємо, розв'язавши рівняння вигляду (12). Загальний розв'язок рівняння (12) для даної задачі має вигляд:

$$u = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi + u^{**};$$

$$u^{**} = A_0 + B_0 \varphi + A_{11} \varphi \sin \varphi + B_{11} \varphi \cos \varphi + A_2 \sin 2\varphi + (B_2 + B_{21} \varphi) \cos 2\varphi +$$

$$+ A_3 \sin 3\varphi + B_3 \cos 3\varphi + A_4 \sin 4\varphi + A_5 \sin 5\varphi + B_5 \cos 5\varphi + A_7 \sin 7\varphi + B_7 \cos 7\varphi, \quad (21)$$

де

$$A_0 = \frac{P\delta r_0^3}{2D_M}; A_{11} = \frac{Pr_0}{4D_N} \left(\frac{\xi}{2} - 1\right) - \frac{Pr_0^3}{4D_M} \left(1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{18} - \frac{\xi^3}{24}\right) - \frac{Pr_0}{4D_Q} \left(1 + \frac{\xi}{2}\right);$$

$$A_2 = \frac{5P\delta_1 r_0^3 \xi}{36D_N} + \frac{5C_2 \delta_2 r_0^3 \xi}{18D_M}; A_3 = \frac{3C_2 r_0 \xi}{16D_N} + \frac{C_2 r_0^3 \xi}{16D_M} \left(\frac{13}{9} - \frac{\xi}{6} - \frac{3\xi^2}{20}\right) + \frac{C_2 r_0 \xi}{16D_Q};$$

$$A_4 = -\frac{Pr_0^3 \delta_1 \xi^2}{120D_M} - \frac{C_2 r_0^3 \delta_2 \xi^2}{60D_M}; A_5 = \frac{C_2 r_0^3 \xi^2}{288D_M} \left(\frac{23}{15} - \frac{\xi}{2}\right); A_7 = \frac{C_2 r_0^3 \xi^3}{5760D_M};$$

$$B_0 = \frac{P\delta_1 r_0^3}{2D_M} + \frac{C_2 \delta_2 r_0^3}{D_M}; B_3 = \frac{3Pr_0 \xi}{32D_N} + \frac{Pr_0^3 \xi}{32D_M} \left(\frac{13}{9} + \frac{\xi}{6} - \frac{3\xi^2}{20}\right) + \frac{Pr_0 \xi}{32D_Q}; \quad (22)$$

$$B_2 = -\frac{P\delta r_0^3 \xi}{6D_M}; B_{11} = \frac{C_2 r_0}{2D_N} \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) + \frac{C_2 r_0^3}{2D_M} \left(1 - \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{18} + \frac{\xi^3}{24}\right) + \frac{C_2 r_0}{2D_Q} \left(1 - \frac{\xi}{2}\right);$$

$$B_5 = \frac{Pr_0^3 \xi^2}{576D_M} \left(\frac{23}{15} + \frac{\xi}{2}\right); B_7 = \frac{Pr_0^3 \xi^3}{11520D_M}; B_{21} = -\frac{P\delta_1 r_0^3 \xi}{6D_M} - \frac{C_2 \delta_2 r_0^3 \xi}{3D_M}.$$

Прогин оболонки визначається за формулами

$$w = C_5 \sin \varphi - C_6 \cos \varphi + w^{**};$$

$$w^{**} = rN/D_N - B_0 - (A_{11} - B_{11} \varphi) \sin \varphi - (B_{11} + A_{11} \varphi) \cos \varphi -$$

$$- (2A_2 + B_{21}) \cos 2\varphi + 2(B_2 + B_{21} \varphi) \sin 2\varphi - 3A_3 \cos 3\varphi + 3B_3 \sin 3\varphi -$$

$$- 4A_4 \cos 4\varphi - 5A_5 \cos 5\varphi + 5B_5 \sin 5\varphi - 7A_7 \cos 7\varphi + 7B_7 \sin 7\varphi. \quad (23)$$

