УДК 514.517+517.55 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.04.013

М. В. Стефанчук

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: stefanmv43@gmail.com

Екстремальні елементи в гіперкомплексному просторі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

Досліджуються екстремальні елементи та h-оболонка множин у n-вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$. Вводиться клас $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин, які включають у себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів.

Ключові слова: гіперкомплексно опукла множина, сильно гіперкомплексно опукла множина, h-оболонка множини, h-екстремальна точка, h-екстремальний промінь, $\mathbb{H}$-квазіопукла множина.

У роботі досліджуватимемо екстремальні елементи та h-оболонку множини в гіперкомплексному просторі, а також побудуємо клас гіперкомплексно опуклих множин, які включають у себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненими відносно перетинів. Такі множини називатимемо $\mathbb{H}$-квазіопуклими. Дані множини є аналогами $\mathbb{C}$-квазіопуклих множин у комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ [1].

Будемо розглядати n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$, який є прямим добутком n-копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$ [2]. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ — довільна множина, яка містить початок координат $O = \{0, 0, \ldots, 0\}$. Покладемо $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $\langle x, h \rangle = x_1h_1 + x_2h_2 + \ldots + x_nh_n$. Множина $E^* = \{h \mid \langle h, x\rangle \neq 1 \forall x \in E\}$ називається *спряженою* множиною до множини E [3].

Означення 1. Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *гіперкомплексно опуклою*, якщо для довільної точки $x_0 \in \mathbb{H}^n \setminus E$ існує гіперплощина, яка проходить через точку x_0 і не перетинає E [3, 4].

Нагадаємо, що оскільки в алгебрі кватерніонів множення некомутативне [2], то надалі розглядатимемо праві гіперплощини, тобто точку зі змінною координатою множимо на фіксовану точку справа.

Означення 2. Множина $E \subset \mathbb{H}^n$ називається *сильно гіперкомплексно опуклою*, якщо довільний її перетин гіперкомплексною прямою γ ациклічний, тобто $\widetilde{H}^i(\gamma \bigcap E) = 0$, $\forall i$, де $\widetilde{H}^i(\gamma \bigcap E)$ — зведена група когомологій Александрова–Чеха множини $\gamma \bigcap E$ з коефіцієнтами в групі цілих чисел [3].

У [5] доведено, що сильно гіперкомплексно опуклі компакти будуть гіперкомплексно опуклими.

Нехай $E \subset \mathbb{H}$ — довільна множина. Доповнення до об'єднання необмежених компонент множини $\mathbb{H} \setminus E$ називається *h-комбінацією точок множини E* та позначається $[E]$. Якщо E — довільна множина в просторі $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, то скажемо, що точка x належить h-комбінації точок з E, якщо існує перетин множини E гіперкомплексною прямою γ такий, що $x \in [E \bigcap \gamma]$. Множину таких точок з $\mathbb{H}^n$ називають *h-комбінацією точок E* і позначають $[E]$; m-кратну h-комбінацію визначають за індукцією $[E]^m = [[E]^{m-1}]$ [6].

Означення 3. *h-оболонкою множини* $E \subset \mathbb{H}^n$ називається множина $\widehat{E} = \bigcap\limits_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)]$, де $\pi\colon \mathbb{H}^n \to \lambda$ — усі можливі лінійні проекції множини на гіперкомплексні прямі, $[\pi(E)]$ — h-комбінація точок множини $\pi(E)$, а $\pi^{-1}[\pi(E)] = \{x \in \mathbb{H}^n | \pi(x) \in \pi(E)\}$ — її повний прообраз [3, 6].

Нижчесформульована теорема стверджує, що для довільної множини множина точок її h-оболонки збігається з h-комбінацією точок цієї множини.

Теорема 1. *Якщо множина* E *є h-оболонкою, то* $E = [E]$.

