

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.11.044>

УДК 538.931+538.935

Академік НАН України **А.Г. Загородній, Л.М. Христофоров**

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ

E-mail: [lechrist@bitp.kiev.ua](mailto:lechrist@bitp.kiev.ua)

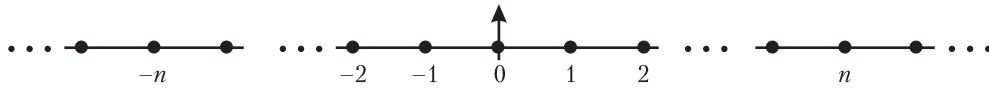
## **Теорема Пойа і міграція та захоплення квантової частинки**

*Внаслідок теореми Пойа квантовий вихід захоплення частинки, що випадково блукає вузлами низьковимірної ґратки, пасткою на одному з її вузлів є стопроцентним за будь-якої інтенсивності захоплення. Проте у випадку квантової міграції він практично завжди є меншим і, всупереч інтуїції, лише погіршується до нуля зі збільшенням інтенсивності захоплення.*

**Ключові слова:** теорема Пойа, низьковимірні ґратки, транспорт частинок, міграція та захоплення, квантовий вихід.

**1.** Абстрактні моделі міграції (квазі)частинок у низьковимірних структурах є основою розуміння та опису найрізноманітніших процесів у фізико-хімічних, біологічних та кібернетичних системах і традиційно мають досить універсальну прикладну цінність. Додатковий аспект тут виникає, коли об'єкт, що мігрує, має квантові властивості, або більше, розглядається як кубіт. Цей останній випадок привертає зараз велику увагу з огляду на перспективи квантового комп'ютингу тощо, хоча належна практична реалізація кубітів наразі перебуває в самому зародку. Що ж до існуючих теоретичних моделей так званих квантових випадкових блукань, тобто руху кубітів у низьковимірних системах, то зазвичай у них проводиться порівняння з добре відомими результатами відповідних класичних моделей. Природно, вже у найпростіших випадках (типу поширення в необмеженому регулярному ланцюжку) виявляються істотні відмінності, які в принципі можуть значно прискорити обчислення певного типу задач тощо (див., наприклад, [1–3]).

Проте цікаві відмінності квантової міграції виникають вже у розгляді руху стандартної частинки, яка, на відміну від кубіту, не має “кіральності”, тобто додаткового внутрішнього ступеня вільності. Вважається, що ця тематика є добре вивченою, особливо в зв'язку з численними задачами теорії твердого тіла (міграція та захоплення електронів, екситонів та інших (квазі)частинок тощо). Загалом так воно і є, однак ще й досі можна зустрітися з “несподіваним” проявом квантових властивостей навіть у базових моделях. Одному з таких результатів й присвячена ця робота; особливості йому додає ще й цікава паралель з відомою теоремою Пойа [4, 5] про повернення в разі класичного випадкового блукання. Тому



**Рис. 1.** Частинка починає блукати по нескінченному ланцюжку з нульового вузла випадковими стрибками на один із двох сусідніх вузлів з однаковою ймовірністю  $\frac{1}{2}$

ми спочатку аналізуємо потрібний нам аспект класичної задачі про міграцію й захоплення частинки пасткою, а потім розглядаємо її квантовий аналог, що приводить до принципово відмінного й дещо несподіваного результату.

**2. Класична модель випадкового блукання в одновимірному ланцюжку.** Навряд чи існує простіша модель випадкового блукання, ніж та, що зображена на рис. 1. Вона, зокрема, є основою опису класичної дифузії, в яку процес повністю перетворюється у континуальній границі (як у часі, так і у просторі). З усіх відомих для цієї моделі результатів ми нагадаємо тут один, порівняно менш популярний, але важливий в контексті цієї роботи. А саме, це відповідь на питання, свого часу поставлене Пойа [4]: чи завжди частинка повертається в початковий вузол? Якщо ні, тоді яка ймовірність неповернення для такого ланцюжка (або ґратки в разі вищої розмірності моделі)?

