ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.12.014
УДК 539.3

В.Г. Карнаухов[1], **В.И. Козлов**[1], **Т.В. Карнаухова**[2]
[1] Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
[2] НТУ Украины “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”
E-mail: karn@inmech.kiev.ua

Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев жестко защемленных вязкоупругих пластин с актуаторами при учете геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига

Представлено академиком НАН Украины В.Д. Кубенко

Представлена модель вынужденных резонансных колебаний и диссипативного разогрева прямоугольных жестко защемленных вязкоупругих пластин с пьезоактуаторами с учетом геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига. Методом Бубнова—Галеркина получено приближенное аналитическое решение этой задачи. Дан анализ влияния геометрической нелинейности, сдвиговых деформаций и температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования колебаний пластины при помощи пьезоактуаторов.

Ключевые слова: *резонасные колебания, геометрическая нелинейность, деформации сдвига, пьезоактуатор, разогрев, активное демпфирование.*

В последние годы для демпфирования колебаний тонкостенных элементов эффективно используются активные методы, базирующиеся на включении пьезоактивных компонент в структуру пассивного тонкостенного элемента из металлического, полимерного или композитного материала. В большинстве случаев в качестве активных элементов выступают пьезоэлектрические компоненты. Одним из основных методов активного демпфирования колебаний пластин и оболочек является метод, основанный на использовании пьезоактуаторов, к которым подводится разность потенциалов, компенсирующая действие механической нагрузки, в результате чего амплитуда колебаний существенно уменьшается. Главной задачей при этом является расчет указанной разности потенциалов, размеров актуатора, его размещения и др. Особенно заметное влияние на эффективность работы актуаторов оказывает температура, в том числе и температура диссипативного разогрева (ТДР), возникающая в результате гистерезисных потерь в материале. По достижении ТДР точки Кюри пьезоматериала актуатор перестает выполнять свое функциональное назначение из-за потери активным материалом пьезоэффекта. Для анизотропных материалов и высоких уровней гармонического нагружения, а также для недостаточно тонких пластин необходимо учитывать деформации сдвига и геометрическую нелинейность.

В данной работе представлена постановка задачи о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругих прямоугольных пластин с актуаторами при учете геометрической нелинейности и деформаций сдвига. Методом Бубнова—Галеркига получено приближенное аналитическое решение для случая жестко защемленных торцов пластины. Определена диссипативная функция. Получено аналитическое решение уравнения энергии. Дан анализ влияние геометрической нелинейности, деформаций сдвига и ТДР на эффективность работы актуаторов.

Постановка задачи. Постановка задачи о колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой вязкоупругой пластины с сенсорами при учете геометрической нелинейности и деформаций сдвига приведена в [1], где представлены уравнения движения через перемещения и углы поворота. Для пластин с актуаторами они имеют вид

$$L_1(u,v,w)=0;\quad L_2(u,v,w)=0;\quad L_3(u,v,w,\varphi_x,\varphi_y)+q_0=I_0\ddot{w};$$
$$L_4(u,v,w,\varphi_x,\varphi_y)-\left(\frac{\partial M_0}{\partial x}\right)=0;\quad L_5(u,v,w,\varphi_x,\varphi_y)-\left(\frac{\partial M_0}{\partial y}\right)=0. \qquad (1)$$

Выражения для операторов $L_i(i=1-5)$ даны в [1]. В них следует все упругие характеристики согласно принципу соответствия заменить на интегральные операторы Вольтера с использованием алгебры операторов [2].

Аналитическое решение задачи. Операторы L_4, L_5 являются линейными относительно φ_x, φ_y, w. Рассмотрим резонансные колебания пластины в окрестности некоторой (например, первой) резонансной частоты колебаний прямоугольной пластины с размерами $a \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$. Представим поперечный прогиб пластины в виде:

$$w=W_{mn}(1-\cos 2k_m x)(1-\cos 2p_n y)\,. \qquad (2)$$

Это выражение удовлетворяет условиям жесткого защемления для прогиба

$$w=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \text{ при } x=0,a \text{ и } w=\frac{\partial w}{\partial y}=0 \text{ при } y=0,b\,.$$

Подставляя выражение (2) в операторы L_4, L_5, решим полученные уравнения относительно φ_x, φ_y После громоздких выкладок получим

$$\varphi_x=\varphi_{11}\sin 2k_m x+\varphi_{13}\sin 2k_m x\cos 2p_n y,\ \ \varphi_y=\varphi_{22}\sin 2p_n y+\varphi_{24}\cos 2k_m x\sin 2p_n y\,. \qquad (3)$$

Формулы для $\varphi_{11}, \varphi_{13}, \varphi_{22}, \varphi_{24}$ не приводим из-за их громоздкости.