Доведення. Нехай $x \in [\lambda \bigcap E]$ для деякої гіперкомплексної прямої λ. Тоді очевидно буде виконуватися включення $\pi(x) \in [\pi(\lambda \bigcap E)]$ для всіх проекцій π, тому що обмеження будь-якої проекції π на кожну пряму є або гомеоморфізмом, або проекцією в точку.

Дослідимо більш детально процедуру утворення h-оболонки множини E. За властивістю 19 гіперкомплексно опуклих множин [3] множина $[\pi(E)]$ гомеоморфна доповненню в $\mathbb{H}^o = \lambda^o$ ($\mathbb{H}^o$ — одноточкова компактифікація прямої) до зв'язної компоненти, що містить початок координат, деякого перерізу $\lambda \bigcap E^*$, де λ — гіперкомплексна пряма, а E^* — множина, спряжена до множини E. Позначимо цю компоненту $]\lambda \bigcap E^*[$. Крім цього, дану компоненту можна зобразити ще й так: $(\pi^{-1}[\pi(E)])^*$. Взагалі кажучи, об'єднання $\bigcup\limits_{\lambda}]\lambda \bigcap E^*[$ може не бути гіперкомплексно опуклою множиною. Однак за властивостями 9 та 15 гіперкомплексно опуклих множин [3] справедливі такі рівності:

$$\left(\bigcup_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^*\right)^* = \bigcap_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^{**} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)] = \widehat{E}.$$

Звідси випливає нижчеподана теорема, яка дає ще один спосіб побудови h-оболонки.

Теорема 2. *Для довільної множини* $E \subset \mathbb{H}^n$ *її h-оболонку можна зобразити у вигляді* $\widehat{E} = \left(\bigcup\limits_{\lambda} \Big] \lambda \bigcap E^* \Big[\right)^*$.

Доведення випливає з виконання рівності

$$\widehat{E} = \left(\bigcup_{\pi} (\pi^{-1}[\pi(E)])^*\right)^* = \left(\bigcup_{\lambda} \Big] \lambda \bigcap E^* \Big[\right)^*.$$

Варто відзначити, що спряжена множина до h-оболонки не завжди буде h-оболонкою. Розглянемо такий приклад.

Приклад 1. Нехай K — компакт, який лежить у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3 = \{(y_1, z_1, y_2) | x_1 = y_1 + iz_1 + ju_1 + kt_1, x_2 = y_2 + iz_2 + ju_2 + kt_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2\}$, $K = \{(y_1, z_1, y_2) | (y_1 - |z_1| = 0,\ 0 \leqslant y_1 \leqslant 1) \wedge [[(y_2 = y_1) \vee (y_2 = -2y_1 + 3), z_1 \leqslant 0] \vee [(y_2 = 2y_1) \vee (y_2 = -y_1 + 3), z_1 > 0]]\}$.

Тоді при канонічній проекції $\pi_1(K)$ на пряму $x_2 = 0$ отримаємо ациклічний компакт $K_1 = \{(y_1, z_1, 0, 0) | y_1 - |z_1| = 0,\ 0 \leqslant y_1 \leqslant 1\}$, а при проекції $\pi_2(K)$ на пряму x_2, паралельно прямій, яка проходить через точки $(1 - i, 1)$, $(1 + i, 2)$, отримаємо компакт $\pi_1(K) = K_2$, який складається з двох відрізків, оскільки відрізки $[y_1 = -z_1, 0 \leqslant y_1 \leqslant 1, y_2 = y_1] \bigcap \mathbb{R}^3$ і $[y_1 = z_1, 0 \leqslant y_1 \leqslant 1, y_2 = 2y_1] \bigcap \mathbb{R}^3$, $[y_1 = -z_1, 0 \leqslant y_1 \leqslant 1, y_2 = -2y_1 + 3] \bigcap \mathbb{R}^3$ і $[y_1 = z_1, 0 \leqslant y_1 \leqslant 1, y_2 = -y_1 + 3] \bigcap \mathbb{R}^3$ попарно ототожнюються при цій проекції. Тому $[K_1] = K_1$ і $[K_2] = K_2$. Легко бачити, що $K = \pi_1^{-1}(K_1) \bigcap \pi_2^{-1}(K_2)$. При всіх інших проекціях образ $\pi(K)$ буде ненульовим одновимірним циклом. Тому $\pi(K) \neq [\pi(K)]$ при $\pi \neq \pi_1$ або $\pi \neq \pi_2$.