Відповідь можна знайти в багатьох джерелах, і вона виявилася не зовсім очевидною — в усякому разі, потребувала деяких зусиль, як можна побачити, наприклад, у статті Монтролла [5], де був застосований комбінаторний підхід. В підсумку результат було зведено до розбіжності певного інтегралу. Останній в одновимірному випадку (що нас тут і цікавить) має в позначеннях роботи [5] вигляд

$$U_1(1) = \sum_{t=0}^{\infty} P_t(n=0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - \cos\varphi}, \quad (1)$$

де  $P_t(n=0)$  — ймовірність перебування частинки в нульовому вузлі після  $t$  стрибків. Розбіжність інтегралу (1), що є очевидною, означає, що не існує ймовірності неповернення (“відходу у нескінченність”), і частинка завжди повертається в початковий вузол, до того ж безліч разів. Цей висновок зберігається й для двовимірної ґратки, і тільки починаючи з трьох вимірів з’являється ненульова ймовірність загубитися у нескінченності (наприклад, для простої кубічної ґратки вона дорівнює приблизно 0,66 [5]).

Якщо кількості стрибків  $t$  надати змісту неперервного часу, модель рис. 1 описується балансним рівнянням

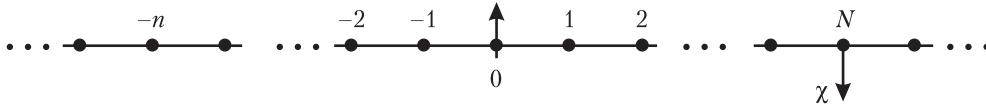
$$d\rho_{nm} / dt = \kappa(\rho_{n-1,n-1} - 2\rho_{nm} + \rho_{n+1,n+1}), \quad (2)$$

де  $\kappa$  — “константа швидкості” стрибка в сусідній вузол, а  $\rho_{nm}(t)$ , які тепер відіграють роль  $P_t(n)$ , є діагональними елементами відповідної матриці густини  $\rho = \sum_{nm} \rho_{nm} |n\rangle\langle m|$ . Використання квантових позначень тут, звісно, не є необхідним (оскільки в чисто дифузійному процесі недиагональні елементи відсутні тощо) і зумовлено лише подальшим розглядом у п. 3.

Заміни змінної  $\tau = 2\kappa t$  та функції  $\rho_{nm}(\tau) = \exp(-\tau)\phi_n(\tau)$  перетворюють рівняння (2) на канонічне співвідношення  $2d\phi_n / d\tau = \phi_{n-1}(\tau) + \phi_{n+1}(\tau)$  для модифікованих функцій Бесселя [6], тобто розв’язком (2) за умови  $\rho_{nm}(0) = \delta_{n0}$  є

$$\rho_{nn}^{(0)}(t) = \exp(-2\kappa t) I_{|n|}(2\kappa t), \quad (3)$$

де верхній індекс позначає початкову умову.



**Рис. 2.** Опинившись на вузлі  $N$ , частинка має ймовірність бути необернено захопленою у пастку тощо. Інтенсивність  $\chi$  цього захоплення — тієї самої природи, що й “коефіцієнт дифузії”  $\kappa$

Звернемо тут увагу на те, що асимптотика  $I_{|n|}(\tau)$  для великих  $\tau$  є такою [6]:

$$I_n(\tau) = \frac{e^\tau}{\sqrt{2\pi\tau}} \left( 1 - \frac{4n^2 - 1}{8\tau} + \dots \right), \quad (4)$$

тому відповідні інтеграли

$$\int_0^\infty \rho_{nn}(t) dt$$

вочевидь розбігаються (як воно і має бути для виконання теореми Пойа про неодмінне повернення частинки), до того ж головні члени цих розбіжностей не залежать від номера вузла  $n$ .