Выражения (3) удовлетворяют граничным условиям $\varphi_x=0,\ \ \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x}=0$ при $x=0,a$;

$$\varphi_y=0,\ \ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}=0 \text{ при } y=0,b\,.$$

Подставляя выражение (3) в представленные в [1] операторы L_1, L_2, приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно u и v:

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2k^3A_{11}\sin 4kx(3-4\cos 2py+\cos 4py)W^2,$$
$$A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A_{66}(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})=-2p^3A_{22}\sin 4py(3-4\cos 2kx+os4kx)W^2. \tag{4}$$

Решение этой системы, удовлетворяющее граничным условиям $u=0,\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=0$ при $x=0,a$ $v=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=0$ при $y=0,b$ имеет вид

$$u=(u_{11}\sin 2kx+u_{12}\sin 4kx+u_{13}\sin 2kx\cos 2py+u_{14}\sin 2kx\cos 4py+$$
$$+u_{15}\sin 4kx\cos 2py+u_{16}\sin 4kx\cos 4py)W^2,$$
$$v=(v_{11}\sin 2py+v_{12}\sin 4py+v_{13}\sin 2py\cos 2kx+v_{14}\sin 2py\cos 4kx+$$
$$+v_{15}\sin 4py\cos 2kx+v_{16}\sin 4py\cos 4kx)W^2. \tag{5}$$

Выражения для u_{ij}, v_{ij} не приводим из-за их громоздкости.

Для вывода уравнения относительно w используем третье уравнение системы (1)

$$K_SA_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right)+K_SA_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)+\left\{A_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+A_{12}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left\{A_{22}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+A_{12}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$
$$+2\left\{A_{66}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+q=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Для определения разности потенциалов, которую необходимо подвести к электродам для компенсации механической нагрузки, можно ограничиться линейной системой относительно w, φ_x, φ_y:

$$D_{11}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x\partial y}+D_{66}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial y^2}-K_SA_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi_x\right)-\frac{\partial M_0}{\partial x}=0,$$
$$D_{22}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x\partial y}+D_{66}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x^2}-K_SA_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi_y\right)-\frac{\partial M_0}{\partial y}=0, \tag{7}$$
$$K_SA_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right)+K_SA_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)+q=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Сведем систему (7) к уравнению относительно w. Для этого используем символический метод, формально заменяя производные $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ на k, p соответственно. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$
\begin{gathered}
(D_{11}k^2 + D_{66}p^2 - K_S A_{55})\varphi_x + (D_{12} + D_{66})kp\varphi_y = kM_0 + K_S A_{55}kw, \\
(D_{22}p^2 + D_{66}k^2 - K_S A_{44})\varphi_y + (D_{12} + D_{66})kp\varphi_x = pM_0 + K_S A_{44}pw, \\
K_S A_{55}(k^2 w + k\varphi_x) + K_S A_{44}(p^2 w + p\varphi_x) + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Решая первые два уравнения системы (8) относительно φ_x, φ_y и подставляя полученный результат в третье уравнений (8), получим символическое уравнение относительно w:

$$
\begin{gathered}
[(K_S A_{55}\Delta + K_S^2 A_{55}^2 b_2)k^2 + (K_S A_{44}\Delta + K_S^2 A_{44}^2 a_1)p^2 - pqK_S^2 A_{44}A_{55}(a_2 + b_1)]w + \\
+K_S[(A_{55}k^2 b_2 + A_{44}p^2 b_1) - (A_{55}b_1 + A_{44}a_2)kp]M_0 + \Delta q = I_0\ddot{w}.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad a_1 = D_{11}k^2 + D_{66}p^2 - K_S A_{55}, \quad a_2 = (D_{12} + D_{66})kp, \\
b_2 = D_{22}p^2 + D_{66}k^2 - K_S A_{44}, \quad b_1 = a_2.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Из (9), (10) путем указанной выше замены получим интегро-дифференциальное уравнение относительно w. Из (9) видно, что для компенсации механической нагрузки необходимо подвести к актуатору разность потенциалов, которая определяется из уравнения

$$
K_S[(A_{55}k^2 b_2 + A_{44}p^2 b_1) - (A_{55}b_1 + A_{44}a_2)kp]M_0 + \Delta q = 0\,. \tag{11}
$$

При помощи указанных выше замен из (11) для равномерной механической нагрузки получим уравнение

$$
\begin{gathered}
K_S A_{55}\left[(D_{22} - D_{12} - D_{66})\frac{\partial^4 M_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{66}\frac{\partial^4 M_0}{\partial x^4} - K_S A_{44}\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}\right] + \\
+K_S A_{44}\left[(D_{11} - D_{12} - D_{66})\frac{\partial^4 M_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{66}\frac{\partial^4 M_0}{\partial y^4} - K_S A_{55}\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}\right] + K_S^2 A_{44}A_{55}q = 0.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Для исследования оптимальных размеров расположенного в центре пластины актуатора считаем, что координаты его вершин равны: $\frac{a-c}{2}, \frac{b-d}{2}; \frac{a-c}{2}, \frac{b+d}{2}; \frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}; \frac{a+c}{2}, \frac{b-d}{2}$.

