ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.08.003
УДК 517.956.4

В.М. Лось [1], **В.А. Михайлець** [2], **О.О. Мурач** [3]

[1] НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”
[2, 3] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: v_los@yahoo.com, mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

Регулярність розв’язків загальних параболічних задач у просторах Хермандера

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

Доведено теореми про глобальну і локальну регулярність узагальнених розв’язків загальних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.

Ключові слова: *параболічна початково-крайова задача, простір Хермандера, узагальнений розв’язок, локальна регулярність розв’язку.*

В теорії рівнянь з частинними похідними важливим є питання про регулярність розв’язків, що досліджуються. Як правило, відповідь на нього дають у вигляді достатніх умов належності розв’язків вибраним функціональним просторам. В основному використовують класичні простори Соболєва та Гельдера—Зігмунда. Для них побудована теорія розв’язності загальних параболічних початково-крайових задач [1—7].

Широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва було запропоноване Л. Хермандером у [8]. Це простори $H^{\mu} := \mathrm{B}_{2,\mu}$. Для них показником регулярності розподілів служить вагова функція μ, залежна від кількох частотних змінних.

Недавно В.А. Михайлець і О.О. Мурач [9] побудували теорію розв’язності загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера. Зокрема, було отримано більш тонкі умови регулярності узагальнених розв’язків, ніж це можна зробити в межах просторів Соболєва і Гельдера—Зігмунда.

У роботах [10—13] доведено теореми про ізоморфізми, які встановлюють оператори, породжені мішаними параболічними задачами в анізотропних гільбертових просторах Хермандера.

Метою цієї роботи є доведення теорем про глобальну і локальну регулярність узагальнених розв’язків загальних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.

1. Постановка задачі. Нехай довільно задані ціле число $n \geqslant 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0, \tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

Розглянемо в циліндрі Ω таку параболічну початково-крайову задачу:

$$A(x, t, D_x, \partial_t) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta \leqslant 2m} a^{\alpha,\beta}(x, t) D_x^{\alpha} \partial_t^{\beta} u(x, t) = f(x, t) \text{ для всіх } x \in G \text{ і } t \in (0, \tau); \qquad (1)$$

$$B_j(x, t, D_x, \partial_t) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta \leqslant m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x, t) D_x^{\alpha} \partial_t^{\beta} u(x, t) = g_j(x, t) \text{ для всіх } x \in \Gamma,\ t \in (0, \tau)$$
$$\text{і } j \in \{1, \ldots, m\}; \qquad (2)$$

$$\partial_t^k u(x, t)|_{t=0} = h_k(x) \text{ для всіх } x \in G \text{ і } k \in \{0, \ldots, \varkappa - 1\}. \qquad (3)$$

Тут b, m і всі m_j — довільно задані цілі числа такі, що $m \geqslant b \geqslant 1$, $\varkappa := m / b \in \mathbb{Z}$ і $m_j \geqslant 0$. Число $2b$ називається параболічною вагою цієї задачі. Усі коефіцієнти лінійних диференціальних виразів $A := A(x, t, D_x, \partial_t)$ і $B_j := B_j(x, t, D_x, \partial_t)$, де $j \in \{1, \ldots, m\}$, вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно.

Використовуємо такі позначення: $D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\partial / \partial x_k$ і $\partial_t := \partial / \partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i — уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультиіндекс і $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. У формулах (1) і (2) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ і β, які задовольняють умову, вказану під знаком суми. Як звичайно, $\xi^{\alpha} := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ для $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково-крайова задача (1)—(3) називається параболічною в циліндрі Ω, якщо виконуються такі дві умови.

Умова 1. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0, \tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, правильно

$$A(x, t, \xi, p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta = 2m} a^{\alpha,\beta}(x, t) \xi^{\alpha} p^{\beta} \neq 0 \text{ за умови } |\xi| + |p| \neq 0.$$

Для формулювання умови 2 довільно виберемо точку $x \in \Gamma$, дійсне число $t \in [0, \tau]$, дотичний вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ до межі Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, такі, що $|\xi| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x)$ є ортом внутрішньої нормалі до межі Γ у точці x. З умови 1 та нерівності $n \geqslant 2$ випливає, що многочлен $A(x, t, \xi + \zeta\nu(x), p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має точно m коренів $\zeta_j^{+}(x, t, \xi, p)$, $j = 1, \ldots, m$, з додатною уявною частиною і m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

Умова 2. При кожному такому виборі x, t, ξ та p многочлени

$$B_j(x, t, \xi + \zeta\nu(x), p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta = m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x, t) (\xi + \zeta\nu(x))^{\alpha} p^{\beta}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ лінійно незалежні за модулем многочлена $\prod_{j=1}^{m} (\zeta - \zeta_j^{+}(x, t, \xi, p))$.

