ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ



doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.03.003
УДК 517.518

**В.Н. Левчук**

Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка
E-mail: levchyk.valentyna@gmail.com

# О безусловных базисах ядер, порождаемых дифференциальными уравнениями второго порядка

*Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым*

*Получены необходимые и достаточные условия безусловной базисности функций, которые являются решениями уравнений второго порядка (типа Бесселя), а спектральный параметр принадлежит дискретному множеству, совпадающему с нулями целой функции экспоненциального типа.*

***Ключевые слова:*** *безусловный базис, вещественная функция, гильбертово пространство, уравнение Бесселя, класс Бернштейна, базисность, оператор.*

Ранее в работе [1] были описаны безусловные базисы из значений ядер Данкла. Пусть $\varphi$ — вещественная функция из $C^1(\mathbb{R})$ такая, что

$$\varphi(x)\geqslant 0(\forall x\in\mathbb{R}_+);\ \varphi(-x)=(-1)^{\nu}\varphi(x),\ \nu\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

причем

$$\int_0^{\mathbb{C}}\varphi(x)dx<\infty,\ \int_0^{\mathbb{C}}\frac{dx}{\varphi(x)}<\infty,\ \ \forall C, 0<C<\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $L^2_{\varphi}(-a,a)$ $(0<a\leqslant\infty)$ гильбертово пространство функций относительно скалярного произведения,

$$\langle f,g\rangle_{\varphi}=\int_{-a}^{a}f(x)\overline{g(x)}|\varphi(x)|dx.$$

Обозначим через $f(x,\lambda)$ решение интегрального уравнения

$$f(x,\lambda)+\lambda^2\int_0^x\frac{dt}{\varphi(t)}\int_0^t f(s,\lambda)\varphi(s)ds=1 \tag{3}$$

(которое при $\varphi(x)=x^{\nu}$ эквивалентно уравнению Бесселя). Зададим функцию

$$e(x,\lambda)=f(x,\lambda)-\frac{i}{\lambda}f'(x,\lambda) \tag{4}$$

(отметим, что $e(x,\lambda)=e^{i\lambda x}$ при $\varphi(x)\equiv\text{const}$).

В данной работе описываются безусловные базисы, порождаемые $e(x,\,\lambda)$, —

$$\{e(x,\,\lambda_k);\quad \lambda_k\in\Lambda\} \tag{5}$$

в пространстве $L^2_\varphi(-a,a)$, где последовательность $\Lambda\{\lambda_k\in\mathbb{C}:k\in\mathbb{Z}\}$ не имеет конечных предельных точек и находится на положительном расстоянии от $\mathbb{R}$. Функция $e(x,\lambda)$ имеет резольвентное представление:

$$e(x,\,\lambda)=(I-\lambda B)^{-1}\mathbb{1}, \tag{6}$$

где $B$ — компактный оператор в $L^2_\varphi(-a,a)$ со спектром в нуле. Существенным представляется то, что функции $e(x,\,\lambda_k)$ являются собственными (в смысле Фредгольма) для оператора $K$

$$\left(Ke(x,\lambda_k)=\frac{1}{\lambda_k}e(x,\lambda_k)\right),$$

где $K$ — одномерное возмущение вольтеррова оператора $B$,

$$K=B+\langle\cdot,g\rangle_\varphi\mathbb{1},\ g\in L^2_\varphi(-a,a). \tag{7}$$

В основе доказательства базисности семейства $\{e(x,\,\lambda_k)\}$ лежит развитие методов исследований таких задач, предложенных Г.М. Губреевым [2].

Справедливо разложение

$$L^2_\varphi(-a,\,a)=L_+\oplus L_-,$$

где

$$L_\pm\overset{\text{def}}{=}\left\{f_\pm(x)=\frac{1}{2}(f(x)\pm f(-x)):f(x)\in L^2_\varphi(-a,a)\right\}.$$

Зададим в $L^2_\varphi(-a,a)$ линейный оператор

$$(Bf)(x)\overset{\text{def}}{=}i\int_0^x f_-(t)\,dt+\frac{i}{\varphi(x)}\int_0^x f_+(t)\varphi(t)\,dt\,. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что если

$$M=\int_0^a\varphi(x)\int_0^x\frac{dt}{\varphi(t)}dx<\infty:\tilde{M}=\int_0^a\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x\varphi(t)\,dt<\infty, \tag{9}$$

то оператор $B$ (8) ограничен. Если имеют место

$$b=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx<\infty;\ \tilde{b}=\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{\varphi(x)}<\infty, \tag{10}$$

то справедливы (9).

Рассмотрим в безвесовом пространстве $L^2(-a,\,a)$ (которое совпадает с $L^2_\varphi(-a,a)$ при $\varphi(x)\equiv1;\forall x\in[-a,a]$) оператор интегрирования

$$(\mathbb{J}f)(x)=i\int_0^x f(x)\,dt; \tag{11}$$

при этом очевидно, что $\mathbb{J}=B$ (11), когда $\varphi(x)\equiv1$. Если для $\varphi(x)$ выполняется (10) и

$$\varphi(x)\neq0,\quad \frac{1}{\varphi(x)}\neq0\quad (\forall x\in[0,a)),$$

то оператор $B$ (8) подобен оператору $\mathbb{J}$ (11).