Але $\widehat{K} = \bigcap_{\pi} \pi^{-1}[\pi(E)] \subset \pi_1^{-1}(K_1) \bigcap \pi_2^{-1}(K_2) = K$. Отже, $\widehat{K} = K$. Однак, взагалі кажучи, $\pi(\widehat{K}) \neq [\pi(K)]$.

За теоремою 2 $\widehat{K} = (\bigcup_{\gamma}]\gamma \bigcap K^*[)^* = (K_3)^*$, де $K_3 = \{(y_1, z_1, y_2) | y_1 - |z_1| = 0,\ 0 \leqslant y_1 \leqslant 1, (y_2 = y_1) \vee (y_2 = -2y_1 + 3)\}$ — частина компакта K, що складається з двох відрізків.

Означення 4. *h-інтервалом* з центром у точці x радіуса r називається перетин відкритої кулі радіуса r з центром у точці x з гіперкомплексною прямою, яка проходить через точку x [3].

Означення 5. Точка $x \in E \subset \mathbb{H}^n$ називається *h-екстремальною точкою множини E*, якщо в E немає жодного h-інтервалу, який містить x [3].

З леми 1, яка є аналогом теореми Каратеодорі [7], враховуючи, що жодна h-екстремальна точка не може бути отримана h-комбінацією інших точок компакта K, випливають нижченаведені наслідки.

Лема 1. *h-оболонка гіперкомплексно опуклого компакта в $\mathbb{H}^n$ збігається із сукупністю не більше ніж n-кратних комбінацій своїх h-екстремальних точок [6].*

Наслідок 1. *Якщо $K \subset \mathbb{H}^n$ — компакт і $\widehat{K}$ — його h-оболонка, яка збігається з h-комбінацією $[K]^m$, то кожна h-екстремальна точка множини $\widehat{K}$ належить K.*

Наслідок 2. *Довільну точку простору $\mathbb{H}^n$, яка належить h-оболонці $\widehat{K} = [K]^m$, можна зобразити у вигляді не більше ніж n-кратної комбінації точок компакта K.*

Наслідок 3. *Для того щоб h-оболонка гіперкомплексно опуклого компакта K збігалася з ним, необхідно, щоб всі перерізи його гіперкомплексними прямими γ не містили тривимірних коциклів, тобто $H^3(K \bigcap \gamma) = 0$.*

Наслідок 4. *Для того щоб h-оболонка гіперкомплексно опуклого компакта K збігалася з ним, необхідно, щоб усі проекції його спряженої множини K^* на гіперкомплексні прямі були зв'язними.*

Останній наслідок отримуємо з попереднього, використовуючи властивості 19 та 20 гіперкомплексно опуклих множин [3].

Приклад 2. Нехай $S^4_+ \subset \mathbb{R}^5 \subset \mathbb{H}^2$ — півсфера у п'ятивимірному дійсному евклідовому просторі $\mathbb{R}^5 = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | x_1 = y_1 + iz_1 + ju_1 + kt_1, x_2 = y_2 + iz_2 + ju_2 + kt_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2\}$, $S^4_+ = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + t_1^2 + y_2^2 = 1, z_1 \geqslant 0\}$. Легко бачити, що $(S^4_+)^{**} = K_+ = \{(y_1, z_1, u_1, t_1, y_2) | y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + t_1^2 + y_2^2 \leqslant 1, z_1 \geqslant 0\}$ і K_+ — опуклий компакт, який збігається зі своєю h-оболонкою. Довільний перетин S^4_+ гіперкомплексною прямою збігається з перетином S^4_+ дійсною прямою або дійсною чотиривимірною площиною виду $y_2 = \mathrm{const}$ в $\mathbb{R}^5$. Усі такі перетини не містять тривимірних циклів. Тому $[S^4_+] = S^4_+ \neq K_+$.

