doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.12.008
УДК 517.927

В.А. Михайлец [1], О.Б. Пелехата [2], Н.В. Рева [2]
[1] Институт математики НАН Украины, Киев
[2] НТУ Украины “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, o.pelehata-2017@kpi.ua, reva_nadiia@ukr.net

О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Н. Кочубеем

В работе исследуется предельное поведение решений неоднородных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном интервале. Получено обобщение теоремы И.Т. Кигурадзе (1987) о предельном переходе.

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений, линейная краевая задача, предельный переход.*

Вопросы предельного перехода в системах дифференциальных уравнений встречаются во многих задачах теоретического и прикладного характера. Наиболее полно они исследованы применительно к решениям задачи Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка [1—5]. Более сложный случай линейных краевых задач изучался в работах И.Т. Кигурадзе [6, 7] и его последователей [8—10].

Рассмотрим на конечном интервале (a, b) систему $m \in \mathbb{N}$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \qquad (1)$$

с общими неоднородными краевыми условиями

$$By = c\,, \qquad (2)$$

где линейный непрерывный оператор

$$B : C([a, b]; \quad \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m$$

Предполагается, что матрица-функция $A(\cdot) \in L([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$ вектор-функция $f(\cdot) \in L([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$ а вектор $c \in \mathbb{C}^m$.

Под решением системы дифференциальных уравнений (1) понимается абсолютно непрерывная на отрезке [a, b] вектор-функция $y(\cdot)$, которая удовлетворяет равенству (1) почти всюду. Неоднородное краевое условие (2) корректно определено на решениях системы дифференциальных уравнений (1) и охватывает все классические виды краевых условий. Как известно (см., например, [6]), краевая задача (1)—(2) является фредгольмовой. Поэтому для однозначной всюду разрешимости этой задачи необходимо и достаточно чтобы однородная краевая задача имела только тривиальное решение.

Пусть теперь наряду с задачей (1)—(2) задана последовательность неоднородных краевых задач

$$y_n'(t)+A_n(t)y_n(t)=f_n(t) \tag{3}$$

с краевыми условиями вида

$$B_n y_n = c_n, \tag{4}$$

где матрицы-функции $A_n(\cdot)$, операторы B_n, вектор-функции $f_n(\cdot)$ и векторы c_n удовлетворяют приведенным выше для задачи (1)—(2) условиям. Пусть решения $y(\cdot)$ задачи (1)—(2) и решения $y_n(\cdot)$ задач (3)—(4) существуют и однозначно определены. Тогда представляет интерес вопрос о том, когда $n\to\infty$

$$\| y(\cdot)-y_n(\cdot)\|_\infty \to 0\,, \tag{5}$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — sup-норма на отрезке $[a,b]$.

По-видимому, впервые этот вопрос был поставлен и исследован И.Т. Кигурадзе [7]. При этом предполагалось, что все функции в задаче являются вещественными.

Введем некоторые обозначения, необходимые для формулировок утверждений в удобной для нас форме. Положим

$$R_{A_n}(\cdot) := A_n(\cdot)-A(\cdot)\in L([a,b];\quad \mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$F(\cdot):=\begin{pmatrix} f_1(\cdot) & 0 & \cdots & 0\\ f_2(\cdot) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_m(\cdot) & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in L([a,b];\quad \mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$F_n(\cdot):=\begin{pmatrix} f_{1n}(\cdot) & 0 & \cdots & 0\\ f_{2n}(\cdot) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{mn}(\cdot) & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in L([a,b];\quad \mathbb{C}^{m\times m}),$$

$$R_{F_n}(\cdot)=F_n(\cdot)-F(\cdot)\,,$$

$$R_{F_n}^{\vee}(t):=\int_a^b R_{F_n}(s)ds\,,$$

$$R_{A_n}^{\vee}(t):=\int_a^b R_{A_n}(s)ds\,.$$

Теорема Кигурадзе. *Пусть выполнены условия:*

(0) *Однородная краевая задача (1)—(2) имеет только тривиальное решение*

(I) $\| R^{\vee}_{A_n}(\cdot) \|_{\infty}, \quad n \to \infty$,

(II) $\| A_n(\cdot) \|_1 = O(1), \quad n \to \infty$,

(III) $B_n y \to By, \quad y \in C([a,b]; \quad \mathbb{C}^m), \quad n \to \infty$.

Тогда для достаточно больших n задача (3)—(4) *однозначно разрешима. Если, кроме того, выполнены условия на правые части задач*

(IV) $c_n \to c, \quad n \to \infty$,

(V) $\| R^{\vee}_{F_n}(\cdot) \|_{\infty} \to 0, \quad n \to \infty$,

то единственные решения задач (3)—(4) удовлетворяют предельному равенству (5).