Для функции $e(x,\lambda)$ (6) и $B$ (8) имеет место

$$Be(x,\lambda)=\frac{e(x,\lambda)-1}{\lambda}. \tag{12}$$

Если выполняется оценка

$$\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt \leqslant M, \quad \forall x\in[0,a], \tag{13}$$

то нетрудно видеть, что

$$|\,f(x)\,|\leqslant 1+M^2x^2e^{Mx}$$

и, значит,

$$|e(x,\lambda)|\leqslant(1+M)(1+M^2x^2\,|\lambda|^2)e^{Mx\,|\lambda|}.$$

Отсюда следует, что в случае (13) $e(x,\,\lambda)$ (6) является целой функцией экспоненциального типа, который мы обозначим через $\sigma_\varphi$.

Рассмотрим в пространстве $L^2_\varphi(-a,a)$ (1, 2) оператор $K$:

$$Kh\overset{\text{def}}{=}Bh+\langle h,g\rangle\mathbb{1},\ h\in L^2_\varphi(-a,a), \tag{14}$$

где $B$ имеет вид (8) и $\mathbb{1}=\chi_{(-a,\,a)}(x)$.

**Лемма 1**. *Для резольвент Фредгольма* $K(\lambda)=K(I-\lambda K), B(\lambda)=B(I-\lambda K)^{-1}$ *операторов K (14) и B (8) справедлива формула*

$$K(\lambda)f=B(\lambda)f+\frac{\langle(I-\lambda B)^{-1}f,g\rangle}{1-\lambda\langle e,g\rangle}e \tag{15}$$

*для* $\forall f\in L^2_\varphi(-a,a)$, *где e имеет вид (6).*

В дальнейшем важную роль играет функция

$$n(\lambda)\overset{\text{def}}{=}1-\lambda\langle e,\ g\rangle. \tag{16}$$

Из (15) следует, что фредгольмов спектр вполне непрерывного оператора $K$ (14) совпадает с множеством

$$\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C}:n(\lambda)=0\}. \tag{17}$$

Если $\lambda_n\in\Lambda$, то

$$Ke(x,\,\lambda_n)=\frac{1}{\lambda_n}e(x,\,\lambda_n) \tag{18}$$

и, значит, $e(x,\lambda_n)$ является собственной функции оператора $K$.

Размерность корневого подпространства оператора $K$, отвечающего собственному числу $\lambda_n^{-1}$, равна кратности корня $\lambda_n$ функции $n(\lambda)$ (16).

Задача описания базисов вида $\{e(x,\lambda_n)\}^\infty$ тесно связана с изучением оператора $K$ (14).

**Теорема 1.** *Предположим, что функция,* $\varphi(x)$ (1), (2) *такова, что имеют место* (10), *и пусть совокупность* $\{e(x,\,\lambda_n)\}(\lambda_n\in\Lambda, 0\notin\Lambda)$ *образует безусловный базис в* $L^2_\varphi(-a,a)$. *Тогда существует единственная функция* $g\in L^2_\varphi(-a,a)$ *такая, что для оператора K вида* (14) *справедливы равенства* (18).

Описание класса функций $n(\lambda)$ (16) основано на свойствах функций $\langle e,g\rangle$, где $e(x,\lambda)$ имеет вид (6), а $g\in L^2_\varphi(-a,a)$.

**Лемма 2.** *Для функции*

$$\tilde{h}(\lambda)=\langle e,\ h\rangle, \tag{19}$$

*где е имеет вид* (6), *справедливо представление*

$$\tilde{h}(\lambda)=\tilde{h}(0)+i\lambda\int_{-a}^{a}e^{i\lambda t}\psi(t)\,dt, \tag{20}$$

*где* $\psi(t)$ *принадлежит* $L^2(-a,\ a)$.

Напомним, что функция $f(\lambda)$ принадлежит *классу Бернштейна* $B_\sigma$ [3] если $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|<\infty.$$

Известно, что для $\forall f\in B_\sigma$ имеет место представление (20) $(\sigma=a)$. Таким образом, $\tilde{h}(\lambda)$ (19) принадлежит классу $B_a$.

*Замечание 1.* Для $n(\lambda)$ (16) имеет, место

$$h\left(n,\pm\frac{\pi}{2}\right)=a. \tag{21}$$

Кроме того, для $h(\lambda)=\lambda^{-1}(n(\lambda)-n(0))$ справедливо включение $\lambda^{-1}h(\lambda)-h(0))\in L^2(\mathbb{R})$.

