doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.10.010
УДК 517.36

А.А. Мартынюк, академик НАН Украины

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Уклонение множества траекторий от состояния равновесия

Для семейства дифференциальных уравнений получены оценки уклонения множества траекторий от состояния равновесия. Эти оценки могут применяться при исследовании устойчивости движения аналогично тому, как это делается для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *семейство уравнений, уклонение траекторий, состояние равновесия.*

1. Постановка задачи. Пусть $K_c(R^n)$ — семейство всех непустых компактных и выпуклых подмножеств пространства R^n, $I \subset R_+$ — конечный интервал изменения t и $X(t)$ — множество состояний системы, определяемое формулой

$$X(t) = \{X : D_H X = F(t, X, \alpha), \quad X(t_0) = X_0, \quad X_0 \in K_c(R^n), \quad \alpha \in J\}.$$

Здесь $X(t) \in K_c(R^n)$ при всех $t \in I$, $F \in C(I \times K_c(R^n) \times J, K_c(R^n))$ — многозначное отображение, $D_H X$ — обобщенная производная множества состояний $X(t)$ системы в момент времени $t \in I$, $\alpha \in J$ — параметр неточности отображения F, J — компактное множество в пространстве R^d.

Рассмотрим семейство уравнений возмущенного движения

$$D_H X = F(t, X, \alpha), \quad X(t_0) = X_0 \in K_c(R^n), \tag{1}$$

и вычислим граничные отображения

$$F_m(t, \cdot) = \overline{\mathrm{co} \bigcap_{\alpha \in J}} F(t, \cdot, \alpha), \quad F_M(t, \cdot) = \overline{\mathrm{co} \bigcup_{\alpha \in J}} F(t, \cdot, \alpha).$$

Будем предполагать, что $F_m(t, \cdot)$ и $F_M(t, \cdot)$ существуют и принадлежат пространству $K_c(R^n)$.

Семейство уравнений

$$D_H W = F_\beta(t, W), \quad W(t_0) = W_0 \in K_c(R^n), \tag{2}$$

где

$$F_\beta(t, \cdot) = F_m(t, \cdot)\beta + F_M(t, \cdot)(1 - \beta), \quad \beta \in [0, 1],$$

будем называть регуляризованным семейством уравнений неточного семейства уравнений (1).

Семейство уравнений (2) представим в виде

$$D_H U = F_\beta(t,U) + G(t,U,\alpha) \tag{3}$$

где $G(t,U,\alpha) = F(t,U,\alpha) - F_\beta(t,U)$ при всех $\alpha \in J$. Далее будем предполагать, что $F_\beta \in C(I \times \times K_c(R^n), K_c(R^n))$ при всех $\beta \in [0,1]$ и $G \in C(I \times K_c(E) \times J, K_c(R^n))$, $I \subseteq [t_0, a]$, $G(t,0,\alpha) \neq 0$ при всех $t \geqslant t_0$. Кроме того, предположим, что $F_\beta(t,U) \neq \Theta_0$ при любом $U \neq \Theta_0$ и $F_\beta(t,\Theta_0) = = \Theta_0$ при всех $t \in I$.

Представляет интерес задача об оценке отклонений множества траекторий семейства уравнений (1) от состояния равновесия $\Theta_0 \in K_c(R^n)$.

2. Обобщенная оценка Гронуолла—Беллмана. Введем следующие предположения. Пусть $F_\beta(t,U)$ и $G(t,U,\alpha)$ такие, что существуют непрерывные функции $f(t)$ и $m(t)$ при всех $t \in I$, для которых:

H$_1$. $D[F_\beta(t,U),\Theta_0] \leqslant f(t)D[U,\Theta_0]$ при всех $\beta \in [0,1]$;

H$_2$. $D[G(t,U,\alpha),\Theta_0] \leqslant m(t)D^n[U,\Theta_0]$;

H$_3$. $\Phi(t_0,t) = 1-(n-1)D^{n-1}[U_0,\Theta_0]\int\limits_{t_0}^{t} m(s)\exp\left[(n-1)\int\limits_{t_0}^{s} f(\tau)d\tau\right]ds > 0$ при всех $\alpha \in J$, где $n > 1$.