2. Простори Хермандера, пов'язані з задачею. Вони є окремим випадком гільбертових функціональних просторів $H^{\mu} := \mathrm{B}_{2,\mu}$, введених і досліджених Л. Хермандером у [8] (п. 2.2). Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де ціле

$k \geqslant 1$, є вимірна за Борелем функція $\mu : \mathrm{R}^k \to (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що $\mu(\xi)/\mu(\eta) \leqslant c(1+|\xi-\eta|)^l$ для довільних $\xi, \eta \in \mathrm{R}^k$.

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\mu}(\mathrm{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in S'(\mathrm{R}^k)$, перетворення Фур'є $\hat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|^2_{H^{\mu}(\mathrm{R}^k)} := \int\limits_{\mathrm{R}^k} \mu^2(\xi)\,|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi < \infty .$$

(У роботі всі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.) Цей простір є гільбертовим відносно норми $\|w\|_{H^{\mu}(\mathrm{R}^k)}$.

Нам знадобиться версія простору $H^{\mu}(\mathrm{R}^k)$ для довільної відкритої непорожньої множини $V \subset \mathrm{R}^k$. Лінійний простір $H^{\mu}(V)$ складається, за означеннням, із звужень $u = w|_V$ усіх розподілів $w \in H^{\mu}(\mathrm{R}^k)$ на множину V. У цьому просторі задана норма за формулою

$$\|u\|_{H^{\mu}(V)} := \inf\{\|w\|^2_{H^{\mu}(\mathrm{R}^k)} : w \in H^{\mu}(\mathrm{R}^k), \quad u = w|_V\}.$$

Простір $H^{\mu}(V)$ є гільбертовим відносно цієї норми.

Для зручності позначень приймемо $\gamma := 1/(2b)$. Надалі будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\mu_{s,\varphi}(\xi', \xi_k) := \mu(\xi', \xi_k) := (1+|\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{s/2}\varphi((1+|\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}), \tag{4}$$

де $\xi' \in \mathrm{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathrm{R}$ — аргументи функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас M.

За означенням, клас M складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to \to (0, \infty)$, які задовольняють такі дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, c]$, де $1 < c < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, тобто $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to 1$ при $r \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у монографії [14]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\ln r)^{q_1} (\ln\ln r)^{q_2} \ldots (\underbrace{\ln \ldots \ln r}_{k \text{ разів}})^{q_k} \ \text{ при } r >> 1,$$

де параметри $k \in \mathrm{N}$ та $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathrm{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathrm{R}$ і $\varphi \in \mathrm{M}$. Розв'язки u початково-крайової задачі (1)—(3) та праві частини f рівняння (1) будемо розглядати в анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega) := H^{\mu}(\Omega)$ де показник μ визначений формулою (4), у якій $k := n+1$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва порядку $(s, s\gamma)$; позначимо його через $H^{s, s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x, t)$ за просторовою змінною $x \in \Omega$, а $s\gamma$ — показник регулярності за часовою змінною $t \in (0, \tau)$. У загальному випадку, коли $\varphi \in \mathrm{M}$ є довільною, правильні неперервні і щільні вкладення

$$H^{s_1, s_1\gamma}(\Omega) \subset H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega) \subset H^{s_0, s_0\gamma}(\Omega) \ \text{ при } s_0 < s < s_1. \tag{5}$$

Нам знадобляться також анізотропні простори Хермандера, задані на бічній поверхні $S=\Gamma\times(0,\tau)$ циліндра Ω. До них будуть належати праві частини g_j крайових умов (2). Означимо ці простори, використовуючи спеціальні локальні карти на S (див. [15, п.1]). Нехай $s>0$ і $\varphi\in\mathrm{M}$. Попередньо, для відкритої смуги $\Pi:=\mathrm{R}^{n-1}\times(0,\tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi):=H^{\mu}(\Pi)$, де показник μ визначений формулою (4), у якій $k:=n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j:\mathrm{R}^{n-1}\leftrightarrow\Gamma_j$, де $j=1,\ldots,\lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Крім цього, довільно виберемо функції $\chi_j\in C^{\infty}(\Gamma),\ j=1,\ldots,\lambda$, такі, що $\operatorname{supp}\chi_j\subset\Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda}\chi_j=1$ на Γ.

