ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.01.029
УДК 539.3

А.М. Багно

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: alexbag2010@gmail.com

О дисперсии волн Лэмба в упругом слое, взаимодействующем с идеальным жидким полупространством

Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем

На основании трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкой среды исследовано распространение квазилэмбовских волн в системе: полупространство идеальной сжимаемой жидкости — упругий слой. Построены дисперсионные кривые для нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние идеальной сжимаемой жидкости и толщины упругого слоя на дисперсию фазовых скоростей квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе. Исследованы локализационные свойства низших квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах. Предложен критерий существования квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах. Числовые результаты приведены в виде графиков и дан их анализ.

Ключевые слова: *дисперсия волн, упругий слой, полупространство идеальной сжимаемой жидкости, локализация квазилэмбовских мод.*

Задача о распространении волн Лэмба в упругом слое, взаимодействующем с жидким полупространством, принадлежит к классическим задачам механики. Вместе с тем, являясь многопараметрической, она остается изученной недостаточно полно. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости [1], а также с привлечением более общих моделей твердых и жидких сред [2—4], приведены в [1—4]. В частности, работа [2] посвящена исследованию свойств функции Грина и применению ее к изучению динамических свойств слоисто-неоднородного полупространства. В обзорной работе [3] проанализированы теоретические методы, применяемые для изучения волн Лэмба в анизотропных пластинах. Значительное практическое использование волн Лэмба ставит задачу изучения дисперсионных свойств этих волн в гидроупругом волноводе, состоящем из упругого слоя и жидкого полупространства, в широком диапазоне частот, охватывающем как длинноволновую, так и коротковолновую части спектра для толщин упругого слоя соизмеримых с длиной волны. В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик квазилэмбовских мод в системе упругий слой — жидкое полупространство в широком интервале частот используются трехмерные линеаризованные уравнения Эйлера для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [5—9].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении нормальных квазилэмбовских волн в гидроупругой системе, состоящей из полупространства идеальной сжимаемой жидкости и упругого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы изотропное упругое тело — идеальная сжимаемая жидкость будут иметь вид [5—9]:

$$\mu\Delta\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=0\,;\ \sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j}+\frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right)+\lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{u}\,,\ z_k\in V_1\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\nabla p=0\,;\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{v}=0\,;\ \frac{\partial p}{\partial\rho^*}=a_0^2\,;\ P_{ij}=-\delta_{ij}p\,;\ a_0=\mathrm{const},\ z_k\in V_2\,. \tag{2}$$

При этом специфику взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические $\sigma_{ij}=P_{ij}$, $z_k\in S$ и кинематические $\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\mathbf{v}$, $z_k\in S$ граничные условия, задаваемые на поверхности контакта твердых тел и жидкости S.

Здесь введены следующие обозначения: u_i — компоненты вектора перемещений твердого тела $\mathbf{u}$; ρ — плотность материала упругого слоя; λ и μ — константы Ляме материала упругого тела; v_i — составляющие вектора возмущений скорости жидкости $\mathbf{v}$; ρ^* и p — возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0 и a_0 — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; P_{ij} и σ_{ij} — составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле; V_1 и V_2 — объемы занимаемые, соответственно, упругим телом и жидкостью; S — поверхность контакта упругой и жидкой сред.

Равенства (1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания идеальной сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя, описывают соотношения (2).