Введемо тепер в схему рис.1 витік на деякому вузлі  $N$  (див. рис. 2). Яким буде “квантовий вихід”  $W_N^{(0)}$  у таку пастку?<sup>1</sup> За визначенням,

$$W_N^{(0)} = \chi \int_0^\infty \rho_{NN}^{(0)}(t) dt,$$

але тепер  $\rho$  задовольняє рівнянню еволюції

$$d\rho / dt = \hat{\mathcal{L}}\rho - \chi \rho_{NN} |N\rangle\langle N|, \quad (5)$$

де  $\hat{\mathcal{L}}$  — оператор Ліувілля “нульової” задачі, якій відповідає схема рис. 1; її розв’язок ми далі відрізнатимемо нижнім індексом 0, тобто  $d\rho_0 / dt = \hat{\mathcal{L}}\rho_0$ .

Розв’язок рівняння (5) легко отримати за допомогою функції джерела ([7], див. також п. 3) з подальшим лаплас-перетворенням

$$\tilde{\rho}(s) = \int_0^\infty \exp(-st) \rho(t) dt,$$

що дає:

$$\tilde{\rho}(s) = \tilde{\rho}_0(s) - \chi \tilde{\rho}_0^{(N)}(s) \tilde{\rho}_{NN}(s), \quad (6)$$

звідки для  $W_N^{(0)}$  отримуємо

$$W_N^{(0)} = \chi \tilde{\rho}_{NN}^{(0)}(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{\chi \left[ \tilde{\rho}_0^{(0)}(s) \right]_{NN}}{1 + \chi \left[ \tilde{\rho}_0^{(N)}(s) \right]_{NN}} \Big|_{s \rightarrow 0}. \quad (7)$$

Оскільки рішенням нульової задачі є функції (3), а їхні лаплас-трансформанти в правій частині (7) у границі  $s \rightarrow 0$  є нічим іншим як інтегралами від них по часу від 0 до  $\infty$ , згідно з (4), розбігаються при  $t \rightarrow \infty$  асимптотично однаково для всіх  $n$ , то маємо, що квантовий

<sup>1</sup> Знову-таки, термін “квантовий вихід” поки що не пов’язаний з власне квантовим процесом і використовується тут лише за традиціями фотохімії, а також, що більш важливо, у зв’язку з розглядом у п. 3.

вихід з ланцюжка через такий витік є стопроцентним,  $W_N^{(0)} = 1$ , тобто частинка зрештою завжди залишає ланцюжок<sup>2</sup>. Це, звісно, є наслідком теореми Пойа про неодмінне повернення; фактично, стопроцентність квантового виходу є її еквівалентом у випадку класичної (дифузійної) одновимірної міграції (це нескладно довести і для двовимірного процесу). Звернемося тепер до квантового випадку. Яких змін зазнають висновки цього пункту?

**3. Квантова міграція.** Схеми рис. 1, 2 залишаються тими ж, але стрибки в сусідні вузли ланцюжка тепер відбуваються не класичним чином з дифузійними константами  $\kappa$ , а завдяки обмінним матричним елементам  $L$ . Що ж до витoku  $\chi$ , то він зберігає зміст розпаду стану, тому його можна врахувати уявним доданком до енергії на вузлі  $N$ , як то зазвичай робиться у квантовій механіці. Це дозволяє нам залишитися в межах рівняння Шрьодінгера з неермітовим гамільтоніаном, що, порівняно з рівнянням Ліувілля для відповідної матриці густини (у якій тепер недиагональні елементи відігравали б головну роль), помітно спрощує розгляд без жодних обмежень його строгості.

