

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.03.018>

УДК 510.6

А.П. Пынько

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев

Email: pyanko@i.ua

Минимизация КНФ частично-монотонных булевых функций

Представлено академиком НАН Украины А.А. Летичевским

Булеву функцию назовем частично-монотонной, если она монотонна относительно некоторых из своих аргументов и антимонотонна относительно остальных своих аргументов. Мы доказываем, что конъюнктивные нормальные формы частично-монотонных булевых функций можно минимизировать очень эффективно, используя лишь частично-монотонные дизъюнкты.

Ключевые слова: булева функция, литерал, дизъюнкт, конъюнктивная нормальная форма, конъюнкт, дизъюнктивная нормальная форма.

Булеву функцию с $n \geq 0$ аргументами x_1, \dots, x_n назовем m -монотонной, где $0 \leq m \leq n$, если она монотонна по своим (без ограничения общности, первым) m аргументам, но антимонотонна по остальным. Понятно, что *собственный* (т.е., не содержащий комплементарной пары $x_i, \neg x_i$, ни для какого $1 \leq i \leq n$) дизъюнкт является m -монотонным, если и только если он состоит из (не обязательно всех) литералов $x_1, \dots, x_m, \neg x_{m+1}, \dots, \neg x_n$. Отметим, что чисто (анти)монотонные функции – это в точности n -монотонные (соответственно, 0 -монотонные) функции. Типичным примером частично монотонной булевой функции, которая не является ни чисто монотонной ни чисто антимонотонной, является операция импликации $\neg x_2 \vee x_1$, а функции, которая не является частично-монотонной, – операция эквиваленции $(\neg x_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$.

В данной работе мы показываем, что всякая конъюнктивная нормальная форма (КНФ) такой функции эквивалентна КНФ, состоящей из того же числа m -монотонных собственных дизъюнктов. Более того, минимальная КНФ получается из КНФ всех m -монотонных собственных дизъюнктов, превышающих (по аргументно) рассматриваемую булеву функцию, путем выбора минимальных (по включению) дизъюнктов. Тем самым, в случае частично-монотонных булевых функций минимизация гораздо эффективнее, чем в общем случае [1, 2], поскольку фактически в нашем случае все дизъюнкты предварительно минимизированной КНФ, состоящей из всех минимальных дизъюнктов, превышающих заданную булеву функцию, оказываются ядерными. Представленные здесь результаты являются частным (двухзначным) случаем результатов работы [3]. Однако, учитывая осо-

© А.П. Пынько, 2017

бый интерес алгебры логики в общем контексте дискретной математики [4], мы представим здесь самодостаточное изложение материала, сопровождаемое непосредственными доказательствами.

Итак, рассмотрим m -монотонную функцию f . Начнем с доказательства следующих двух ключевых лемм, которые являются частными (двузначными) случаями лемм 2.7 и 2.12, соответственно, работы [3].

Лемма 1. Пусть $D \geq f$ – собственный дизъюнкт. Тогда существует m -монотонный дизъюнкт $f \leq D' \subseteq D$.

Доказательство. Положим $D' \triangleq D \cap \{x_1, \dots, x_m, \neg x_{m+1}, \dots, \neg x_n\}$ (в дальнейшем, такой дизъюнкт D' будем называть m -монотонизацией D). Возьмем произвольные $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$. Определим новые значения $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ для всех $0 \leq i \leq n$ следующим образом:

$$b_i \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } i \geq m \text{ и } x_i \in D \setminus D', \\ 1, & \text{если } i \leq m \text{ и } \neg x_i \in D \setminus D', \\ a_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как D собственный $D(b_1, \dots, b_n) = D'(a_1, \dots, a_n)$. Кроме того, в силу m -монотонности f , мы имеем $f(b_1, \dots, b_n) \geq f(a_1, \dots, a_n)$. Поскольку $f(b_1, \dots, b_n) \leq D(b_1, \dots, b_n)$, мы тем самым получаем $f(a_1, \dots, a_n) \leq D'(a_1, \dots, a_n)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть S – конечное множество m -монотонных дизъюнктов, а D – собственный дизъюнкт, такой что $\bigwedge S \leq D$. Тогда существует $D \supseteq D' \in S$.