За означенням, лінійний простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v\in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера $j\in\{1,\ldots,\lambda\}$ функція

$$v_j(y,t):=\chi_j(\theta_j(y))\,v(\theta_j(y),t)$$

аргументів $y\in\mathrm{R}^{n-1}$ і $t\in(0,\tau)$ належить до $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)$.

У просторі $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ задана норма за формулою

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)}:=\Bigl(\sum_{j=1}^{\lambda}\|v_j\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}\Bigr)^{1/2}.$$

Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми і не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [15] (теорема 1).

Введемо простори, до яких належать праві частини h_k початкових умов (3). Це ізотропні гільбертові простори Хермандера $H^{s;\varphi}(G):=H^{\mu}(G)$ з показником $\mu(\xi):=(1+|\xi|^2)^{s/2}\times\varphi((1+|\xi|^2)^{1/2})$ аргументу $\xi\in\mathrm{R}^n$.

Нарешті, для формулювання основного результату введемо необхідні локальні аналоги просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$, $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H^{s;\varphi}(G)$.

Нехай U є відкритою множиною в R^{n+1} такою, що $U\cap\Gamma=\varnothing$. Нехай $\omega:=U\cap\Omega\neq\varnothing$, $\pi_1:=U\cap\partial\Omega$, $\pi_2:=U\cap S$ і $\pi_3:=U\cap G$. Позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u\in H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\omega\cup\pi_1$. Подібно до цього, позначимо через $H^{s,\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v\in H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\pi_2$. Нарешті, позначимо через $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)$ лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w\in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{G})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\pi_3$.

Якщо $\varphi\equiv1$, то означені вище простори стають соболєвськими просторами (анізотропними на Ω і S або ізотропними на G). У цьому випадку будемо опускати індекс φ у позначеннях цих просторів.

3. Основні результати роботи тісно пов'язані з теоремою про ізоморфізми, які встановлює оператор, відповідний задачі (1)—(3) у введених вище просторах Хермандера. Сформулюємо цю теорему [13, теорема 2].

Нехай σ_0 є найменше ціле число таке, що $\sigma_0\geqslant 2m$, $\sigma_0\geqslant m_j+1$ для всіх $j\in\{1,\ldots,m\}$. Відмітимо, якщо $m_j\leqslant 2m-1$ для всіх $j\in\{1,\ldots,m\}$, то $\sigma_0=2m$.

Пов'яжемо із задачею (1), (2), (3) лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda u := (Au, B_1 u, \ldots, B_m u, u\big|_{\overline{G}}, \ldots, (\partial_t^{\varkappa-1} u)\big|_{\overline{G}}), \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{6}$$

Твердження 1. *Нехай довільно задані параметри: числовий* $s > \sigma_0$ *і функціональний* $\varphi \in \mathrm{M}$. *Тоді відображення (6) однозначно продовжується (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda : H^{s, s/(2b); \varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}. \tag{7}$$

Тут через $\mathcal{Q}^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}$ позначено гільбертів простір правих частин задачі, який означається таким чином. Якщо $s \notin \{\sigma_0 + r - 1/2 : r \in \mathrm{N}\}$, то $\mathcal{Q}^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}$ це підпростір гільбертового простору

$$\mathcal{H}^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi} := H^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}(\Omega) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2, (s-m_j-1/2)/(2b); \varphi}(S) \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b; \varphi}(G),$$

утворений усіма вектор-функціями

$$F := (f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{H}^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi},$$

що задовольняють природні умови узгодження правих частин задачі (1)—(3) (див., наприклад, [1, п. 11] або [12, п. 4]). Якщо $s \in \{\sigma_0 + r - 1/2 : r \in \mathrm{N}\}$, то означаємо гільбертів простір $\mathcal{Q}^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi}$ за допомогою інтерполяції:

$$\mathcal{Q}^{s-2m, (s-2m)/(2b); \varphi} := [\mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon, (s-2m-\varepsilon)/(2b); \varphi}, \mathcal{Q}^{s-2m+\varepsilon, (s-2m+\varepsilon)/(2b); \varphi}]_{1/2}. \tag{8}$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції зазначеної пари гільбертових просторів з числовим параметром 1/2. Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε.

Якщо $\varphi \equiv 1$, то оператор (7) діє у соболєвських просторах. Для них твердження 1 було доведено М.В. Житарашу [4, теорема 9.1]. Його результат охоплює граничний випадок $s = \sigma_0$. З цього результату випливає, що для кожної вектор-функції

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m, (\sigma_0-2m)/(2b)} \tag{9}$$

задача (1)—(3) має єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною (9).

Сформулюємо основні результати роботи.