Отже, гамільтоніан для схеми рис. 2 виглядає так:

$$H = H_0 - (i\chi/2)|N\rangle\langle N|, \quad (8)$$

де  $H_0$  – гамільтоніан “нульової” задачі квантової міграції в схемі рис. 1,

$$H_0 = L \sum_n (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|),$$

в якому сума  $\sum_n \epsilon_n |n\rangle\langle n|$  відсутня внаслідок однаковості енергій на всіх вузлах, що дозволяє вважати  $\epsilon_n = 0$ . Хвильова функція  $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$  має початкову умову  $|\Psi(t=0)\rangle = |0\rangle$ , або ж  $c_n(0) = \delta_{n0}$ , тоді як хвильова функція нульової задачі  $|\Psi_0(t)\rangle = \sum_n c_{0,n}(t)|n\rangle$  задовольняє рівнянню Шрьодінгера  $d|\Psi_0\rangle/dt = -iH_0|\Psi_0\rangle$  ( $i=1$ ). Останнє у термінах  $c_{0,n}$  виглядає так:

$$dc_{0,n}/dt = -iL(c_{0,n-1} + c_{0,n+1}). \quad (9)$$

Заміни  $c_{0,n} = (-i)^n B_{0,n}$  (таку ж використовуємо далі для  $c_n$ ) та  $\tau = 2Lt$  зводять (9) до рівняння  $2dB_{0,m}(\tau)/d\tau = B_{0,m-1}(\tau) - B_{0,m+1}(\tau)$ , що є канонічним співвідношенням для (тепер вже немодифікованих) функцій Бесселя  $J_m(\tau)$  [6]. Отже, маємо розв’язок системи (9) за умови  $B_{0,m}(0) = \delta_{m0}$

$$c_{0,m}(t) = (-i)^m J_m(2Lt), \quad (10)$$

що є відомим результатом. Зазначимо, що проінтегровані по  $t$  від 0 до  $\infty$  вузельні ймовірності  $|c_{0,m}(t)|^2$  вочевидь розбігаються. За аналогією з п. 2, це означає, що для квантової схеми рис. 1 теорема Пойа залишається вірною, тобто частинка ніколи не губиться у нескінченності. Звернемося, проте, до квантового виходу з такого ланцюжка.

Гамільтоніану (8) відповідає рівняння Шрьодінгера

$$d|\Psi(t)\rangle/dt = -iH_0|\Psi(t)\rangle - (\chi/2)c_N(t)|N\rangle. \quad (11)$$

<sup>2</sup> До того самого висновку прийдемо, явно використовуючи відомі лаплас-трансформанти  $\tilde{I}_n(s)$  [8] й переходячи в (7) до границі  $s \rightarrow 0$ .

Згідно з методом функції джерела, воно еквівалентне такому рівнянню в безрозмірних змінних:

$$|\Psi(\tau)\rangle = |\Psi_0(\tau)\rangle - a \int_0^\tau c_N(\theta) |\Psi_0^{(N)}(\tau - \theta)\rangle d\theta, \quad (12)$$

де  $a = \chi / 4L$ , а верхній індекс позначає початкову умову, тобто  $|\Psi_0^{(N)}(0)\rangle = |N\rangle$ . Лаплас-перетворення

$$|\tilde{\Psi}(s)\rangle = \int_0^\infty \exp(-s\tau) |\Psi(\tau)\rangle d\tau$$

з наступним матрируванням дозволяє знайти необхідний для обчислення  $W_N^{(0)}$  коефіцієнт  $\tilde{c}_N(s)$  через відомі розв'язки нульової задачі. Для потрібного нам випадку початкової умови  $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle$  отримуємо:

$$\tilde{c}_N^{(0)}(s) = (-i)^N \tilde{B}_N^{(0)}(s) = (-i)^N \frac{[\tilde{B}_0^{(0)}(s)]_N}{1 + a[\tilde{B}_0^{(N)}(s)]_N} = (-i)^N \frac{\tilde{J}_N(s)}{1 + a\tilde{J}_0(s)}, \quad (13)$$