Далее предположим, что изотропный упругий слой занимает объем: $-\infty<z_1<\infty$, $0\le z_2\le h$, $-\infty<z_3<\infty$ и контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью, заполняющей полупространство: $-\infty<z_1<\infty$, $-\infty<z_2\le 0$, $-\infty<z_3<\infty$. Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси oz_3. В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости oz_1z_2. Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1)—(2) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{12}\Big|_{z_2=h}=0\,;\ \sigma_{22}\Big|_{z_2=h}=0\,;\ \sigma_{12}\Big|_{z_2=0}=0\,;\ \sigma_{22}\Big|_{z_2=0}=P_{22}\Big|_{z_2=0}\,;\ v_2\Big|_{z_2=0}=\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{z_2=0}\,. \tag{3}$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и идеальной сжимаемой жидкости, предложенными в работах [5—9]. Для плоского случая, который рассматривается далее, общие решения будут такими:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \; u_2 = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2}{\partial z_2} - \frac{\rho}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi_1; \; v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t}, \tag{4}$$

где введенные функции χ_1 и χ_2 являются решениями следующих уравнений:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{(\lambda+\mu)^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2}\right]\chi_1 = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial {z_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {z_2}^2} - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\chi_2 = 0. \tag{5}$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений разыскиваем в классе бегущих волн и выбираем в виде:

$$\chi_j = X_j(z_2)\exp[i(kz_1 - \omega t)] \;\; (j = 1, 2), \tag{6}$$

где k — волновое число; ω — круговая частота; $i^2 = -1$.

Далее решаем две задачи Штурма — Лиувилля на собственные значения для уравнений движения жидкости и упругого тела, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (3) получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, и приравнивая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det\left\| e_{lm}(c, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \omega h/c_s)\right\| = 0 \;\; (l, m = \overline{1,5}), \tag{7}$$

где c — фазовая скорость нормальных волн; c_s $(c_s^2 = \mu/\rho)$ — скорость волны сдвига в упругом теле; h — толщина упругого слоя.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (7) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 4]. В частности, если принять $\rho_0 = 0$, равенство (7) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 7]. Если дополнительно устремить h к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1]. При $\rho_0 \neq 0$ и $h \to \infty$ равенство перейдет в уравнение Стоунли—Шольте [1].

Числовые результаты и их анализ. В дальнейшем дисперсионное уравнение (7) решалось численно. При этом расчеты проводились для трех гидроупругих систем. Первая состояла из эластичной резины и воды. Ее механические параметры выбирались следующими: упругий слой — $\rho = 1200$ кг/м³, $\lambda = 6 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 1{,}2 \cdot 10^6$ Па; полупространство жидкости — $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459{,}5$ м/с, $\overline{a}_0 = a_0/c_s = 46{,}153442$. Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резина) является податливым и мягким.