Имеет место утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что для семейства уравнений* (3) *выполняются предположения* H$_1$ — H$_3$ *при всех* $(t,s) \in [t_0, a]$. *Тогда отклонение множества траекторий* $U(t)$ *семейства уравнений* (3) *от состояния равновесия оценивается неравенством*

$$D[U(t),\Theta_0] \leqslant \frac{D[U_0,\Theta_0]\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds\right)}{\left(1-(n-1)D^{n-1}[U_0,\Theta_0]\int\limits_{t_0}^{t} m(s)\exp\left[(n-1)\int\limits_{t_0}^{s} f(\tau)d\tau\right]ds\right)^{\frac{1}{n-1}}} \tag{4}$$

при всех $t \in [t_0, a]$, $\beta \in [0,1]$ *и* $\alpha \in J$.

Доказательство. Семейство уравнений (3) представим в эквивалентном виде

$$U(t) = U(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} F_\beta(s,U(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} G(s,U(s),\alpha)ds. \tag{5}$$

Пусть $z(t) = D[U(t),\Theta_0]$. Тогда $z(t_0) = D[U_0,\Theta_0]$ и в силу свойств метрики Хаусдорфа D получаем

$$\begin{aligned} D[U(t),\Theta_0] &\leqslant D[U_0,\Theta_0] + D[(\int\limits_{t_0}^{t} F_\beta(s,U(s))\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} G(s,U(s),\alpha)ds),\Theta_0] \leqslant \\ &\leqslant D[U_0,\Theta_0] + \int\limits_{t_0}^{t} D[F_\beta(s,U(s))ds,\Theta_0] + \int\limits_{t_0}^{t} D[G(s,U(s),\alpha)ds,\Theta_0]. \end{aligned} \tag{6}$$

Из неравенства (4), учитывая предположения H_1, H_2, получаем оценку

$$D[U(t),\Theta_0]\leqslant D[U_0,\Theta_0]+\int\limits_{t_0}^{t}(f(s)D[U(s),\Theta_0]+m(s)D^n[U(s),\Theta_0])\,ds$$

или

$$z(t)\leqslant z(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}(f(s)z(s)+m(s)z^n(s))\,ds \tag{7}$$

при всех $t\in[t_0,a]$.

Далее, неравенство (7) перепишем в виде

$$z(t)\leqslant z(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}(f(s)+m(s)z^{n-1}(s)z(s))\,ds\,.$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла—Беллмана [2], получаем оценку

$$z(t)\leqslant z(t_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}(f(s)+m(s)z^{n-1}(s))\,ds\right). \tag{8}$$

Из (8) следует, что

$$z^{n-1}(t)\leqslant z^{n-1}(t_0)\exp\left(((n-1)\int\limits_{t_0}^{t}(f(s)+m(s)z^{n-1}(s))\,ds\right). \tag{9}$$

Умножая обе части этого неравенства на отрицательное выражение

$$-(n-1)m(t)\exp\left(-(n-1)\int\limits_{t_0}^{t}m(s)z^{n-1}(s)\,ds\right),$$

получаем

$$-(n-1)m(t)z^{n-1}(t)\exp\left(-(n-1)\int\limits_{t_0}^{t}m(s)z^{n-1}(s)\,ds\right)\geqslant$$

$$\geqslant-(n-1)z^{n-1}(t_0)m(t)\exp\left((n-1)\int\limits_{t_0}^{t}f(s)\,ds\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-(n-1)\int\limits_{t_0}^{t}m(s)z^{n-1}(s)\,ds\right)\right)\geqslant-(n-1)z^{n-1}(t_0)m(t)\exp\left((n-1)\int\limits_{t_0}^{t}f(s)\,ds\right). \tag{10}$$

Интегрируя неравенство (10) от t_0 до t, получаем

$$\exp\left(-(n-1)\int_{t_0}^{t} m(s) z^{n-1}(s)\,ds\right) \geqslant$$

$$\geqslant 1-(n-1) z^{n-1}(t_0)\int_{t_0}^{t} m(s)\exp\left((n-1)\int_{t_0}^{s} f(\tau)\,d\tau\right) ds. \tag{11}$$