Таким образом,

$$
M_0(x, y) = M_0\left[H\left(x - \frac{a-c}{2}\right) - H\left(x - \frac{a+c}{2}\right)\right]\left[H\left(y - \frac{b-d}{2}\right) - H\left(y - \frac{b+d}{2}\right)\right]. \tag{13}
$$

Здесь M_0 — константа, а $H(x)$ — функция Хевисайда.

При решении нелинейной задачи методом Бубнова—Галеркина для определения оптимальных размеров актуатора необходимо (12) умножить на $(1 - \cos 2kx)(1 - \cos 2py)$ и проинтегрировать по необходимой области. При этом имеем

$$\frac{\partial^2 M_0(x,y)}{\partial x^2} = M_0\left[\delta'\left(x-\frac{a-c}{2}\right)-\delta'\left(x-\frac{a+c}{2}\right)\right]\left[H\left(y-\frac{b-d}{2}\right)-H\left(y-\frac{b+d}{2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial^2 M_0(x,y)}{\partial y^2} = M_0\left[H\left(x-\frac{a-c}{2}\right)-H\left(x-\frac{a+c}{2}\right)\right]\left[\delta'\left(y-\frac{b-d}{2}\right)-\delta'\left(y-\frac{b+d}{2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial^4 M_0(x,y)}{\partial x^4} = M_0\left[\delta^{(3)}\left(x-\frac{a-c}{2}\right)-\delta^{(3)}\left(x-\frac{a+c}{2}\right)\right]\left[H\left(y-\frac{b-d}{2}\right)-H\left(y-\frac{b+d}{2}\right)\right], \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^4 M_0(x,y)}{\partial y^4} = M_0\left[H\left(x-\frac{a-c}{2}\right)-H\left(x-\frac{a+c}{2}\right)\right]\left[\delta^{(3)}\left(y-\frac{b-d}{2}\right)-\delta^{(3)}\left(y-\frac{b+d}{2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial^4 M_0(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} = M_0\left[\delta^{(3)}\left(x-\frac{a-c}{2}\right)-\delta^{(3)}\left(x-\frac{a+c}{2}\right)\right]\left[\delta^{(3)}\left(y-\frac{b-d}{2}\right)-\delta^{(3)}\left(y-\frac{b+d}{2}\right)\right],$$

где $\delta^{(r)}(x)$ — производная r-го порядка от дельта-функции $\delta(x)$.

При вычислении интегралов следует учитывать формулу

$$\int_a^b f(\xi)\delta^{(r)}(\xi-X)\,d\xi = \frac{1}{2}(-1)^r[f^{(r)}(X-0)+f^{(r)}(X+0)] \quad (a \prec X \prec b).$$

Используя (14), получим, например:

$$\int_a^b\int_a^b \frac{\partial^2 M_0(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}(1-\cos 2kx)(1-\cos 2py)\,dxdy = 16M_0\frac{\pi^2}{ab}\sin\left[\pi\left(\frac{c}{a}\right)\right]\sin\left[\pi\left(\frac{d}{b}\right)\right] =$$

$$= 16M_0\frac{\pi^2}{ab}\sin^2\psi, \quad \psi = \pi\frac{l}{L}. \qquad (15)$$

Здесь l, L — соответственно диагональ актуатора и диагональ пластины.
Аналогично вычисляются и остальные интегралы.

В результате получим следующую формулу для определения оптимального размещения актуатора:

$$M_0 = q/\Delta_1, \quad \Delta_1 = 4K_S^2 A_{44}A_{55}\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} + 16\pi^2 K_S\left\{\left(\frac{1}{a^4}A_{55}+\frac{1}{b^4}A_{44}\right)D_{66}(\sin\psi)\times\right.$$

$$\left.\times(\sin\psi+\psi) - \frac{1}{a^2b^2}[A_{55}(D_{22}-D_{12}-D_{66})+A_{44}(D_{11}-D_{12}-D_{66})\}\sin^2\psi\right\}. \qquad (16)$$

Как видно из (16), при $l \to 0$ и $l \to L$ величина $M_0 \to \infty$, так что при малых размерах актуатора и при полном покрытии поверхности пластины актуатором управлять колебаниями пластины невозможно. Построив график зависимости M_0 от ψ, получим оптимальные размеры актуатора.