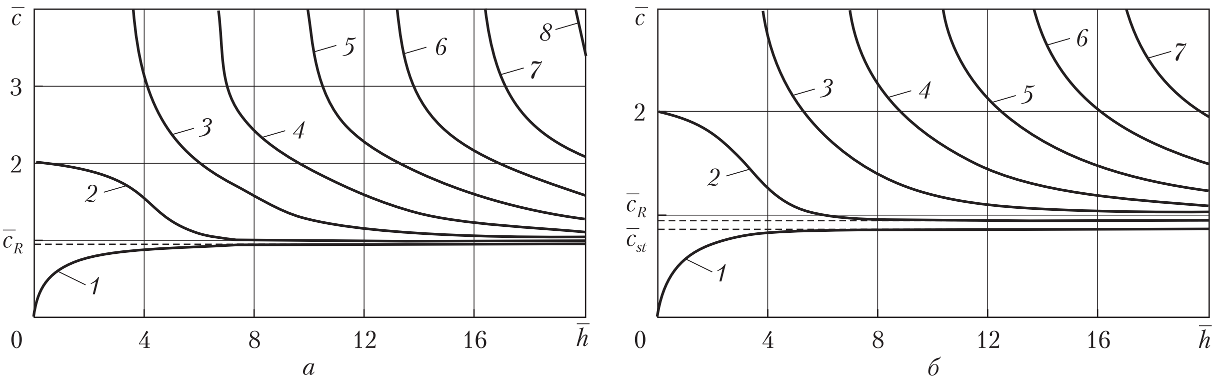

Рис. 1

Вторая состояла из органического стекла и воды. Она характеризовалась следующими параметрами: упругий слой — $\rho = 1160$ кг/м^3, $\lambda = 3{,}96 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 1{,}86 \cdot 10^9$ Па; жидкое полупространство — $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $a_0 = 1459{,}5$ м/с, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1{,}152595$. У этого волновода материал упругого тела (оргстекло) является слабо жестким. Третья представляла собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбирались такими: упругий слой — $\rho = 7800$ кг/м^3, $\lambda = 9{,}26 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 7{,}75 \cdot 10^{10}$ Па; жидкость — $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $a_0 = 1459{,}5$ м/с, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0{,}463021$. Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь) относится к разряду сильно жестких.

Результаты вычислений представлены на рис. 1—3. На рис. 1 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из резины (податливый материал) и воды.

На рис. 1, *а* для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба $\bar{c}$ ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) $\bar{h}$ ($\bar{h} = \omega h/c_s$). На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

Графики на рис. 1, *б* иллюстрируют влияние жидкости на волновые характеристики гидроупругой системы. На нем изображены дисперсионные кривые, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод $\bar{c}$ от безразмерной величины толщины упругого слоя $\bar{h}$. Для наглядности на этом рисунке штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

Из графиков, представленных на рис. 1, *а*, следует, что для чисто упругого волновода скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод Лэмба стремятся к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R$. При этом первая мода стремится к скорости поверхностной волны $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0{,}9553301$) снизу, а скорость второй моды — соответственно, к $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0{,}9553301$) сверху.

В гидроупругом волноводе (рис. 1, *б*) при росте толщины упругого слоя (частоты) $\bar{h}$ скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли $\bar{c}_{st}$ ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0{,}859257$) снизу, а скорость второй моды — к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0{,}9553301$) сверху. Моды более высокого порядка как в гидроупругой системе, так и в чисто упругом слое распростра-

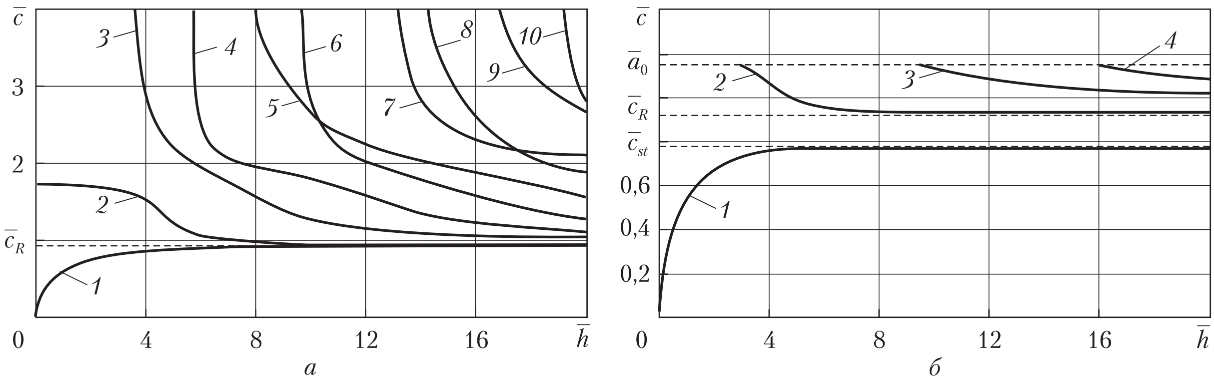

Рис. 2

няются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с увеличением толщины (частоты) $\bar{h}$ к скорости волны сдвига в материале упругого тела $\bar{c}_s$.

На рис. 2 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из органического стекла (слабо жесткий материал) и воды. На рис. 2, *а* для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба $\bar{c}$ от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) $\bar{h}$ [4, 6, 7, 10]. Для наглядности на этом рисунке штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

На рис. 2, *б* изображены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод $\bar{c}$ от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) $\bar{h}$. На этом рисунке для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

Из графиков, представленных на рис. 2, *а*, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя $\bar{h}$ стремится к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0{,}933557$) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0{,}933557$) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя или частоты $\bar{h}$ стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела $\bar{c}_s$ [4, 6, 7, 10].