Цей приклад показує, що лему 1 та її наслідки не завжди можна застосовути до гіперкомплексно неопуклих компактів.

Поширимо теорему Клі опуклого аналізу [7] на гіперкомплексний випадок.

Означення 6. *h-променем* назвемо замкнену необмежену ациклічну підмножину гіперкомплексної прямої з непорожньою межею.

Означення 7. *Екстремальним h-променем* множини $E \subset \mathbb{H}^n$ назвемо h-промінь H, який належить множині E, якщо множина $E \setminus H$ гіперкомплексно опукла та кожна точка межі променя H буде h-екстремальною точкою для множини E. (Це еквівалентно тому, що жодна точка променя H не буде внутрішньою для довільного h-інтервалу, який належить множині E та має хоча б одну точку за межами H.)

Для множини $E \subset \mathbb{H}^n$ позначимо: $\mathrm{hext}\, E$ — множину її h-екстремальних точок, $\mathrm{rhext}\, E$ — множину h-екстремальних променів, $\mathrm{hconv}\, E$ — h-оболонку E.

Лема 2. *Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$ — замкнене сильно гіперкомплексно опукле тіло (тобто $\mathrm{int}\, E \neq \neq \varnothing$) з непорожньою сильно гіперкомплексно опуклою межею ∂F, тоді E має вигляд $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$, де E_1 — ациклічна підмножина прямої $\mathbb{H}$ з непорожньою внутрішністю відносно цієї прямої.*

Доведення. Оскільки межа ∂F — сильно гіперкомплексно опукла, то для довільної точки $x \in \mathrm{int}\, E$ існує гіперплощина, яка не перетинає ∂F. Тому множина E містить гіперплощину. Отже, за теоремою 3 [6] множину E можна зобразити у вигляді декартового добутку $E = E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$. Множина E_1 буде ациклічною, тому що існують перетини E гіперкомплексними прямими, які гомеоморфні E_1.

Означення 8. Афінна підмножина L називається *дотичною* до множини E, якщо $L \bigcap \overline{E} \subset \partial E$, $L \bigcap \overline{E} \neq \varnothing$.

Лема 3. *Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ — сильно гіперкомплексно опукла замкнена множина та L — її дотична гіперкомплексна пряма, то $\mathrm{hext}(E \bigcap L) = (\mathrm{hext}\, E) \bigcap L$.*

Доведення. Оскільки справедливе включення множин $E \bigcap L \subset E$, то за означенням h-екстремальних точок маємо $\mathrm{hext}(E \bigcap L) \supset (\mathrm{hext}\, E) \bigcap L$. Нехай точка $x \in \mathrm{hext}(E \bigcap L)$. Тоді не може виконуватися включення $x \in [K] \setminus K$, де $K \subset E$, бо інакше було б $K \subset E \bigcap L$ (тому що $x \in L$ та L є гіперкомплексною прямою, дотичною до E). А це суперечить тому, що $x \in \mathrm{hext}(E \bigcap L)$. Отже, вірне обернене включення $\mathrm{hext}(E \bigcap L) \subset (\mathrm{hext}\, E) \bigcap L$ та лема доведена.

Зауваження 1. Аналогічно доводиться рівність $\mathrm{rhext}(E \bigcap L) = (\mathrm{rhext}\, E) \bigcap L$ для h-екстремальних променів.

Теорема 3. *Кожна замкнена сильно гіперкомплексно опукла множина $E \subset \mathbb{H}^n$, яка не містить гіперкомплексної прямої, буде h-оболонкою своїх h-екстремальних точок та h-екстремальних променів $E = \mathrm{hconv}(\mathrm{hext}\, E \bigcup \mathrm{rhext}\, E)$.*

Доведення. Доведення проведемо індукцією згідно з гіперкомплексною розмірністю множини E. Для $\dim_{\mathbb{H}} E = 0$ та $\dim_{\mathbb{H}} E = 1$ теорема очевидна. Припустимо, що теорема правильна при всіх гіперкомплексних розмірностях множини E, які менші m $(1 < m \leqslant n)$. Доведемо її для $\dim_{\mathbb{H}} E = m$.