Теорема 1. *Припустимо, що функція* $u \in H^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)—(3), праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m, (\sigma_0-2m)/(2b); \varphi}$$

для деяких дійсного числа $\sigma > \sigma_0$ *і функції* $\varphi \in \mathrm{M}$. *Тоді* $u \in H^{\sigma, \sigma/(2b); \varphi}(\Omega)$.

Теорема 2. *Нехай* $u \in H^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)—(3) з правими частинами (9). Припустимо, що для деяких* $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathrm{M}$ *виконуються включення*

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma-2m, (\sigma-2m)/(2b); \varphi}(\omega, \pi_1) \tag{10}$$

$$g_j \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma-m_j-1/2,\,(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\,\varphi}(\pi_2) \text{ для всіх } j\in\{1,\ldots,m\}, \tag{11}$$

$$h_k \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma-2bk-b;\,\varphi}(\pi_3) \text{ для всіх } k\in\{0,\ldots,\varkappa-1\}, \tag{12}$$

Тоді $u\in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma,\,\sigma/(2b);\,\varphi}(\omega,\pi_1)$.

У випадку, коли $\pi_1=\varnothing$, теорема 2 стверджує, що гладкість розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$. Якщо $\pi_3=\varnothing$, то ця теорема є наслідком теореми 4.2 з [11]. Якщо $\pi_1=\partial\Omega\setminus\Gamma$, $\pi_2=S$, $\pi_3=G$, то, згідно з теоремою 2, підвищення гладкості розв'язку відбувається на множині $\overline{\Omega}\setminus\Gamma$.

4. Обгрунтування результатів. Теорема 1 є прямим наслідком твердження 1. Теорема 2 виводиться із теореми 1. Наведемо схему доведення теореми 2. Спочатку покажемо, що з умов (10)—(12) цієї теореми випливає правильність імплікації

$$u\in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,\,(\sigma-\lambda)/(2b);\,\varphi}(\omega,\pi_1) \Rightarrow u\in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda+1,\,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\,\varphi}(\omega,\pi_1) \tag{13}$$

для кожного цілого $\lambda\geqslant 1$ такого, що $\sigma-\lambda+1>\sigma_0$.

Виберемо довільну функцію $\chi\in C^\infty(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi\subset\omega\cup\pi_1$. Для χ існує функція $\eta\in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\eta\subset\omega\cup\pi_1$ і $\eta=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставляючи кожний з диференціальних операторів A, B_j і ∂_t^k з оператором множення на χ, можемо записати

$$\begin{aligned}\Lambda(\chi u) &= \Lambda(\chi\eta u)=\chi\Lambda(\eta u)+\Lambda'(\eta u)=\\ &=\chi\Lambda u+\Lambda'(\eta u)=\chi(f,g_1,\ldots,g_m,h_0,\ldots,h_{\varkappa-1})+\Lambda'(\eta u).\end{aligned} \tag{14}$$

Тут $\Lambda':=(A',B_1',\ldots,B_m',C_0',\ldots,C_{\varkappa-1}')$ — диференціальний оператор, кожна компонента якого має нижчий (принаймні на одиницю) порядок, ніж відповідний їй оператор A, B_j і ∂_t^k. Тому виконується імплікація

$$u\in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,\,(\sigma-\lambda)/(2b);\,\varphi}(\omega,\pi_1) \Rightarrow \Lambda'(\eta u)\in \mathrm{H}^{\sigma-\lambda+1-2m,\,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b);\,\varphi}.$$

На підставі (10)—(12) маємо включення $\chi(f,g_1,\ldots,g_m,h_0,\ldots,h_{\varkappa-1})\in\mathrm{H}^{\sigma-2m,\,(\sigma-2m)/(2b);\,\varphi}$. Тому, скориставшись (14), отримаємо імплікацію

$$u\in \mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,\,(\sigma-\lambda)/(2b);\,\varphi}(\omega,\pi_1) \Rightarrow \Lambda(\chi u)\in \mathrm{H}^{\sigma-\lambda+1-2m,\,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b);\,\varphi}. \tag{15}$$

Далі можна показати, що для довільного $s>\sigma_0$ з включення $\Lambda(\chi u)\in\mathrm{H}^{s-2m,\,(s-2m)/(2b);\,\varphi}$ і зробленого вибору функції χ випливає включення

$$\Lambda(\chi u)\in \mathrm{Q}^{s-2m,\,(s-2m)/(2b);\,\varphi}. \tag{16}$$

Для цього потрібно врахувати, що, оскільки $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi,\Gamma)>0$, то $\chi=0$ в деякому околі Γ. Тобто $\Lambda(\chi u)=0$ в цьому околі Γ.