Подставляя выражения для $u, v, \varphi_x, \varphi_y$ в уравнение (6) и применяя к полученному результату метод Бубнова—Галеркина, после громоздких выкладок приходим к интегро-дифференциальному уравнению относительно функции времени $W(t)$:

$$L^{(1)}W + L^{(2)}W^3 + \Delta q + \Delta_1 M_0 = I_0 \Delta \ddot{W}. \tag{17}$$

При использовании асимптотических методов [3] интегро-дифференциальное уравнение (17) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с кубической нелинейностью

$$\ddot{W} + 2\tilde{\mu}_1 \dot{W} + \omega_0^2 W + K_1 W^3 = q_1, \tag{18}$$

где

$$q_1 = (q - QM_0)/I_0. \tag{19}$$

Если пьезослои считать упругими, то Q является константой и пропорционально подводимой к актуатору разности потенциалов $V: Q = q_0 V$.

Детальное обсуждение уравнения (18) представлено в монографии [4]. Там же методом Бубнова—Галеркина получено и его решение, которое при гармоническом нагружении имеет вид

$$W = W' \cos \omega t - W'' \sin \omega t.$$

В [4] получено алгебраическое кубическое уравнение для квадрата амплитуды колебаний $X = |W|^2 = (W')^2 + (W'')^2$:

$$b_3 X^3 + b_2 X^2 + b_1 X - b_0 = 0. \tag{20}$$

Коэффициенты $b_i (i = 0, 1, 2, 3)$ приведены в [4]. Там же представлен и график для амплитудно-частотной характеристики, который имеет стандартный для нелинейной системы вид. Приведено также выражение для максимальной амплитуды колебаний $|w|_{\max}$. После определения W из (3) находятся φ_x и φ_y. Затем из (5) определяются u и v.

Зная $w, \varphi_x, \varphi_y, u, v$, найдем деформации, а из определяющих уравнений — усилия и моменты.

Определение температуры диссипативного разогрева. Диссипативная функция D определяется формулой

$$D = \frac{\omega}{2} \left\{ A''_{11} |\varepsilon_{xx}|^2 + 2A''_{12} |\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}|^2 + A''_{22} |\varepsilon_{yy}|^2 + 2A''_{66} |\varepsilon_{xy}|^2 + D''_{11} \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right|^2 + \right.$$

$$+ 2D''_{12} \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right|^2 + D''_{22} \left| \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right|^2 + 2D''_{66} \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right|^2 +$$

$$\left. + K_s A''_{44} \left| \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right|^2 + K_s A''_{55} \left| \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right|^2 \right\}. \tag{21}$$

Здесь введено обозначение $|ab|^2 = a'b' + a''b''$.

Считая геометрическую нелинейность и вязкость величинами одного порядка, можно в (21) не учитывать нелинейные члены в кинематических соотношениях для $|\varepsilon_{xx}|^2$, $|\varepsilon_{yy}|^2$, $|\varepsilon_{xy}|^2$, $|\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}|^2$. Тогда диссипативная функция определяется выражением

$$D = D_0 + D_1\cos 2kx + D_2\cos 2py + D_3\cos 4kx + D_4\cos 4py + D_5\cos 2kx\cos 2py + \\ + D_6\cos 2kx\cos 4py + D_7\cos 4kx\cos 2py + D_8\cos 4kx\cos 4py. \qquad (22)$$

Константы D_i $(i = 0 \div 8)$ не выписываются из-за их громоздкости.

По аналогии с изложенным в [4], для случая теплоизолированных торцов пластины стационарное решение уравнения энергии находится в виде

$$\theta = \theta_0 + \theta_1\cos 2kx + \theta_2\cos 2py + \theta_3\cos 4kx + \theta_4\cos 4py + \theta_5\cos 2kx\cos 2py + \\ + \theta_6\cos 2kx\cos 4py + \theta_7\cos 4kx\cos 2py + \theta_8\cos 4kx\cos 4py. \qquad (23)$$

Выражения для констант $\theta_i (i = 0 \div 3)$ из-за их громоздкости не приводятся.