**Теорема 2**. *Пусть функция* $\varphi$ (1), (2) *обладает, свойствами* (10), *а* $n(\lambda)$ *имеет вид*

$$n(\lambda)=1-\lambda\langle e,\ g\rangle,$$

*где* $g\in L^2_\varphi(-a,a)$, *а е задается формулой* (6), *при этом оператор В в* $L^2_\varphi(-a,a)$ *имеет вид* (8). *Если корни* $n(\lambda)$ *не лежат на* $\mathbb{R}$, *то следующие условия эквивалентны:*

*1) для* $\forall h\in L^2_\varphi(-a,a)$ *имеет место оценка*

$$\int_{\mathbb{R}}|\varphi(z)|^{-1}|n(z)|^2\left|\langle(\mathrm{I}-zB)^{-1}h,g\rangle_{L^2_\varphi(-a,a)}\right|^2dz\leqslant M\,\|h\|^2_{L^2_\varphi(-a,a)};$$

*2) вес* $\omega^2(\lambda)=|\varphi(\lambda)\|n(\lambda)|^2$ *удовлетворяет* $A_2$ *условию Макенхаупта на* $\mathbb{R}$.

Основной результат работы состоит в следующем.

**Теорема 3**. *Предположим, что функция* $\varphi(x)$ (1), (2) *обладает свойством* (10) *и множество* $\Lambda=\{\lambda_k\in\mathbb{C}:k\in\mathbb{Z}\}$ *лежит на положительном расстоянии от оси* $\mathbb{R}$, *и пусть функция* $f=A\mathbb{1}$ *(А – оператор из* $L^2_\varphi(-a,a)$ *в* $L^2(-a,\ a)$, *осуществляющий подобие операторов В (8) и* $\mathbb{J}$ (11)) *такова, что* $f(0)\neq 0$ *и существует* $f'(x)$ *п.в. причем,* $f'\in L^2(-a,\ a)$. *Для того чтобы семейство*

$$\{e(x,\lambda_k),\lambda_k\in\Lambda\}\quad(0\notin\Lambda)$$

*было безусловным базисом в* $L^2_\varphi(-a,a)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\Lambda$ *образовало множество корней целой функции экспоненциального типа n такой, что:*

1) $\lambda^{-1}(n(\lambda)-n(0))\in L^2_\varphi(\mathbb{R})$;

2) $h\left(n, \pm\frac{\pi}{2}\right) = a$;

3) *вес* $\omega^2(\lambda) = |\varphi(\lambda)||n(\lambda)|^2$ *удовлетворяет* $A_2$ *условию Макенхаупта* [2];

4) *корни* $n(\lambda)$ *простые и последовательности* $\Lambda_\pm$ (2.7) *удовлетворяют условию Карлесона* [2].


ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Губреев Г.М., Левчук В.Н. Описание безусловных базисов из значений ядер Данкла. *Функц. анализ и его прил.* 2015. **49**, вып. 1. С. 79—82.
2. Губреев Г.М. Избранные труды. Днепропетровск: Середняк Т.К., 2014. 445 с.
3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. Москва: Наука, 1965. 408 с.


Поступило в редакцию 19.09.2016


REFERENCES

1. Gudreev, G. M. & Levchuk, V. N. (2015). Description of unconditional bases formed by values of the Dunkl kernels. Funkts. analiz i ego pril., 49, Iss. 1, pp. 79-82 (in Russian). doi: https://doi.org/10.4213/faa3176; Funct. Anal. Its Appl., 49, Iss. 1, pp. 64-66. doi: https://doi.org/10.1007/s10688-015-0085-0.
2. Gubreev G.M. (2014). Selected works. Dnipropetrovsk: Serednyak T.K. (in Russian).
3. Akhieser N.I. (1965). Lectures on the approximation theory. Moscow: Nauka (in Russian).


Received 19.09.2016


*В.М. Левчук*

Полтавський національний технічний університет
ім. Юрія Кондратюка
E-mail: levchyk.valentyna@gmail.com


ПРО БЕЗУМОВНІ БАЗИСИ ЯДЕР, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Отримано необхідні і достатні умови безумовної базисності функцій, які є розв'язками рівнянь другого порядку (типу Бесселя), а спектральний параметр належить дискретній множині, що збігається з нулями цілої функції експоненціального типу.

***Ключові слова:*** *безумовний базис, дійсна функція, гільбертовий простір, рівняння Бесселя, клас Бернштейна, базисність, оператор.*


*V.N. Levchuk*

Yuriy Kondratyuk Poltava National Technical University
E-mail: levchyk.valentyna@gmail.com


ON THE UNCONDITIONAL BASES OF CORES GENERATED BY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

We obtain the necessary and sufficient conditions of unconditional basicity of functions that are solutions of second-order equations (Bessel-type), and the spectral parameter belongs to a discrete set coinciding with the zeros of an entire function of the exponential type.

***Keywords:*** *unconditional basis, real function, Hilbert space, Bessel equation, Bernstein class, basicity, operator.*