УДК 511.138+517.53+517.633 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.01.012

Академік НАН України **В. Л. Макаров**[1], **І. І. Демків**[2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ
[2]Національний університет "Львівська політехніка"

E-mail: makarovimath@gmail.com, ihor.demkiv@gmail.com

Інтегральний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле

Побудовано інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле, який є природним узагальненням класичного дробу Тіле.

Ключові слова: інтерполяційні вузли, ланцюговий дріб, дріб Тіле.

Узагальнення дробів Тіле досліджували ряд авторів (див., наприклад, [1–3] та ін.). В роботі [4] було показано, як граничним переходом у інтерполяційному інтегральному поліномі типу Ньютона одержати інтерполяційний інтегральний поліном типу Ерміта. Тому природним чином виникло питання: чи не можна подібним граничним переходом у інтерполяційному інтегральному ланцюговому дробі (ІЛД) [5] перейти до інтерполяційного інтегрального ланцюгового дробу типу Ерміта із довільною кратністю кожного з інтерполяційних вузлів. Стосовно дробового випадку з точки зору складності ситуація виявилася протилежною. Справедливим є таке твердження.

Лема. *Нехай $Q_n^{IS}(x)$ — скалярний інтерполяційний ланцюговий дріб, одержаний з інтегрального ланцюгового дробу $Q_n^I(x(\cdot))$ у припущенні, що всі інтерполяційні вузли з каркаса $x_i(z)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, і аргумент $x(z)$ є тотожними сталими. Для того щоб існував ІЛД типу Ерміта $Q_n^E(x(\cdot))$ з довільною кратністю інтерполяційних вузлів, отриманий граничним переходом з $Q_n^I(x(\cdot))$, необхідно і достатньо, щоб існував ЛД типу Ерміта $Q_n^E(x)$ з такою ж кратністю інтерполяційних вузлів, одержаний граничним переходом з $Q_n^{IS}(x)$.*

Доведення не викликає жодних ускладнень.

Проілюструємо вищенаведене твердження на такому прикладі. Для сталих $x(z)$, $x_i(z)$, $i = 0, 1, 2$, будемо мати

$$Q_2^{IS}(x) = F(x_0) + \frac{(x - x_0)l_1}{1 + (x - x_0)(x - x_1)l_2}, \tag{1}$$

де l_1, l_2 — інтеграли від відповідних ядер. Покладемо $x_1 = x_0 + \alpha$ та підставимо цей вираз у (1). Тоді одержимо

$$l_1 = \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha}, \qquad l_2 = \frac{f(x_0 + 2\alpha) - 2f(x_0 + \alpha) + f(x_0)}{2\alpha^2(f(x_0) - f(x_0 + 2\alpha))}.$$

Перейдемо до границі, коли $\alpha \to 0$. Отримаємо

$$\lim_{\alpha \to 0} Q_2^{IS}(x) = f(x_0). \tag{2}$$

Із (2) випливає, що не існує інтерполяційного дробу типу Ерміта $Q_2^E(x)$, у якого x_0 є трикратним інтерполяційним вузлом, а отже, не існує ІІЛД $Q_2^E(x(\cdot))$ типу Ерміта з трикратним інтерполяційним вузлом.

Таким чином, одержати ІІЛД типу Ерміта шляхом граничного переходу з ІІЛД типу Ньютона можна тільки тоді, коли кожний з інтерполяційних вузлів має кратність не вище двох.

Отже, виникають такі задачі:

1) знайти такий звичайний ІЛД, щоб шляхом граничного переходу одержати звичайний ІЛД типу Ерміта з довільною кратністю кожного з вузлів;

2) узагальнити одержаний результат на ІІЛД типу Ерміта.

Розв'язком першої задачі є інтерполяційний дріб Тіле. Так, з двоповерхового ІЛД Тіле

$$T_2(x) = f(x_0) + \cfrac{(x - x_0)f(x_0, x_1)}{1 + (x - x_1)\cfrac{f(x_0, x_1, x_2)}{f(x_0, x_2)}} \tag{3}$$

застосуванням граничного переходу одержуємо ІЛД типу Ерміта з трикратним інтерполяційним вузлом

$$T_2^E(x) = (f(x_0) + \cfrac{(x - x_0)f'(x_0)}{1 - \cfrac{(x - x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]}}$$

(після очевидних перетворень).

Справедливість твердження леми для загального випадку випливає із результатів, викладених у монографії [6].