При выполнении условия H_3 из неравенства (11) следует оценка

$$\exp\left((n-1)\int_{t_0}^{t} m(s) z^{n-1}(s)\,ds\right) \leqslant \Phi^{-1}(t, t_0) \text{ при всех } t \in [t_0, a].$$

Учитывая оценку (9), из (10) находим

$$z^{n-1}(t) \leqslant \frac{z^{n-1}(t_0)\exp\left((n-1)\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right)}{1-(n-1) z^{n-1}(t_0)\int_{t_0}^{t} m(s)\exp\left((n-1)\int_{t_0}^{s} f(\tau)\,d\tau\right) ds}. \tag{12}$$

С учетом обозначения $z(t) = D[U(t), \Theta_0]$ из (12) и (8) следует оценка (4). Теорема 1 доказана.

Далее для семейств систем (2) и (3) введем такие предположения:

H_4. Существуют непрерывные на I функции $m_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n > 1$, такие, что $D[F_\beta(t, U), \Theta_0] \leqslant m_1(t) D[U, \Theta_0]$ при всех $\beta \in [0, 1]$ и $t \in [t_0, a]$;

H_5. $D[G(t, U, \alpha), \Theta_0] \leqslant \sum_{i=2}^{n} m_i(t) D^i[U, \Theta_0]$ при всех $\alpha \in J$, $t \in [t_0, a]$ и $i = 2, \ldots, n$;

H_6. При любых $(t, s) \in [t_0, a]$

$$1-(n-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{n} D^{i-1}[U_0, \Theta_0] m_i(s)\exp\left(\int_{t_0}^{t}(n-1) m_1(\tau)\,d\tau\right) ds > 0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что для семейства уравнений* (3) *выполняются условия предположений* $H_4 - H_6$. *Тогда отклонение множества траекторий* $U(t)$ *семейства уравнений* (3) *от состояния* $\Theta_0 \in K_c(R^n)$ *оценивается неравенством*

$$D[U(t), \Theta_0] \leqslant \frac{D[U_0, \Theta_0]\exp\left(\int_{t_0}^{t} m_1(s)\,ds\right)}{\left(1-(n-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{n} D^{i-1}[U_0, \Theta_0] m_i(s)\exp\left(\int_{t_0}^{s}(n-1) m_1(\tau)\,d\tau\right) ds\right)^{\frac{1}{n-1}}}$$

при всех $t \in [t_0, a]$, $\beta \in [0,1]$, $\alpha \in J$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

3. Уклонение траекторий в существенно нелинейных системах. Далее введем следующее предположение.

Существуют интегрируемые неотрицательные функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ и постоянные $p > 1$ и $q \geqslant 1$ такие, что

$$\text{H}_7.\ D[F_\beta(t,U), \Theta_0] \leqslant h_1(t) D^p[U, \Theta_0], \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} h_1(s)\,ds > 0;$$

$$D[G(t,U,\alpha), \Theta_0] \leqslant h_2(t) D^q[U, \Theta_0], \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} h_2(s)\,ds > 0,$$

при любых $(t_k < t_{k+1}) \in R_+$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и при всех $\alpha \in J$.

При условии H_7 из соотношения (5) получим неравенство

$$D[U(t), \Theta_0] \leqslant D[U_0, \Theta_0] + \int_{t_0}^{t} (h_1(s) D^p[U(s), \Theta_0] + h_2(s) D^q[U(s), \Theta_0])\,ds$$

при всех $t \in [t_0, a]$.

Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что для системы* (3) *выполняются условия предположения* H_7 *и*

$$1 - (p+q-2)\left(D^{p-1}[U_0, \Theta_0] \int_{t_0}^{t} h_1(s)\,ds + D^{q-1}[U_0, \Theta_0] \int_{t_0}^{t} h_2(s)\,ds \right) > 0 \tag{13}$$

при всех $t \in [t_0, a]$. *Тогда уклонение множества траекторий семейства уравнений* (3) *от состояния равновесия оценивается неравенством*

$$D[U(t), \Theta_0] \leqslant \frac{D[U_0, \Theta_0]}{\left[1 - (p+q-2)\left(D^{p-1}[U_0, \Theta_0] \int_{t_0}^{t} h_1(s)\,ds + D^{q-1}[U_0, \Theta_0] \int_{t_0}^{t} h_2(s)\,ds \right) \right]^{\frac{1}{p+q-2}}} \tag{14}$$

при всех $t \in [t_0, a]$.