За умовою теореми множина E не містить гіперкомплексної прямої, тому не може збігатися ні з її афінною оболонкою, ні з декартовим добутком $E_1 \times \mathbb{H}^{n-1}$. Тому з леми 2 випливає, що непорожня межа ∂E не буде сильно гіперкомплексно опуклою множиною.

За означенням сильної гіперкомплексної опуклості перетин множини E довільною гіперкомплексною прямою буде також сильно гіперкомплексно опуклим. Нехай x — довільна точка множини E. Якщо x належить якійсь дотичній прямій L до E, то за припущенням індукції маємо включення $x \in \mathrm{hconv}((\mathrm{hext}\, E \bigcap L) \bigcup \mathrm{rhext}(E \bigcap L))$. Якщо ж існують точки множини E, через які не проходить жодна дотична до E гіперкомплексна пряма, то знайдеться точка $x \in \mathrm{int}\, E$.

У цьому випадку через точку x проведемо гіперкомплексну пряму l. Перетин $l \bigcap E$ є сильно гіперкомплексно опуклою множиною та не збігається з l. Тому $x \notin [\partial(l \bigcap E)]$. Нехай тепер y — довільна точка межі перетину $\partial(l \bigcap E)$. З урахуванням сильної гіперкомплексної опуклості через точку y можна провести дотичну до множини E пряму T. За припущенням індукції отримаємо включення $y \in \mathrm{hconv}((\mathrm{hext}\, E \bigcap T) \bigcup \mathrm{rhext}(E \bigcap T))$. Зауважимо, що це виконується для кожної точки $y \in \partial(l \bigcap E)$. Тоді, враховуючи лему 3 та зауваження 2, отримуємо $x \in \mathrm{hconv}(\mathrm{hext}\, E \bigcup \mathrm{rhext}\, E)$. Внаслідок довільності вибору точки x $E \subset \operatorname{hconv}(\operatorname{hext} E \bigcup \operatorname{rhext} E)$. Обернене включення тривіальне. Теорема доведена.

Клас сильно гіперкомплексно опуклих множин є незамкненим відносно перетинів [5]. Тому для нього не виконується основна аксіома опуклості — перетин будь-якої кількості опуклих множин повинен бути опуклим. Означимо клас множин, який включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі множини та є замкненим відносно перетинів.

Означення 9. Гіперкомплексно опуклу множину $E \subset \mathbb{H}^n$ назвемо $\mathbb{H}$-*квазіопуклою множиною*, якщо її перетин довільною гіперкомплексною прямою γ не містить тривимірного коциклу, тобто $H^3(\gamma \bigcap E) = 0$.

Очевидно, що клас $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин включає в себе сильно гіперкомплексно опуклі області та компакти.

Покажемо замкненість класу $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин у тому сенсі, що перетин довільної сім'ї компактних $\mathbb{H}$-квазіопуклих множин буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Теорема 4. *Перетин довільної сім'ї $\mathbb{H}$-квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклим компактом.*

Доведення. Доведення достатньо провести для двох компактів. Нехай K_1, K_2 — два довільні $\mathbb{H}$-квазіопуклі компакти, γ — довільна гіперкомплексна пряма, яка перетинає множину $K_1 \bigcap K_2$. Використаємо точну когомологічну послідовність Майєра–В'єторіса [8]

$$H^3(\gamma \bigcap K_1) \bigoplus H^3(\gamma \bigcap K_2) \to H^3(\gamma \bigcap K_1 \bigcap K_2) \to H^4(\gamma \bigcap (K_1 \bigcup K_2)).$$

Оскільки компакти K_1 та K_2 $\mathbb{H}$-квазіопуклі, то $H^3(\gamma \bigcap K_1) = 0$ та $H^3(\gamma \bigcap K_2) = 0$. Тому $H^3(\gamma \bigcap K_1) \bigoplus H^3(\gamma \bigcap K_2) = 0$.