Переходимо до розв'язування другої задачі. Почнемо з часткового випадку. Узагальнення формули Тіле на двоповерховий ІІЛД є таким:

$$\begin{aligned}
&T_2(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{l_1(x(\cdot) - x_0(\cdot))}{1 + l_2(x(\cdot) - x_1(\cdot))},\\
&l_1(x(\cdot) - x_0(\cdot)) = \int_0^1 [x(s_1) - x_0(s_1)]K_1(s_1)\,ds_1 =\\
&\qquad = -\int_0^1 \frac{x(s_1) - x_0(s_1)}{x_1(s_1) - x_0(s_1)} \frac{d}{ds_1}[F(x_{0,1}(\cdot, s_1)) - F(x_0(\cdot))]ds_1,\\
&l_2(x(\cdot) - x_1(\cdot)) = \int_0^1 [x(s_2) - x_1(s_2)]K_2(s_2)\,ds_2 =\\
&\qquad = -\int_0^1 \frac{x(s_2) - x_1(s_2)}{x_2(s_2) - x_1(s_2)} \frac{d}{ds_2}\left[\frac{\int_0^1 K_1(s_1)[x_{1,2}(s_1, s_2) - x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot, s_2)) - F(x_0(\cdot))}\right]ds_2,\\
&x_{i-1,i}(s_{i-1}, s_i) = x_{i-1}(s_{i-1}) + H(s_{i-1} - s_i)(x_i(s_{i-1}) - x_{i-1}(s_{i-1})).
\end{aligned} \tag{4}$$

Перевіримо інтерполяційні умови. Підставимо в (4) $x_{1,2}(z,\xi) = x_1(z)+H(z-\xi)(x_2(z)-x_1(z))$, тоді отримаємо

$$
\begin{aligned}
&l_2(x_{1,2}(\cdot,\xi) - x_1(\cdot)) = \\
&\quad = -\int\limits_0^1 \frac{x_{1,2}(s_2,\xi) - x_1(s_2)}{x_2(s_2) - x_1(s_2)} \frac{d}{ds_2}\left[\frac{\int\limits_0^1 K_1(s_1)[x_{1,2}(s_1,s_2) - x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot,s_2)) - F(x_0(\cdot))}\right] ds_2 = \\
&\quad = -\int\limits_\xi^1 \frac{d}{ds_2}\left[\left(\int\limits_0^{s_2} K_1(s_1)[x_1(s_1) - x_0(s_1)]ds_1 + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int\limits_{s_2}^1 K_1(s_1)[x_2(s_1) - x_0(s_1)]\,ds_1\right)(F(x_{1,2}(\cdot,s_2)) - F(x_0(\cdot)))^{-1}\right] ds_2 = \\
&\quad = -\frac{\int\limits_0^1 K_1(s_1)[x_1(s_1) - x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_1(\cdot)) - F(x_0(\cdot))} + \\
&\qquad + \frac{\int\limits_0^\xi K_1(s_1)[x_1(s_1) - x_0(s_1)]\,ds_1 + \int\limits_\xi^1 K_1(s_1)[x_2(s_1) - x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))} = \\
&\quad = -1 + \frac{-F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) + F(x_1(\cdot)) + \int\limits_\xi^1 K_1(s_1)[x_2(s_1) - x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))}, \\
&l_1(x_{1,2}(\cdot,\xi) - x_0(\cdot)) = -F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) + F(x_1(\cdot)) + \int\limits_\xi^1 K_1(s_1)[x_2(s_1) - x_0(s_1)]\,ds_1
\end{aligned}
$$

і

$$
T_2(x_{1,2}(\cdot,\xi)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{l_1(x_{1,2}(\cdot,\xi) - x_1(\cdot))}{1 + l_2(x_{1,2}(\cdot,\xi) - x_1(\cdot))} = F(x_{1,2}(\cdot,\xi)),
$$

тобто інтерполяційна умова на континуальному вузлі $x_{1,2}(z,\xi) = x_1(z) + H(z-\xi)(x_2(z) - x_1(z))$ є виконаною. Перевірка виконання інтерполяційної умови у вузлі $x_0(z)$ не викликає жодних ускладнень.

Перейдемо до одержання загальної інтегральної формули типу Тіле. Шукаємо цю формулу, використовуючи форму запису У. Джонса, В. Трона [7] у вигляді

$$
T_n(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{l_1(x(\cdot) - x_0(\cdot))|}{|1} + \frac{l_2(x(\cdot) - x_1(\cdot))|}{|1} + \ldots
$$

$$\ldots + \frac{l_{n-1}(x(\cdot) - x_{n-2}(\cdot))|}{|1} + \frac{l_n(x(\cdot) - x_{n-1}(\cdot))|}{|1}. \tag{5}$$