Доказательство. От противного. Предположим, что для каждого $d \in S$, существует $l_d \in d \setminus D$. При этом $l_d = \neg x_{i_d}$ или $l_d = x_{i_d}$ для некоторого $1 \leq i_d \leq n$. Определим значения $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ следующим образом. Во-первых для каждого $d \in S$ положим:

$$a_{i_d} \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } i_d > m, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Во-вторых для всех остальных $0 \leq i \leq n$, положим:

$$a_i \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \in D, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, в силу m -монотонности всех $d \in S$, $\bigwedge S(a_1, \dots, a_n) = 1$, а, так как D – собственный дизъюнкт и $l_d \notin D$ для всех $d \in S$, $D(a_1, \dots, a_n) = 0$. Данное противоречие исходному неравенству $\bigwedge S \leq D$ завершает доказательство.

Условия собственности D и m -монотонности f и всех элементов S в формулировках лемм 1 и 2 являются необходимыми, как это демонстрируется следующими тождественными неравенствами, соответственно:

$$x_2 \leq (x_1 \vee \neg x_1),$$

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \leq x_2.$$

С учетом лемм 1 и 2 минимизация исходной КНФ $\bigwedge S$, заданной m -монотонной булевой функции f , оказывается исключительно простой. А именно, построив m -монотонизации всех собственных элементов S и выбрав минимальные по включению дизъюнкты, мы получаем в результате КНФ $\bigwedge S'$.

Теорема 1. $\wedge S'$ — минимальная КНФ для f .

Доказательство. По леммам 1 и 2.

В силу дуальности, данные результаты легко переформулируются для дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). А именно, если f — m -монотонная булева функция, то $\neg f$ — $(n-m)$ -монотонная функция (при надлежащем обращении своих аргументов). Пусть теперь $\vee S$ — произвольная ДНФ для f .

Следствие 1. $\neg \wedge (\{\neg C : C \in S\})'$ — минимальная ДНФ для f .

Доказательство. По теореме 1.

В заключение данной статьи подчеркнем, что упрощение процедуры минимизации оказалось возможным благодаря ядерности элементов S' , которая вытекает из леммы 2. Это фактически позволяет избежать перебора подмножеств S' , содержащих все ядерные элементы, сразу взяв в качестве искомого подмножества само множество S' .

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Москва: Наука. 1986. 384 с.
2. Quine W.V. On cores and prime implicants of truth functions. *American Math. Monthly*. 1959. **66**, № 9. P. 755–760.
3. Рунко А.Р. Minimal sequent calculi for monotonic chain finitely-valued logics. *Bulletin of the Section of Logic*. 2014. **43**, № 1/2. P. 99–112.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики: В 2 т. Київ: ЛітСофт, 2000. Т. 1: Математичні основи. 380 с.

Поступило в редакцію 25.10.2016

REFERENCES

1. Yablonskiy, S. V. (1986). Introduction to discrete mathematics. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Quine, W.V. (1959). On cores and prime implicants of truth functions, *American Math. Monthly*, **66**, No. 9, pp. 755-760.
3. Runko, A.P. Minimal sequent calculi for monotonic chain finitely-valued logics. *Bulletin of the Section of Logic*, 2014, **43**, No. 1/2, pp. 99-112.
4. Kapitonova, J.V., Kryvyj, S.L., Letichevskij, O.A., Luckij, G.M., & Pechurin, M.K. (2000). Foundations of discrete mathematics (in 2 volumes), Kiev: LitSoft (vol. 1: Mathematical foundations) (In Ukrainian).

Received 25.10.2016

О.П. Пынько

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ

E-mail: runko@i.ua

МІНІМІЗАЦІЯ КНФ ЧАСТКОВО-МОНОТОННИХ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Булева функція зватиметься частково-монотонною, якщо вона монотонна відносно деяких з її аргументів та антимонотонна відносно решти її аргументів. Ми доводимо, що кон'юнктивні нормальні форми частково-монотонних булевих функцій можна мінімізувати дуже ефективно з використанням лише частково-монотонних диз'юнктивів.

Ключові слова: булева функція, літерал, диз'юнкт, кон'юнктивна нормальна форма, кон'юнкт, диз'юнктивна нормальна форма.

A.P. Pynko

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: pynko@i.ua

MINIMIZATION OF THE CONJUNCTIVE NORMAL FORMS
OF PARTIALLY MONOTONIC BOOLEAN FUNCTIONS

A Boolean function is said to be partially monotonic provided it is monotonic with respect to some of its arguments, while anti-monotonic with respect to others. We argue that the conjunctive normal forms of partially monotonic Boolean functions can be minimized in a quite effective way with involving just disjuncts possessing the same partial monotonicity.

Keywords: Boolean function, literal, disjunct, conjunctive normal form, conjunct, disjunctive normal form.