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 2, *б*, показывают, что при росте толщины упругого слоя (частоты) $\bar{h}$ скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли $\bar{c}_{st}$ ($\bar{c}_{st} = 0{,}7717101$) снизу, а скорость второй моды — к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0{,}933557$) сверху. Моды более высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом частоты (толщины упругого слоя) $\bar{h}$ к скорости волны сдвига в материале упругого тела $\bar{c}_s$.

Графический материал, полученный в результате численных вычислений для системы: сталь (сильно жесткий материал) — вода, представлен на рис. 3. На рис. 3, *а* для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба $\bar{c}$ от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) $\bar{h}$ [4, 6, 7, 10]. Для наглядности на этом рисунке штриховой линией

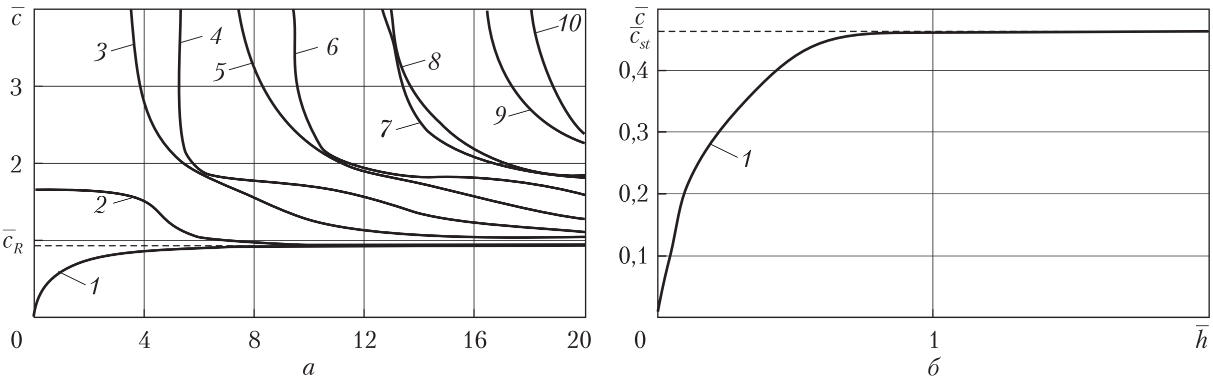

Рис. 3

отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

На рис. 3, *б* приведена дисперсионная кривая для гидроупругого волновода, отражающая зависимость безразмерной величины фазовой скорости единственной существующей первой моды $\bar{c}$ от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) $\bar{h}$. На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость первой моды при возрастании толщины.

Из графиков, представленных на рис. 3, *а*, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя $\bar{h}$ стремится к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0{,}923202$) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0{,}923202$) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя $\bar{h}$ стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела $\bar{c}_s$ [1, 4, 6, 7, 10].

Графический материал для гидроупругой системы, приведенный на рис. 3, *б*, показывает, что при росте толщины упругого слоя (частоты) $\bar{h}$ скорость первой моды стремится снизу к скорости волны Стоунли $\bar{c}_{st}$ ($\bar{c}_{st} = 0{,}462886$), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде $\bar{a}_0$ ($\bar{a}_0 = 0{,}463021$).