З іншого боку, компактний перетин $\gamma \bigcap (K_1 \bigcup K_2) = (\gamma \bigcap K_1) \bigcup (\gamma \bigcap K_2)$ не може містити всю гіперкомплексну пряму γ, яка є чотиривимірним дійсним многовидом, тому $H^4(\gamma \bigcap (K_1 \bigcup K_2)) = 0$.

З точності когомологічної послідовності випливає, що $H^3(\gamma \bigcap K_1 \bigcap K_2) = 0$. Це еквівалентно тому, що перетин множини $K_1 \bigcap K_2$ довільною гіперкомплексною прямою не містить тривимірного коциклу. Звідси випливає $\mathbb{H}$-квазіопуклість компакта $K_1 \bigcap K_2$. Теорема доведена.

Лема 4. *Якщо всі співмножники E_j, $j = 1, \ldots, n$, ациклічні, то довільний перетин множини $E = E_1 \times \ldots \times E_n \subset \mathbb{H}^n$ не містить тривимірного коциклу.*

Доведення. Доведення проведемо для випадку, коли $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{H}^2$ та гіперкомплексна пряма γ проходить через початок координат. Цього завжди можна досягти заміною координат. Рівняння прямої має вигляд

$$\gamma = \left\{ x \mid x_1 = k_1 x_2,\ x_3 = \ldots = x_n = 0,\ k = -\frac{r_1}{r_2},\ r_i = |x_i|,\ i = 1, 2 \right\}.$$

Оскільки в прямій γ координати x_1, x_2 пов'язані між собою співвідношеннями $x_1 = kx_2$, а множини E_2 та kE_2, $k \neq 0$, гомеоморфні між собою, то перетин $\gamma \bigcap E$ збігається з $E_1 \bigcap kE_2$.

З точності когомологічної послідовності Майєра–В'єторіса [8]

$$H^3(E_1) \bigoplus H^3(kE_2) \to H^3(E_1 \bigcap kE_2) \to H^4(E_1 \bigcup kE_2),$$

оскільки $H^3(E_1) \bigoplus H^3(kE_2) = 0$ та $H^4(E_1 \bigcup kE_2) = 0$, отримуємо, що $H^3(E_1 \bigcap kE_2) = 0$. Лема доведена.

З леми 4 фактично випливає, що декартовий добуток $\mathbb{H}$-квазіопуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Означення 10. *Лінійним поліедром* називається множина виду $E = \{x \mid f_j(x) \in E_j,\ j \in J = \{1, 2, \ldots, N\}\}$, де $E_j \subset \mathbb{H}^1$, $f_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x_k$, причому довільні дві функції $f_k(x)$, $f_j(x)$, $k \neq j$, є лінійно незалежними, а кожна з функцій f_j відображає E в підмножину гіперкомплексної прямої E_j [3].

Оскільки довільний компактний лінійний поліедр можна зобразити у вигляді перетину не більше ніж n (n — скінченне число і позначає кількість граней поліедра) декартових добутків $\Gamma_i \times K_i$, $i = \overline{1, n}$, множини Γ_i, де Γ_i — грань поліедра, на кулю K_i досить великого радіуса в $(n-1)$-вимірній гіперкомплексній гіперплощині, яка ортогональна до грані Γ_i, то з теореми 4 отримуємо таке твердження.

Теорема 5. *Компактний лінійний поліедр, усі грані якого не містять тривимірних циклів, є $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.*

Наслідок 5. *Перетин сильно гіперкомплексно опуклих компактів буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.*

Зауваження 2. У роботі [5] доведено, що гіперкомплексно опукла область з гладкою межею буде $\mathbb{H}$-квазіопуклою множиною.