де  $\tilde{J}_m(s)$  – лаплас-трансформанти функцій Бесселя [7],

$$\tilde{J}_m(s) = (\sqrt{s^2 + 1} - s)^m / \sqrt{s^2 + 1}.$$

Оскільки всі функції часу, що тут розглядаються, задовольняють умові  $f(t < 0) = 0$ , то їхні фур'є-трансформанти знаходяться просто заміною  $s \rightarrow i\omega$ , а теорема Парсеваля для них виглядає як

$$\int_0^\infty |f(\tau)|^2 d\tau = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Отже, шуканий квантовий вихід є:

$$W_N^{(0)} = \chi \int_0^\infty |B_N^{(0)}(t)|^2 dt = \frac{\chi}{2L} \int_0^\infty |B_N^{(0)}(\tau)|^2 d\tau = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |\tilde{B}_N^{(0)}(\omega)|^2 d\omega, \quad (14)$$

де  $\tilde{B}_N^{(0)}(\omega) = \tilde{B}_N^{(0)}(s = i\omega)$ . Тоді, як нескладно знайти, розв'язок (13) приводить до такого остаточного виразу для  $W_N^{(0)}$ :

$$W_N^{(0)} = \frac{2a}{\pi} (A_1 + A_2), \quad A_1 = \int_0^1 d\omega (\sqrt{1 - \omega^2} + a)^{-2}, \quad A_2 = \int_1^\infty (\omega - \sqrt{\omega^2 - 1})^{2N} (\omega^2 + a^2 - 1)^{-1} d\omega. \quad (15)$$

Одразу зауважимо, що  $A_2$  при збільшенні  $N$  прямує до нуля, а  $A_1$  від  $N$  взагалі не залежить. Конкретне значення  $W_N^{(0)}$  зумовлюється, звісно, відношенням  $a$  між інтенсивністю витоку  $\chi$  та шириною зони  $4L$ . Наведемо тут явні, досить компактні точні вирази для  $W_N^{(0)}(a)$  у показових випадках  $N = 0$ ,  $N = 1$  та  $N = \infty$ :

$$W_0^{(0)} = \begin{cases} \frac{2a}{\pi(1-a^2)} \left( \frac{2-a^2}{\sqrt{1-a^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} - 1 \right), & 0 < a \leq 1; \\ \frac{2a}{\pi(a^2-1)} \left( \frac{a^2-2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan \sqrt{a^2-1} + 1 \right), & a \geq 1; \end{cases}$$

$$W_1^{(0)} = \begin{cases} \frac{2a}{\pi} \left[ a\pi - \frac{3-2a^2}{1-a^2} + \frac{2-3a^2+2a^4}{(1-a^2)^{3/2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \right], & 0 < a \leq 1; \\ \frac{2a}{\pi} \left[ a\pi + \frac{3-2a^2}{a^2-1} - \frac{\arctan \sqrt{a^2-1}}{(a^2-1)^{3/2}} + \frac{2a^2-1}{\sqrt{a^2-1}} \left( 2\arctan(a-\sqrt{a^2-1}) - \frac{\pi}{2} \right) \right], & a \geq 1; \end{cases}$$

$$W_\infty^{(0)} = \begin{cases} \frac{2a}{\pi} \left[ \frac{1}{(1-a^2)^{3/2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1}{1-a^2} \right], & 0 < a \leq 1; \\ \frac{2a}{\pi} \left[ \frac{1}{a^2-1} - \frac{\arctan \sqrt{a^2-1}}{(a^2-1)^{3/2}} \right], & a \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

Квантові виходи (16) як функції  $a$  представлені на рис. 3. Відповідні криві для  $2 \leq N < \infty$  містяться між такими для  $N = 1$  та  $N = \infty$ .

**4. Обговорення.** Рис. 3 ілюструє дещо несподіваний результат. А саме, за будь-якої інтенсивності витоку, квантовий вихід завжди залишається меншим одиниці, навіть коли частинка в початковий момент поміщується на вузол витоку. Інакше кажучи, завжди існує ненульова ймовірність відходу частинки у нескінченність (неповернення).