З граничних умов  $u(\alpha) = 0$  і  $w(\alpha) = 0$  знаходимо сталі інтегрування  $C_5$  і  $C_6$ :

$$C_5 = -u^{**}(\alpha) \cos \alpha - w^{**}(\alpha) \sin \alpha; C_6 = w^{**}(\alpha) \cos \alpha - u^{**}(\alpha) \sin \alpha. \quad (24)$$

Зауважимо, що у виразах для внутрішніх зусиль  $N$ ,  $Q$  (19), коефіцієнтів  $A_i$ ,  $B_j$  (22) і сталих інтегрування  $C_5$ ,  $C_6$  (24) частина доданків містить поперечну силу  $P$ , а решта доданків — невідому сталу  $C_2$ , тому їх можна подати у такому вигляді:

$$N = N^p P + N^c C_2 (N \rightarrow Q); A_i = A_i^p P + A_i^c C_2 (A_i \rightarrow B_j); C_5 = C_5^p P + C_5^c C_2 (C_5 \rightarrow C_6). \quad (25)$$

Тут коефіцієнти  $N^p$ ,  $N^c$ ,  $Q^p$ ,  $Q^c$  і  $A_i^p$ ,  $A_i^c$ ,  $B_j^p$ ,  $B_j^c$  визначаються безпосередньо з формул (19) і (22), а для коефіцієнтів  $C_5^p$ ,  $C_5^c$ ,  $C_6^p$ ,  $C_6^c$  маємо

$$\begin{aligned} C_5^p &= -u^{**} (A_i^p, B_j^p, \alpha) \cos \alpha - w^{**} (N^p, A_i^p, B_j^p, \alpha) \sin \alpha \quad (p \rightarrow c); \\ C_6^p &= -u^{**} (A_i^p, B_j^p, \alpha) \sin \alpha + w^{**} (N^p, A_i^p, B_j^p, \alpha) \cos \alpha \quad (p \rightarrow c). \end{aligned} \quad (26)$$

Нарешті можна визначити сталу інтегрування  $C_2$ , використавши з цією метою крайову умову для тангенціального переміщення в точці  $\varphi = 0$ :

$$u(0) = C_5 + A_0 + B_2 + B_3 + B_5 + B_7 = 0. \quad (27)$$

Підставивши у рівність (27) вирази для  $C_5$ ,  $A_0$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_5$ ,  $B_7$  (25), знаходимо сталу інтегрування  $C_2$ :

$$C_2 = -\frac{P(C_5^p + A_0^p + B_2^p + B_3^p + B_5^p + B_7^p)}{C_5^c}. \quad (28)$$

Після цього за допомогою формул (19) — (24) обчислюємо внутрішні зусилля, момент, кут повороту нормалі, тангенціальне переміщення і прогин оболонки.

Таким чином, отримані аналітичні розв'язки дозволяють обчислити точні значення внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень довгої овальної циліндричної оболонки, оцінити її міцність і жорсткість при дії статичних навантажень, а також можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Bresse J. A. C. H. Cours de Mecanique Appliquee. Premiere Partie. Resistance des materiaux et stabilitedes constructions. — Paris: Gauthier-Villars, 1866. — 536 p.
2. Timoshenko S. Strength of Materials. Part II, Advanced Theory and Problems. — New York: D. Van Nostrand Company, 1941. — 510 p.
3. Григоренко Я.М., Будає В.Д., Григоренко О.Я. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретноконтинуальних методів: навчальний посібник. — Миколаїв: Іліон, 2010. — 294 с.
4. Железнов Л. П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении // Прикл. механика и техн. физика. — 2002. — 43, № 4. — С. 155–160.
5. Коноплев Ю.Г., Саченков А.А. Теоретико-экспериментальный метод в задаче устойчивости цилиндрической оболочки эллиптического сечения // Исследования по теории пластин и оболочек: тр. семинара КФТИ КФ АН СССР. — Казань: Изд-во КГУ, 1984. — Вып. 17, ч. 1. — С. 135–142.
6. Мейш В.Ф., Кепенач Н.П. Нестационарная динамика продольно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения // Прикл. механика. — 2014. — 50, № 6. — С. 83–89.
7. Yamada G., Irie T., Tagawa Y. Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile // J. Sound and Vibr. — 1984. — 95, №1. — P. 117–126.
8. Григоренко Я.М., Харитоновна Л.В. Деформирование гибких некруговых цилиндрических оболочек при совместном действии двух видов нагружения // Прикл. механика. — 2007. — 43, № 7. — С. 58–65.
9. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, В.Н. Чехов и др. — Киев: Наук. думка, 1980. — 636 с. (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т.1).