Теорема 6. *Кожен ациклічний у розмірності три гіперкомплексно опуклий компакт E буде $\mathbb{H}$-квазіопуклим.*

Доведення. Розглянемо перетин множини E гіперкомплексною прямою γ. Нехай перетин $\gamma \bigcap E$ містить негомологічний нулю тривимірний цикл Z. Візьмемо точку $x_0 \in \gamma \backslash \gamma \bigcap E$, зачеплену з циклом Z. Оскільки множина E гіперкомплексно опукла, то існує гіперкомплексна гіперплощина L, яка проходить через точку x_0 і не перетинає E. Тоді $(4n-4)$-вимірний цикл $K = L \bigcup \infty$ зачеплений з тривимірним циклом Z. Оскільки множина E однозв'язна, то цикл Z гомологічний нулю в E. Тоді існує ланцюг C в E, який обмежується циклом Z. За теоремою про зачеплення $C \bigcap K \neq \varnothing$, що суперечить тому, що множина $K \bigcap E$ порожня. Теорема доведена.

Цитована література

1. *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2012. – 280 с.
2. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. – Москва: Наука, 1973. – 144 с.
3. *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексно выпуклых множествах. – Киев: ИМ АН УССР, 1987. – 17 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 87.42).
4. *Мкртчян Г. А.* О гиперкомплексной выпуклости // V Тираспол. симп. по общей топологии. – Кишинев: Штиинца, 1985. – С. 177.
5. *Мкртчян Г. А.* О сильной гиперкомплексной выпуклости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 182–187.
6. *Зелинский Ю. Б., Мкртчян Г. А.* Об экстремальных точках и гиперкомплексно выпуклых областях // Докл. АН СССР. – 1990. – **311**, № 6. – С. 1299–1302.
7. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – Москва: Наука, 1985. – 336 с.
8. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – Москва: Мир, 1971. – 680 с.

References

1. *Zelinskii Yu. B.* Convexity. Selected chapters, Kiev: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2012 (in Russian).
2. *Kantor I. L., Solodovnikov A. S.* Hypercomplex numbers, Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).

3. *Mkrtchyan G. A.* On hypercomplex convex sets, Preprint, AS USSR, Institute of Mathematics, 87.42, Kiev, 1987 (in Russian).
4. *Mkrtchyan G. A.* On hypercomplex convexity, V Tiraspol. workshop on general topology, Kishinev: Shtiintsa, 1985 (in Russian).
5. *Mkrtchyan G. A.* Ukr. Mat. J., 1990, **42**, No 2: 182–187 (in Russian).
6. *Zelinskii Yu. B., Mkrtchyan G. A.* Dokl. AN SSSR, 1990, **311**, No 6: 1299–1302 (in Russian).
7. *Leyhtveys K.* Convex sets, Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
8. *Spener E.* Algebraic topology, Moscow: Mir, 1971 (in Russian).

Надійшло до редакції 22.09.2015

М. В. Стефанчук

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: stefanmv43@gmail.com

Экстремальные элементы в гиперкомплексном пространстве

Исследуются экстремальные элементы и h-оболочка множеств в n-мерном гиперкомплексном пространстве $\mathbb{H}^n$. Вводится класс $\mathbb{H}$-квазивыпуклых множеств, которые включают в себя сильно гиперкомплексно выпуклые множества и являются замкнутыми относительно пересечений.

Ключевые слова: гиперкомплексно выпуклое множество, сильно гиперкомплексно выпуклое множество, h-оболочка множества, h-экстремальная точка, h-экстремальный луч, $\mathbb{H}$-квазивыпуклое множество.

M. V. Stefanchuk

Institute of the Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: stefanmv43@gmail.com

Extremal elements in a hypercomplex space

Extremal elements and a h-hull of sets in the n-dimensional hypercomplex space $\mathbb{H}^n$ are investigated. The class of $\mathbb{H}$-quasiconvex sets including strongly hypercomplex convex sets and being closed with respect to intersections is introduced.

Keywords: hypercomplex convex set, strongly hypercomplex convex set, h-hull of a set, h-extremal point, h-extremal beam, $\mathbb{H}$-quasiconvex set.