Це виглядає нібито суперечливим як з формальної, так і з інтуїтивної точок зору. Як ми бачили у п. 2, у випадку дифузійної міграції в одновимірному ланцюжку без витоку частинка завжди повертається в початковий вузол (теорема Пойа), а тому за наявності витоку (незалежно від його інтенсивності) на будь-якому вузлі квантовий вихід завжди дорівнює одиниці, тобто зрештою частинка неодмінно захопить пасткою, що її уособлює витік. В формулі (7) цей результат забезпечувався однаковою асимптотичною розбіжністю інтегралів від відповідних населеностей вузла  $N$  в нульовій задачі. В квантовому випадку аналогічні інтеграли також мають однакову розбіжність, і для ланцюжка без витоку відповідь на питання Пойа залишається тією ж самою. Однак висновок на цій підставі про повне захоплення частинки пасткою-витоком виявиться, як показано у п. 3, помилковим. Справа в тому, що спроба використання тут формули (7) й тих же самих міркувань була б прикладом помилкового застосування методу функції джерела тільки для діагональних елементів матриці густини, тобто ігноруванням внеску витоку в “поперечну релаксацію”, або ж в еволюцію недіагональних елементів, яка є вирішальною в квантовому випадку. Дійсно, попри схожість формул (7) і (13), перша з них отримана з рівнянь еволюції для населеностей  $\rho_{nm}$ , коли  $\rho_{nm} = \rho_{nn} \delta_{nm}$ , а друга — з рівнянь для квантовомеханічних амплітуд.

Повертаючись до рис. 3, констатуємо, що “парадоксальним чином” наявність витоку на вузлі  $N$  замість того, щоб підсилити тенденцію до повернення (і тим самим до повного виходу частинки з ланцюжка через витік), навпаки, робить її повне повернення неможливим: з певною ймовірністю

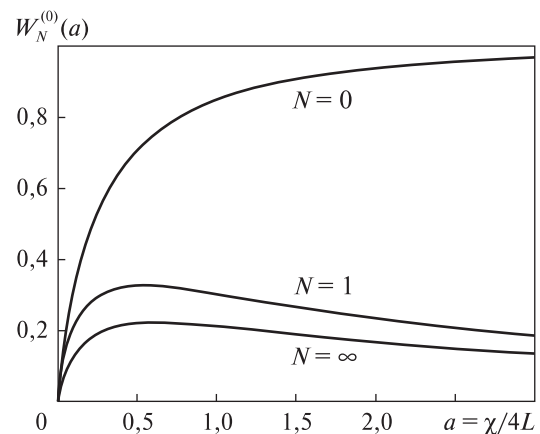


Рис. 3. Квантові виходи  $W_N^{(0)}(a)$  для  $N = 0; 1; \infty$

частинка залишається в ланцюжку назавжди (“відходить на нескінченність”, оскільки обмежений ланцюжок вона зрештою завжди полишає) — якщо, звісно, не рахувати тривіального випадку миттєвого захоплення нескінченно інтенсивним витоком, та й то лише тоді, коли вона спочатку була поміщена саме на вузол витоку ( $W_N^{(0)}$ ) у випадку квантової міграції до рівнює одиниці лише за умов  $N = 0$  та  $\chi = \infty$ ). В усіх інших випадках збільшення інтенсивності витоку зрештою тільки погіршує квантовий вихід: усі криві для  $N > 0$  демонструють лише відносно слабке початкове зростання квантового виходу (до максимуму приблизно 0.33 для  $N = 1$ ) в інтервалі  $\chi$ , менших напівширини зони  $2L$ . Подальше збільшення  $\chi$  хоча й підсилює “поздовжню релаксацію” (власне витік), але водночас підсилює й “поперечну”, що виявляється суттєвішим. Руйнування при цьому квантовомеханічної інтерференції (dephasing) створює ефективну “стінку”, яка відштовхує квантову частинку від витоку й тим самим блокує її повернення і захоплення пасткою.