Локализационные свойства низших мод в гидроупругих волноводах. Как показано в работе [11], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы резина (податливый материал) — вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости $\bar{a}_0$ ($\bar{a}_0 = 46{,}153442$) больше скорости квазирэлеевской волны $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0{,}955301$). Согласно анализу кинематических характеристик поверхностных волн [11] это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1, являющейся волной типа Стоунли, в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, проникает в твердое тело и локализуется, преимущественно, в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого слоя. Мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Скорость ее стремится к скорости волны

Рэлея $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0{,}955301$) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела $\overline{c}_s$. При этом с ростом частоты (толщины) в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, то есть движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

В случае гидроупругой системы: оргстекло — вода (слабо жесткий материал, рис. 2, *б*) механические параметры ее компонентов таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости $\overline{a}_0$ ($\overline{a}_0 = 1{,}152595$) несколько больше скорости квазирэлеевской волны $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0{,}933557$). Как отмечалось выше, анализ кинематических характеристик поверхностных волн, выполненный в работе [11], показал, что при таком соотношении механических параметров мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого слоя. Вторая мода распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Моды высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

Таким образом, анализ показывает, что в данных упруго-жидкостных системах низшие моды проникают в твердое тело и также, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

В случае гидроупругой системы: сталь — вода (сильно жесткий материал, рис. 3, *б*) механические параметры таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости $\overline{a}_0$ ($\overline{a}_0 = 0{,}463021$) меньше скорости квазирэлеевской волны $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0{,}923202$). В связи с этим, согласно результатам, полученным в работе [11] для волн Стоунли, в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого полупространства.

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе первая мода не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы контакта сред, преимущественно, в приповерхностной области жидкости. В этом случае волноводом для распространения волны Стоунли и переноса большей части волновой энергии служит приповерхностная область жидкого полупространства.

Критерий существования квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах. Проведенные отдельно расчеты и анализ результатов, полученных в настоящей работе, показал, что соотношение между скоростями волны звука в жидкости и волны Рэлея в твердом теле может служить критерием, позволяющим устанавливать возможность существования нормальных квазилэмбовских волн в упругом слое, взаимодействующем с полупространством идеальной сжимаемой жидкости.

Как указывалось ранее, графики, приведенные на рис. 1, *б*, получены для гидроупругой композиции, состоящей из жидкости и упругого слоя из податливого материала. В этом случае механические параметры составляющих системы таковы, что скорость волны звука в жидкости больше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в твердом слое ($\overline{a}_0 > \overline{c}_R$). При таком соотношении, как видно из рис. 1, *б*, жидкость не препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя. Это способствует взаимодействию продольной и сдвиговой волн на поверхностях упругого слоя и возникновению в нем полного набора незатухающих нормальных квазилэмбовских волн, дисперсионная картина и частотный спектр которых, несмотря на ряд различий, подобен волновому процессу в упругом слое, невзаимодействующем с жидкостью.

В гидроупругой системе с упругим слоем из слабо жесткого материала скорость волны звука в жидкости лишь немного превышает скорость волны Рэлея. В этом случае, как следует из графиков рис. 2, *б*, в упругом слое также возникают квазилэмбовские моды, но только такие, величина фазовой скорости которых меньше величины скорости звуковой волны в жидкости. Количество этих мод, распространяющихся без радиационного демпфирования, значительно меньше числа мод Лэмба в чисто упругом слое.

При взаимодействии упругого слоя из сильно жесткого материала с идеальным сжимаемым жидким полупространством скорость волны звука в жидкости меньше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в твердом слое ($\overline{a}_0 < \overline{c}_R$). При таком соотношении между механическими параметрами компонентов системы жидкость препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя. В этом случае, как видно из графика рис. 3, *б*, в упругом слое не формируются нормальные квазилэмбовские волны. В гидроупругом волноводе возникает лишь одна низшая мода 1, которая, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется в приповерхностной области жидкости.