Здесь и всюду дальше $\| \cdot \|_1$ —норма в пространстве Лебега L_1 на отрезке [a, b]. Примеры показывают, что в теореме Кигурадзе все условия существенные и не одно из них нельзя отбросить. Однако, как выяснилось, некоторые из них можно значительно ослабить.

Обозначим через $\mathcal{M}^m := \mathcal{M}(a,b,m), \quad m \in \mathbb{N}$ класс последовательностей матриц-функций $R_A(\cdot) : \mathbb{C} \to L([a,b]; \quad \mathbb{C}^{m \times m})$, для которых решение $Z_n(\cdot)$ задачи Коши

$$Z_n' + R_n(\cdot) Z_n(\cdot) = 0, \quad Z_n(a) = I_m$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\| Z_n(\cdot) - I_m \|_{\infty} \to 0, \quad n \to \infty,$$

где I_m — единичная $(m \times m)$-матрица.

Положим теперь

$$A_{F_n}(\cdot) := \begin{pmatrix} A_n(\cdot) & F_n(\cdot) \\ O_m & O_m \end{pmatrix} \in L([a,b]; \quad \mathbb{C}^{2m \times 2m}),$$

$$R_{A_n F_n}(\cdot) := A_{F_n}(\cdot) - A_F(\cdot) \in L([a,b]; \quad \mathbb{C}^{2m \times 2m}),$$

где O_m— нулевая $(m \times m)$-матрица.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условия (I), (II) на одно более общее условие*

$$R_{A_n}(\cdot) \in \mathcal{M}^m \tag{6}$$

а условие (*V*) *заменить на*

$$R_{A_n F_n}(\cdot) \in \mathcal{M}^{2m}, \tag{7}$$

Условия (6), (7) не являются конструктивными, поскольку отсутствуют описания классов $\mathcal{M}^m$ и $\mathcal{M}^{2m}$. Однако из результатов работ [3—5, 8] вытекают удобные для применений достаточные условия принадлежности последовательности матриц-функций к этому классу. Поэтому из теоремы 1 вытекает ряд утверждений, которые обобщают или дополняют теорему Кигурадзе и выражаются в явном виде.

Теорема 2. *В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условие* (II) *на более общее условие*

(II) $\| R_{A_n}(\cdot) R^{\vee}_{A_n} \|_1 \to 0, \quad n \to \infty$,

и добавить условие

(VI)* $\| R_{A_n}(\cdot) R^{\vee}_{F_n} \|_1 \to 0, \quad n \to \infty$.

Преимущества теоремы 2 перед теоремой Кигурадзе становятся более заметными, если рассмотреть их приложения к системам линейных дифференциальных уравнений порядка $r \geqslant 2$ вида

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t) y^{(r-1)}(t) + \ldots + A_0(t) y(t) = f(t) \tag{8}$$

с общими неоднородными краевыми условиями вида

$$B_j y = c_j, \quad j \in \{1, 2, \ldots, r\} =: [r]. \tag{9}$$

Каждую из этих задач очевидным образом можно свести к общей неоднородной краевой задаче для системы уравнений первого порядка. Применительно к этим задачам теорема Кигурадзе приобретает следующий вид.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (0) *и при* $j \in [r], \quad n \to \infty$

(I′) $\| R^{\vee}_{A_{j-1,n}}(\cdot) \|_\infty, \quad n \to \infty$,

(II′) $\| R^{\vee}_{A_{j-1,n}}(\cdot) \|_1 = 0(1), \quad n \to \infty$,

(III′) $B_{jn} y \to B_j y, \quad y \in C^{(r-1)}([a, b]; \ \mathbb{C}^m), \quad n \to \infty$.

Тогда для достаточно больших n *задача* (10)—(11) *однозначно всюду разрешима. Если, кроме того,*

(IV′) $c_{jn} \to c_j, \quad j \in [r], \quad n \to \infty$,

(V′) $\| R^{\vee}_{F_n}(\cdot) \|_\infty \to 0, \quad n \to \infty$.

то единственные решения краевой задачи (10)—(11) *удовлетворяют соотношениям*

$$\| y^{(j-1)}(\cdot) - y_n^{(j-1)}(\cdot) \|_\infty \to 0, \quad j \in [r], \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Из теоремы 2 в этом случае вытекает, что справедлива

Теорема 4. *В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условие (II′) на*

*(II**)* $\| R_{A_{r-1,n}}(\cdot) R^{\vee}_{A_{j-1,n}}(\cdot) \|_1 \to 0, \quad n \to \infty, \quad j \in [r]$,

Если добавить условие

*(VI**)* $\| R_{A_{r-1,n}}(\cdot) R^{\vee}_{F_n}(\cdot) \|_1 \to 0, \quad n \to \infty$,

которое заведомо выполнено, коль выполнены условия (II′) и (V′).