*Робота виконана в межах цільової теми 0112-U-000056 “Фундаментальні властивості фізичних систем” ВФА НАН України.*

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Kempe J.* Quantum random walks: An introductory overview // *Cont. Phys.* — 2003. — **44**, № 4. — P. 307–327.
2. *Shenvi N., Kempe J., Whaley K.B.* Quantum random-walk search algorithm // *Phys. Rev. A.* — 2003. — **67**, № 5. — P. 052307.
3. *Aharonov D., Gottesman D., Irani S., Kempe J.* The power of quantum systems on a line // *Comm. Math. Phys.* — 2009. — **287**, № 1. — P. 41–65.
4. *Polya G.* Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassen-netz // *Math. Ann.* — 1921. — **84**, № 1. — P. 149–160.
5. *Монтролл Э.В.* Статистика решёток // *Прикл. комбинаторная математика.* — Москва: Мир, 1968. — С. 9–60.
6. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. — Москва: Наука, 1977. — 342 с.
7. *Christophorov L.N., Kharkyanen V.N.* Theory of interimpurity transitions in condensed medium // *Phys. Stat. Sol. (b)* — 1983. — **116**, № 2. — P. 415–425.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. — Москва: Наука, 1969. — 164 с.

#### REFERENCES

1. *Kempe J.* Contemporary Physics, 2003, **44**, № 4: 307–327.
2. *Shenvi N., Kempe J., Whaley K.B.* Phys. Rev. A, 2003, **67**, № 5: 052307.
3. *Aharonov D., Gottesman D., Irani S., Kempe J.* Comm. Math. Phys., 2009, **287**, № 1: 41–65.
4. *Polya G.* Math. Ann., 1921, **84**, № 1: 149–160.
5. *Montroll E.W.* Lattice statistics. In: Appl. Combinatorial Math. Ed. by E.F. Beckenbach, N.-Y.: Wiley, 1964: 96–143.
6. *Yahnke E., Emde F., Lösch F.* Tables of higher functions, N.-Y.: McGraw-Hill, 1960.
7. *Christophorov L.N., Kharkyanen V.N.* Phys. Stat. Sol. (b), 1983, **116**, № 2: 415–425.
8. *Bateman H.* Tables of integral transforms, Vol. 1, N.-Y.: McGraw-Hill, 1954.

*Надійшло до редакції 07.07.2016*



Академик НАН Украины А.Г. Загородний, Л.Н. Христофоров

Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины, Киев

E-mail: lchrist@bitp.kiev.ua

### ТЕОРЕМА ПОЙА И МИГРАЦИЯ И ЗАХВАТ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

*Вследствие теоремы Поля квантовый выход захвата частицы, совершающей случайные блуждания по низкоразмерной решётке, ловушкой на одном из её узлов стопроцентен при любой интенсивности захвата. Однако в случае квантовой миграции он практически всегда меньше и, вопреки интуиции, лишь уменьшается до нуля при увеличении интенсивности захвата.*

**Ключевые слова:** теорема Поля, низкоразмерные решетки, транспорт частиц, миграция и захват, квантовый выход.

Academician of the NAS of Ukraine A.G. Zagorodny, L.N. Christophorov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: lchrist@bitp.kiev.ua

### POLYA'S THEOREM AND MIGRATION+CAPTURE OF A QUANTUM PARTICLE

*Due to Polya's theorem, the quantum yield of capture of a particle, walking randomly on a low-dimensional lattice, by a trap located on one of its nodes is always 100 %, irrespective of the capture intensity. Under quantum migration, however, it is practically always less than 100 % and, contrary to intuition, only diminishes down to zero with the capture intensity growing.*

**Keywords:** Polya's theorem, low-dimensional lattices, particle transport, migration and capture, quantum yield.