В заключение отметим, что воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра. Локализация низших мод в системе: жидкое полупространство — упругий слой зависит от механических параметров гидроупругой системы. Основным критерием существования нормальных квазилэмбовских волн и распределения низших мод в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в идеальной сжимаемой жидкости и квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — Москва: Наука, 1981. — 288 с.
2. *Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютекин В.В.* Расчет характеристик нормальных волн мелкого моря с упругим дном (импедансный метод) // Акуст. журн. — 1987. — **33**, № 5. — С. 805—813.
3. *Безруков А.В.* Некоторые особенности распространении нормальных волн в мелком море с неоднородным упругим дном // Акуст. журн. — 1989. — **35**, № 4. — С. 744—747.
4. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. — 2016. — **52**, No 5. — P. 449—507.
5. *Guz A.N.* Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses // Int. Appl. Mech. — 1980. — **16**, No 3. — P. 175—190.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 — х томах. — Киев: Наук. думка, 1986.
7. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. — Киев: А.С.К., 2004. — 672 с.
8. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. — Киев: А.С.К., 1998. — 350 с.
9. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2009. — 428 p.
10. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. — Киев: Наук. думка, 1976. — 104 с.
11. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. — 1988. — **34**, № 4. — С. 608—615.

Поступило в редакцию 05.07.2016

REFERENCES

1. *Viktorov I. A.* Sound surface waves in solids, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
2. *Bezrukov A.V., Prikhod'ko V.Yu., Tyutekin V.V.* Acoustic J., 1987, **33**, No 5: 805—813 (in Russian).
3. *Bezrukov A.V.* Acoustic J., 1989, **35**, No 4: 744—747 (in Russian).
4. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Int. Appl. Mech., 2016, **52**, No 5: 449—507.
5. *Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1980, **16**, No 3: 175—190.
6. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vol., Kiev: Naukova Dumka, 1986 (in Russian).
7. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A.C.K., 2004 (in Russian).
8. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Kiev: A.C.K., 1998 (in Russian).
9. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009
10. *Guz A.N., Makhort F.G., Guscha O.I.* Introduction in acoustoelasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1977 (in Russian).
11. *Volkenstein M.M., Levin V.M.* Acoustic J., 1988, **34**, No 4: 608—615 (in Russian).

Received 05.07.2016

О.М. Багно

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: alexbag2010@gmail.com

ПРО ДИСПЕРСІЮ ХВИЛЬ ЛЕМБА У ПРУЖНОМУ ШАРІ,
ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ІДЕАЛЬНИМ РІДКИМ НАПІВПРОСТОРОМ

На основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідкого середовища досліджено поширення квазілембовських хвиль у системі: напівпростір ідеальної стисливої рідини — пружний шар. Побудовано дисперсійні криві для нормальних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив ідеальної стисливої рідини та товщини пружного шару на дисперсію фазових швидкостей квазілембовських мод у гідропружному хвилеводі. Досліджено локалізаційні властивості нижчих квазілембовських мод у гідропружних хвилеводах. Запропоновано критерій існування квазілембовських хвиль в гідропружних хвилеводах. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

Ключові слова: *дисперсія хвиль, пружний шар, напівпростір ідеальної стисливої рідини, локалізація квазілембовських мод.*

O.M. Bahno

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: alexbag2010@gmail.com

ON THE DISPERSION OF LAMB WAVES IN AN ELASTIC LAYER
INTERACTING WITH THE IDEAL LIQUID HALF-SPACE

The propagation of quasi-Lamb waves in the system «ideal compressible liquid half-space — elastic layer» is studied, by using the three-dimensional equations of classical elasticity theory for a solid body and linearized Euler equations for a fluid. The dispersion curves for normal waves over a wide range of frequencies are constructed. The influence of an ideal compressible fluid and the thickness of an elastic layer on the dispersion of phase velocities of the quasi-Lamb modes in a hydroelastic waveguide is analyzed. The localization properties of the lower quasi-Lamb modes in hydroelastic waveguides are studied. A criterion for the existence of the quasi-Lamb waves in hydroelastic waveguides is proposed. The numerical results obtained are presented in the form of plots and analyzed.

Keywords: *dispersion of waves, elastic layer, half-space of an ideal compressible fluid, localization of quasi-Lamb modes.*