Доказательство. При выполнении условий предположения H_7 из соотношения (5) получаем неравенство

$$D[U(t), \Theta_0] \leqslant D[U_0, \Theta_0] + \int_{t_0}^{t} (h_1(s) D^{p-1}[U(s), \Theta_0] + h_2(s) D^{q-1}[U(s), \Theta_0])\, D[U(s), \Theta_0]\,ds.$$

Применяя к этому неравенству лемму Гроноулла—Беллмана [2], получаем неравенство

$$D[U(t), \Theta_0] \leqslant D[U_0, \Theta_0] \exp\left[\int_{t_0}^{t} (h_1(s) D^{p-1}[U(s), \Theta_0] + h_2(s) D^{q-1}[U(s), \Theta_0])\,ds \right] \tag{15}$$

при всех $t \in [t_0, a]$. На основе оценки (15) получаем следующие неравенства:

$$\begin{gathered}
D^{p-1}[U(t),\Theta_0] \leqslant D^{p-1}[U_0,\Theta_0] \times \\
\times \exp\left[(p-1)\int_{t_0}^{t} (h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0] + h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds \right], \\
D^{q-1}[U(t),\Theta_0] \leqslant D^{q-1}[U_0,\Theta_0] \times \\
\times \exp\left[(q-1)\int_{t_0}^{t} (h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0] + h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds \right].
\end{gathered} \tag{16}$$

Пусть $p > 1$ и $q > 1$. Тогда оценки (16) можно представить так:

$$\begin{gathered}
D^{p-1}[U(t),\Theta_0] \leqslant D^{p-1}[U_0,\Theta_0] \times \\
\times \exp\left[(p+q-2)\int_{t_0}^{t} (h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0] + h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds \right], \\
D^{q-1}[U(t),\Theta_0] \leqslant D^{q-1}[U_0,\Theta_0] \times \\
\times \exp\left[(p+q-2)\int_{t_0}^{t} (h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0] + h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds \right].
\end{gathered} \tag{17}$$

Умножив первое неравенство из системы (17) на $-(p+q-2)h_1(t)$, а второе — на $-(p+q-2)\times$ $\times\, h_2(t)$, получим

$$-D^{p-1}[U(t),\Theta_0]h_1(t)(p+q-2)\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t} (h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0] + \right.$$

$$\left. + h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds \right] \geqslant -D^{p-1}[U_0,\Theta_0](p+q-2)h_1(t),$$

$$-D^{q-1}[U(t),\Theta_0]h_2(t)(p+q-2)\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t} (h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0] + \right.$$

$$\left. + h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds \right] \geqslant -D^{q-1}[U_0,\Theta_0](p+q-2)h_2(t).$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t} (h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0] + h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds \right] \geqslant \\
\geqslant -D^{p-1}[U_0,\Theta_0](p+q-2)h_1(t) - D^{q-1}[U_0,\Theta_0](p+q-2)h_2(t).
\end{gathered} \tag{18}$$

Интегрируя неравенство (18) от t_0 до t, получаем оценку

$$\exp\left[-(p+q-2)\int_{t_0}^{t}(h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0]+h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds\right]\geqslant$$

$$\geqslant 1-D^{p-1}[U_0,\Theta_0](p+q-2)\int_{t_0}^{t}h_1(s)\,ds-D^{q-1}[U_0,\Theta_0](p+q-2)\int_{t_0}^{t}h_2(s)\,ds.$$

Учитывая условие (13), получаем

$$\exp\left[(p+q-2)\int_{t_0}^{t}(h_1(s)D^{p-1}[U(s),\Theta_0]+h_2(s)D^{q-1}[U(s),\Theta_0])\,ds\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-(p+q-2)\left(D^{p-1}[U_0,\Theta_0]\int_{t_0}^{t}h_1(s)\,ds+D^{q-1}[U_0,\Theta_0]\int_{t_0}^{t}h_2(s)\,ds\right)}.$$

Далее, учитывая оценку (15), находим

$$(D[U(t),\Theta_0])^{p+q-2}(D[U_0,\Theta_0])^{-(p+q-2)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-(p+q-2)\left(D^{p-1}[U_0,\Theta_0]\int_{t_0}^{t}h_1(s)\,ds+D^{q-1}[U_0,\Theta_0]\int_{t_0}^{t}h_2(s)\,ds\right)}.$$

Отсюда следует оценка (14). Теорема 3 доказана.