## REFERENCES

1. *Bresse J. A. C. H.* Cours de Mecanique Appliquee. Premiere Partie. Resistance des materiaux et stabilite des constructions. — Paris: Gauthier-Villars, 1866.
2. *Timoshenko S.* Strength of Materials. Part II, Advanced Theory and Problems. New York: D. Van Nostrand Company, 1941.
3. *Grigorenko Ya.M., Budak V.D., Grigorenko O.Ya.* Solving the problems of shell theory based on discrete continual methods: a tutorial. Mykolayiv: Ilion Publ., 2010. (In Ukrainian).
4. *Zheleznov L.P., Kabanov V.V.* J. Appl. Mech. and techn. physics. 2002, **43**, № 4: 155–160 (In Russian)
5. *Konoplyev Yu.G., Sachenkov A.A.* Theoretical and experimental method in the problem of stability of a cylindrical shell elliptical cross-section. Studies in the theory of plates and shells: proceedings of the Workshop KPhTI of Kazan Branch of the USSR Academy of Sciences. Kazan: Publishing House of KSU, 1984. Iss. 17, part 1: 135–142 (In Russian)
6. *Meish V.F., Kepenach N.P.* Int. Appl. Mech. 2014, **50**, № 6: 83–89 (In Russian)
7. *Yamada G., Irie T., Tagawa Y.* J. Sound and Vibr. 1984, **95**, №1: 117–126.
8. *Grigorenko Ya.M., Kharitonova L.V.* Int. Appl. Mech. 2007, **43**, № 7: 58–65 (In Russian)
9. *Theory of thin shells weakened by holes.* A.N. Guz, I.S. Chernyshenko, V.N. Chekhov et al. Kiev: Nauk. Dumka, 1980 (Calculation methods shells: In 5 v.; V.1) (in Russian)

Надійшло до редакції 14.03.2016

*Е.А. Сторожук, А.В. Яцура, С.Н. Комарчук, О.В. Пиголь*

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

*E-mail:* stevan@ukr.net

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ДЛЯ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

*Дана постановка и получены аналитические (точные) решения краевых задач для композитных бесконечно длинных цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения при действии статических нагрузок. Система разрешающих уравнений записана на основе соотношений уточненной теории непологих оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. Приведены выражения для внутренних силовых факторов и обобщенных перемещений замкнутой и открытой цилиндрических оболочек овального поперечного сечения, нагруженных внутренним давлением и поперечной силой.*

**Ключевые слова:** *длинная цилиндрическая оболочка, некруговое поперечное сечение, точное решение, композитный материал, деформации поперечного сдвига, статическая нагрузка.*

*Е.А. Storozhuk, A.V.Yatsura, S.M. Komarchuk, O.V. Pigol*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*E-mail:* stevan@ukr.net

## EXACT SOLUTIONS TO SOME PROBLEMS OF THE STATICS OF NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS CONSIDERING TRANSVERSE SHEAR STRAINS

*The statements and the analytic (exact) solutions of boundary-value problems are given for composite infinitely long non-circular cylindrical shells stressed by static loads. The system of solving equations is based on the formulas of the refined theory of non-shallow shells with low sliding stiffness. The expressions for the internal power factors and generalized displacements of closed and open cylindrical shells of oval cross-section loaded by an internal pressure and a transverse force are presented.*

**Keywords:** *long cylindrical shell, non-circular cross-section, exact solution, composite material, deformation of transverse shear, static load.*