Анализ полученного решения. Как видно из (18) и (19), если к актуатору подвести разность потенциалов, определяемую из соотношения $M_0 = q / Q$, нагрузка на пластину исчезает и амплитуда вынужденных поперечных колебаний равна нулю. При этом геометрическая нелинейность не влияет на ту разность потенциалов, которую необходимо подвести к электродам для компенсации механической нагрузки. Поэтому для расчета указанной разности потенциалов можно использовать более простую линейную теорию, детально изложенную, например, в [5]. Для трансверсально-изотропного активного материала эта разность потенциалов определяется по формуле:

$$V_a^{yt} = V_a^{kl}\left\{1 + \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[m^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 n^2\right]\right\}. \qquad (24)$$

Для основной моды $m = n = 1$ из формулы (24) следует

$$V_a^{yt} = V_a^{kl}\left\{1 + \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\right\}. \qquad (25)$$

При этом поправка к классическому результату, полученному на основе гипотез Кирхгоффа—Лява, зависит от отношения модулей сдвигов $\left(\frac{G}{G'}\right)$ и отношения толщины пластины к размеру a. В зависимости от их значений величина поправки может быть достаточно большой.

Из выражения (23) и из физических соображений следует, что при колебаниях по первой моде максимальная температура достигается в центре пластины, когда $x = a/2$, $y = b/2$, и равна

$$\theta_{\max} = \sum_{k=0}^{8}|\theta_k|. \qquad (26)$$

Приравнивая максимальную температуру точке деградации материала θ_k, найдем критическую механическую нагрузку, при превышении которой пластина перестает выполнять свое функциональное назначение. Например, если в качестве точки деградации выбирается точка Кюри пьезоматериала, при подводе к электродам гармонической разности потенциалов колебания пластины не будут возбуждаться из-за деполяризации материала.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Карнаухова Т.В. Вимушені коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної пластини з п'єзосенсорами з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 11. С. 37—43.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва: Наука, 1977. 384 с.
3. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. 344 с.
4. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. Киев: Наук. думка, 2014. 520 с.
5. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2015. № 95. С. 75—95.

Поступило в редакцию 09.06.2017

REFERENCES

1. Karnaykhov, V. G., Kozlov, V. I. & Karnaykhova, T. V. (2017). Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 11, pp. 37-43 (in Ukrainian).
2. Rabotnov, Yu. N. (1977). Elements of hereditary solid mechanics. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Mitropolskiy, U. A. (1997). Nonlinear mechanics. Singlyfrequance vibrations. Kiev: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine (in Russian).
4. Bulat, A. F., Dyrda, V. I., Karnaukhov, V. G., Zviagil'sky, E. L. & Kobets, A. S. (2014). Forced vibrations and dissipative heating of nonelastic bodies. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
5. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I. & Karnaukhova, T. V. (2015). Strength of materials and theory of structures. No. 95, pp. 75-95 (in Russian).

Received 09.06.2017

В.Г. Карнаухов[1], *В.І. Козлов*[1], *Т.В. Карнаухова*[2]

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

[2] НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"

E-mail: karn@inmech.kiev.ua

ВИМУШЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ЖОРСТКО ЗАЩЕМЛЕНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ПЛАСТИН З АКТУАТОРАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ Й ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

Представлено модель вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву прямокутних жорстко защемлених в'язкопружних пластин з п'єзоактуаторами з врахуванням геометричної нелінійності й деформацій поперечного зсуву. Методом Бубнова—Гальоркіна одержано аналітичний розв'язок цієї задачі. Проведено аналіз впливу геометричної нелінійності, деформацій поперечного зсуву й температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування коливань за допомогою п'єзоактуаторів.

Ключові слова: *резонансні коливанняя, геометрична нелінійність, деформації поперечного зсуву, п'єзоактуатор, розігрів, активне демпфування.*

V.G. Karnaukhov[1], *V.I. Kozlov*[1], *T.V. Karnaukhova*[2]

[1] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2] NTU of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
E-mail: karn@inmech.kiev.ua

FORCED RESONANT VIBRATIONS AND DISSIPATIVE HEATING OF RIGIDLY FIXED VISCOELASTIC PLATES WITH ACTUATORS WITH REGARD FOR A GEOMETRICAL NONLINEARITY AND TRANSVERSE SHEAR STRAINS

A model of forced resonant vibrations and the dissipative heating of rigidly fixed viscoelastic plates with piezoactuators with regard for a geometrical nonlinearity and transverse shear strains is considered. By the Bubnov—Galerkin method, the approximate analytic solution of this problem is given. The influence of these factors on the effectiveness of the active damping of vibrations by piezoactuators is analyzed.

Keywords: *resonant vibrations, geometrical nonlinearity, shear strains, temperature, piezoactuators, heating, active damping.*