Позначимо у такий спосіб i-й підхідний дріб дробу (5) (див. [6, 7]):

$$\begin{aligned}
&T_i(x(\cdot)) = \frac{A_i(x(\cdot))}{B_i(x(\cdot))},\\
&B_i(x(\cdot)) = B_{i-1}(x(\cdot)) + l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))B_{i-2}(x(\cdot)),\\
&i = 1, 2, \ldots, \qquad B_{-1}(x(\cdot)) = 0, \qquad B_0(x(\cdot)) = 1,\\
&A_i(x(\cdot)) = A_{i-1}(x(\cdot)) + l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))A_{i-2}(x(\cdot)),\\
&i = 1, 2, \ldots, \qquad A_{-1}(x(\cdot)) = 1, \qquad A_0(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)).
\end{aligned} \tag{6}$$

Із (6) знаходимо

$$l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot)) = -\frac{A_{i-1}(x(\cdot)) - T_i(x(\cdot)B_{i-1}(x(\cdot))}{A_{i-2}(x(\cdot)) - T_i(x(\cdot))B_{i-2}(x(\cdot))}, \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Аналіз скалярної формули Тіле вказує на структуру, яку повинен мати функціонал $l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))$, а саме:

$$l_i(x(\cdot) - x_{i-1}(\cdot)) = \int\limits_0^1 K_i(s_i)[x(s_i) - x_{i-1}(s_i)]\, ds_i. \tag{8}$$

Із (7), (8) ми можемо визначити ядро $K_i(s)$. Замінимо $x(s)$ на

$$x_{i-1,i}(s, \xi) = x_{i-1}(s) + H(s - \xi)[x_i(s) - x_{i-1}(s)].$$

Тоді після диференціювання за змінною ξ одержуємо

$$K_i(\xi) = \frac{1}{x_i(\xi) - x_{i-1}(\xi)} \frac{d}{d\xi} \frac{A_{i-1}(x_{i-1,i}(\cdot,\xi)) - F(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))B_{i-1}(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))}{A_{i-2}(x_{i-1,i}(\cdot,\xi)) - F(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))B_{i-2}(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))}. \tag{9}$$

Теорема. *Нехай для функціонала $F(x(\cdot))$, що діє з простору кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю розривів першого роду $Q^{(0)}[0,1]$ у R^1, виконуються умови*

$$F(x_i(\cdot)) = g_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad F(x_{n-1,n}(\cdot,\xi)) = g_{n-1,n}(\xi), \qquad \xi \in [0,1],$$

і нехай $F(x(\cdot))$ належить до класу функціоналів, для яких визначений та існує інтегральний дріб (5). Тоді цей дріб є ІЛД на множині інтерполяційних вузлів $x_i(s)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $x_{n-1,n}(s,\xi)$, $\xi \in [0,1]$, тобто задовольняє умови

$$T_n(x_i(\cdot)) = g_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad T_n(x_{n-1,n}(\cdot,\xi)) = g_{n-1,n}(\xi), \qquad \xi \in [0,1],$$

остання з яких є континуальною.

Неважко переконатися, що коли $x(s)$, $x_i(s)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, є сталими, формула (5) з урахуванням (7)–(9) має вигляд скалярного дробу Тіле. Дійсно, в цьому випадку із (9) отримуємо інтерполяційний дріб

$$F(x_0) + \frac{(x - x_0)l_1(1)|}{|1} + \frac{(x - x_1)l_2(1)|}{|1} + \ldots + \frac{(x - x_{n-2})l_{n-1}(1)|}{|1} + \frac{(x - x_{n-1})l_n(1)|}{|1},$$

який буде дробом Тіле за умови виконання співвідношень

$$v_i(x_i) = \frac{1}{l_i(1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

де $v_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — обернені розділені різниці (див. [7]). Доведення (10) здійснюється за допомогою методу математичної індукції.

Отже, ми показали, що для ІЛД (5) вищенаведена лема є справедливою.

Для того щоб одержати ІЛД типу Тіле, який задовольняє континуальні інтерполяційні умови

$$T_n(x_{i-1,i}(\cdot,\xi)) = F_n(x_{i-1,i}(\cdot,\xi)), \qquad \xi \in [0,1], \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

треба визначати ядра у формулах (8) у інший спосіб. Для ілюстрації зупинимося на двоповерховому дробі та заради спрощення візьмемо за каркас

$$x_1(s) = x_0(s) + \alpha, \qquad x_2(s) = x_0(s) + \alpha + \gamma.$$

Тоді для визначення ядер $K_i(s_i)$, $i = 1, 2$, отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$T_2(x_{i-1,i}(\cdot,\xi)) = F(x_{i-1,i}(\cdot,\xi)), \qquad i = 1, 2,$$

розв'язком якої є

$$K_2(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left\{\frac{1}{\alpha}[F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot,\xi))] - \frac{1}{\gamma}\left[\frac{F(x_{1,2}(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))}{F(x_2(\cdot)) - F(x_0(\cdot))}(\alpha+\gamma) - \alpha\right] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_0^1 K_1(s_1)ds_1\right\}[F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) + F(x_{1,2}(\cdot,\xi)) - 2F(x_0(\cdot))]^{-1},$$

$$\int\limits_0^1 K_1(s_1)ds_1 = \frac{1}{\alpha}[F(x_1(\cdot)) - F(x_0(\cdot))],$$

$$K_1(\xi) = -\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\xi}[F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) - F(x_0(\cdot))]\left[1 - \alpha\int\limits_0^\xi K_2(s_2)ds_2\right].$$

Якщо $x(s)$, $x_0(s)$ тотожно сталі, то з попередніх формул одержимо дріб Тіле у формі (3).