4. Заключительные замечания. Оценки уклонения множества траекторий от состояния равновесия, приведенные в теоремах 1—3, получены на основе нелинейного аналога леммы Гронуолла—Беллмана (см. [3, 8] и библиографию там). Эти оценки могут применяться при исследовании устойчивости движения аналогично тому, как это делается для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1, 5, 6]). Предложенный в данной работе подход к анализу множества траекторий семейства уравнений (1) дополняет подходы, изложенные в монографиях [4, 7] и др.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Babenko E.A., Martynyuk A.A. On stabilization of motion of affine systems. *Int. Appl. Mech.*, 2016. **52**, № 4. P. 100—108.
2. Bellman R. Stability Theory of Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1953. 167 p.
3. Lovartassi Y., El Mazoudi El.H., Elalami N. A new generalization of lemma Gronwall–Bellman. *Appl. Math. Sci.* 2012. **6**, № 13. P. 621—628.
4. Lakshmikantham V., Leela S., Devi V. Theory of Set Differential Equations in Metric Space. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2005. 250 p.

5. Martynyuk A.A. Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations. *Applied Math*., 2015. **6**, P. 182—194.
6. Martynyuk A.A., Babenko E.A. Finite time stability of uncertain affine systems. *Math. Eng. Sci. Aerospace*. 2016. **7**, № 1. P. 179—196.
7. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu.A. Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. Boca Raton: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2012. 296 p.
8. N'Doye I. Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires: PhD These/Nancy-Universite, 2011. 204 p.

Надійшло до редакції 11.05.2017

REFERENCES

1. Babenko, E. A. & Martynyuk, A. A. (2016). On stabilization of motion of affine systems. Int. Appl. Mech., 52, No. 4, pp. 100—108.
2. Bellman, R. (1953). Stability Theory of Differential Equations. New York: McGraw-Hill Book Company.
3. Lovartassi, Y., El Mazoudi, El. H. & Elalami, N. (2012). A new generalization of lemma Gronwall–Bellman. Appl. Math. Sci. 6, No. 13, pp. 621—628.
4. Lakshmikantham, V., Leela, S. & Devi, V. (2005). Theory of Set Differential Equations in Metric Space. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
5. Martynyuk, A. A. (2015). Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations. Applied Math., 6, pp. 182—194.
6. Martynyuk, A. A., Babenko, E. A. (2016). Finite time stability of uncertain affine systems. Math. Eng. Sci. Aerospace, 7, No. 1, pp. 179—196.
7. Martynyuk, A. A. & Martynyuk-Chernienko, Yu. A. (2012). Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. Boca Raton: CRC Press, Taylor and Francis Group.
8. N'Doye, I. (2011). Generalisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systemes fractionnaires. (PhD These). Nancy-Universite.

Received 11.05.2017

А.А. Мартинюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ВІДХИЛЕННЯ МНОЖИНИ ТРАЄКТОРІЙ
ВІД СТАНУ РІВНОВАГИ

Для сім'ї диференціальних рівнянь отримані оцінки відхилення множини траєкторій від стану рівноваги. Такі оцінки можна застосовувати у дослідженні стійкості руху аналогічно тому, як це робиться для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *сім'я рівнянь, відхилення траєкторій, стан рівноваги.*

A.A. Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

DEVIATION OF A SET OF TRAJECTORIES
FROM THE STATE OF EQUILIBRIUM

Estimates of the deviation of a set of trajectories from an equilibrium state are obtained for a family of differential equations. These estimates can be applied to the study of the stability of motion like the case of systems of ordinary differential equatians.

Keywords: *set of equations, deviation of trajectories, state of equilibrium.*