Отметим, что условия (II^{**}) и (VI^{**}) заведомо выполены если $\| R_{A_{r-1,n}}(\cdot) \|_1 = 0(1)$. При этом нет никаких ограничений на последовательность $\{\| R_{A_{r-1,n}}(\cdot) \|_1 : n \geqslant 1\}$ при $j \in [r-1]$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Reid W. T. Some limit theorems for ordinary differential systems. *J. Diff. Equat.* 1967. **3**, № 3. P. 423—439.
2. Opial Z. Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations. *J. Diff. Equat.* 1967. **3**. P. 571—579.

3. Левин А.Ю. Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$. *Докл. АН СССР*. 1967. **176**, № 4. С. 774—777.
4. Левин А.Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I. Вестн. Ярослав. ун-та. 1973. Вып. 5. С. 105—132.
5. Нгуен Тхе Хоан. О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений. *Диф. уравнения*. 1993. **29**, № 6. С. 970—975.
6. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. 352 с.
7. Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнени. Новейшие достижения. ВИНИТИ. 1987. **30**. С. 3—103.
8. Kodliuk T.I., Mikhailets V.A., Reva N.V. Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. *Ukr. Math. J*. 2013. **65**. № 1. P. 77—90. doi: https://doi.org/10.1007/s11253-013-0766-x
9. Gnyp E.V., Kodliuk T.I., Mikhailets V.A. Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. *Ukr. Math. J*. 2015. **67**, № 5 P. 658—667. doi: https://doi.org/10.1007/s11253-015-1105-1
10. Mikhailets V.A., Murach A.A., Soldatov V.A. Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat*. 2016. № 87. P. 1—16.

Поступило в редакцию 01.08.2017

REFERENCES

1. Reid, W. T. (1967). Some limit theorems for ordinary differential systems. J. Diff. Equat. 3, No. 3, pp. 423-439. doi: https://doi.org/10.1016/0022-0396(67)90042-3
2. Opial, Z. (1967). Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations. J. Diff. Equat. 3, pp. 571-579. doi: https://doi.org/10.1016/0022-0396(67)90017-4
3. Levin, A. Yu. (1967). Passage to the limit for nonsingular systems $\dot{X} = A_n(t)X$. Sov. Math. Dokl. 176, No. 4, pp. 774-777.
4. Levin, A. Yu. (1973). Problems of the theory of ordinary differential equations. I. Vestn. Yaroslav. Univ. Iss. 5, pp. 105-132 (Russian).
5. Nguyen, Tkhe Hoan. (1993). Dependence of the solutions of a linear system of differential equations on a parameter. Differential Equations. 29, No. 6, pp. 830-835.
6. Kiguradze, I. T. (1975). Some singular boundary value problems for ordinary differential equations. Tbilisi: Izdat. Tbilis. Univ. (Russian).
7. Kiguradze, I. T. (1988). Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. J. Soviet Math. 43, No. 2, pp. 2259-2339.
8. Kodliuk, T. I., Mikhailets, V. A. & Reva, N. V. (2013). Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. Ukr. Math. J. 65, No. 1, pp. 77-90. doi: https://doi.org/10.1007/s11253-013-0766-x
9. Gnyp, E. V., Kodliuk, T. I. & Mikhailets, V. A. (2015). Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. Ukr. Math. J. 67, No. 5, pp. 658-667. doi: https://doi.org/10.1007/s11253-015-1105-1
10. Mikhailets, V. A., Murach, A. A. & Soldatov, V. A. (2016). Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. No. 87, pp. 1-16. doi: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.87

Received 01.08.2017

В.А. Михайлець[1], *О.Б. Пелехата*[2], *Н.В. Рева*[2]

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, o.pelehata-2017@kpi.ua, reva_nadiia@ukr.net

ПРО ТЕОРЕМУ КІГУРАДЗЕ
ДЛЯ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

В роботі досліджується гранична поведінка розв'язків неоднорідних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Отримано узагальнення теореми І.Т. Кігурадзе (1987) про граничний перехід.

Ключові слова: *система звичайних диференціальних рівнянь, лінійна крайова задача, граничний перехід.*

V.A. Mikhailets[1], *O.B. Pelekhata*[2], *N.V. Reva*[2]

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2] NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, o.pelehata-2017@kpi.ua, reva_nadiia@ukr.net

ON THE KIGURADZE THEOREM
FOR LINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

We investigate the limiting behavior of solutions of inhomogeneous boundary-value problems for the systems of linear ordinary differential equations on a finite interval. A generalization of the Kiguradze theorem (1987) on the passage to the limit is obtained.

Keywords: *system of ordinary differential equations, linear boundary-value problem, passage to the limit.*