Наведемо деякі міркування стосовно граничного переходу у формулі (5) з метою одержання ІЛД типу Тіле–Ерміта, і зробимо це на прикладі часткового випадку (4). Нехай

$$x_1(s) = x_0(s) + \alpha, \quad x_2(s) = x_0(s) + 2\alpha.$$

Тоді для всіх $x(s)$, для яких $x(s) - x_0(s) \equiv \mathrm{const}$, існує границя дробу (4), коли $\alpha \to 0$, і вона є такою:

$$T_2^E(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{(x(0) - x_0(0))F'(x_0(\cdot))}{1 - \dfrac{(x(0) - x_0(0))F''(x_0(\cdot))}{2[F'(x_0(\cdot))]}}. \tag{11}$$

Неважко перевірити, що дріб (11) дійсно має трикратний інтерполяційний вузол $x_0(s)$.

У загальному випадку граничного переходу із (6), коли α прямує до 0 і за інтерполяційні вузли вибрано $x_i(s) = x_0(s) + i\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна одержати формулу типу Тіле–Тейлора аналогічно до відповідної формули Тіле–Тейлора (3.42) із [6, с. 48]. Технічно набагато складніше за допомогою граничного переходу з (5) одержати формулу типу Тіле–Ерміта з довільними кратностями інтерполяційних вузлів. При цьому жодних теоретичних ускладнень не виникає.

Зауваження. Якщо покласти у (5) $x_i(s) \equiv \mathrm{const}$, $x(s) \equiv \mathrm{const}$, то одержимо звичайний ІЛД, який не містить обернених різниць, що може бути корисним у застосуваннях. Разом з тим після деяких перетворень ІЛД набуває вигляду дробу Тіле.

Цитована література

1. *Bultheel A., Levrie P.* A note on Thiele n-fractions // Numerical Algorithms. – 1993. – **4**, Iss. 2. – P. 225–239.
2. *Tan J., Fang Y.* Newton-Thiele's rational interpolants // Numerical Algorithms. – 2000. – **24**, Iss. 1. – P. 141–157.
3. *Gensane Th.* Interpolation on the hypersphere with Thiele type rational interpolants // Numerical Algorithms. – 2012. – **60**, Iss. 3. – P. 523–529.
4. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І.* Функціональні поліноми Ерміта в просторі $Q[0,1]$ // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 21–25.
5. *Макаров В. Л., Демків І. І.* Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 17–23.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
7. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.

References

1. *Bultheel A., Levrie P.* Numerical Algorithms, 1993, **4**, Iss. 2: 225–239.
2. *Tan J., Fang Y.* Numerical Algorithms, 2000, **24**, Iss. 1: 141–157.
3. *Gensane Th.* Numerical Algorithms, 2012, **60**, Iss. 3: 523–529.
4. *Makarov V. L., Khlobistov V. V., Demkiv I. I.* Dop. NAN Ukraine, 2007, No 8: 21–25 (in Ukrainian).
5. *Makarov V. L., Demkiv I. I.* Dop. NAN Ukraine, 2008, No 11: 17–23 (in Ukrainian).
6. *Skorobogat'ko V. Ya.* Theory of Branching Continued Fractions and Its Application in Computational Mathematics, Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
7. *Jones W., Tron W.* Continued fractions. Analytic theory and applications, Moscow: Mir, 1985 (in Russian).

Надійшло до редакції 21.07.2015

Академик НАН Украины **В. Л. Макаров**[1], **И. И. Демкив**[2]

[1]Институт математики НАН Украины, Киев
[2]Национальный университет “Львовская политехника”

E-mail: makarovimath@gmail.com

Интегральная интерполяционная цепная дробь типа Тиле

Построена интерполяционная интегральная цепная дробь типа Тиле, которая является естественным обобщением классической дроби Тиле.

Ключевые слова: интерполяционные узлы, цепная дробь, дробь Тиле.

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov**[1], **I. I. Demkiv**[2]

[1]Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2]Lviv Polytechnic National University

E-mail: makarovimath@gmail.com

An integral interpolation chain fraction of the Thiele type

An integral interpolation chain fraction of the Thiele type has been constructed. This fraction is a natural generalization of the classical Thiele contiunued fraction.

Keywords: interpolation points, continued fraction, Thiele fraction.