Тепер з імплікації (15), включення (16) та теореми 1 випливає, що

$$u\in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,\,(\sigma-\lambda)/(2b);\,\varphi}(\omega,\pi_1) \Rightarrow \Lambda(\chi u)\in \mathrm{Q}^{\sigma-\lambda+1-2m,\,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b);\,\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi u\in H^{\sigma-\lambda+1,\,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\,\varphi}(\Omega).$$

Відмітимо, що тут теорема 1 застосовна, оскільки $\chi u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми 2 і $\sigma-\lambda+1>\sigma_0$. Тим самим імплікація (13) доведена, якщо зважити на зроблений вибір функції χ. Тепер з (13) індукцією випливає твердження теореми 2 (див., наприклад, доведення теореми 4.2 з [11]).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *Успехи мат. наук*. 1964. **19**, № 3. С. 53—161.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 с.
3. Lions J.-L., Magenes E. Non-homogeneous boundary-value problems and applications. Vol. 2. Berlin: Springer, 1972. xi+242 p.
4. Житарашу Н.В. Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И.Г. Петровскому уравнения. *Матем. сб.* 1985. **128(170)**, № 4. С. 451—473.
5. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. Киев: Выща шк., 1990. 200 с.
6. Eidel'man S.D. Parabolic equations. *Partial differential equations, VI*. Berlin: Springer, 1994. P. 205— 316. (Encyclopedia Mathematics Sciences; Vol. 63).
7. Eidel'man S.D., Zhitarashu N.V. Parabolic boundary value problems. Basel: Birkhäuser, 1998. xii+298 p.
8. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965. 380 с.
9. Mikhailets V.A., Murach A.A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin: De Gruyter, 2014. xiv+297 p.
10. Los V., Murach A.A. Parabolic problems and interpolation with a function parameter. *Methods Funct. Anal. Topology*. 2013. **19**, № 2. P. 146—160.
11. Los V., Mikhailets V.A., Murach A.A. An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications. *Commun. Pur. Appl. Anal.* 2017. **16**, № 1. P. 69—97. doi: https://doi.org/10.3934/cpaa.2017003
12. Los V., Murach A. Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces. *Open Mathematics*. 2017. **15**. P. 57—76. doi: https://doi.org/10.1515/math-2017-0008
13. Лось В.Н., Мурач А.А. Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2014. № 6. С. 23—31. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.06.023
14. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва: Наука, 1985. 144 с.
15. Los V.M. Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder. *J. Math. Sci.* 2016. **217**, № 4. P. 456—467. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-016-2985-9

Надійшло до редакції 11.04.2017

REFERENCES

1. Agranovich, M. S. & Vishik, M. I. (1964). Elliptic problems with parameters and parabolic problems of the general form. Usp. Mat. Nauk, 19, No. 3, pp. 53-161 (in Russian).
2. Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A. & Ural'tseva, N. N. (1967). Linear and Quasilinear Equations of the Parabolic Type. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Lions, J.-L. & Magenes, E. (1972). Non-homogeneous boundary-value problems and applications. Vol. 2. Berlin: Springer.
4. Zhitarashu, N. V. (1985). Theorems on complete collection of isomorphisms in the L_2-theory of generalized solutions for one equation parabolic in Petrovskii's sense. Mat. Sb., 128(170), No. 4, pp. 451-473 (in Russian).
5. Ivasyshen, S. D. (1990). Green Matrices of Parabolic Boundary-Value Problems. Kiev: Vyshcha Shkola (in Russian).

6. Eidel'man, S. D. (1994). Parabolic equations. In Partial differential equations, VI, Encyclopedia Mathematics Sciences, Vol. 63 (pp. 205-316). Berlin: Springer.
7. Eidel'man, S. D. & Zhitarashu, N. V. (1998). Parabolic boundary value problems. Basel: Birkhäuser.
8. Hörmander, L. (1963). Linear partial differential operators. Berlin: Springer.
9. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2014). Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin: De Gruyter.
10. Los, V. & Murach, A. A. (2013). Parabolic problems and interpolation with a function parameter. Methods Funct. Anal. Topology, 19, No. 2, pp. 146-160.
11. Los, V., Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2017). An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications. Commun. Pur. Appl. Anal., 16, No. 1, pp. 69-97. doi: https://doi.org/10.3934/cpaa.2017003
12. Los, V. & Murach, A. (2017). Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces. Open Mathematics, 15, pp. 57-76. doi: https://doi.org/10.1515/math-2017-0008
13. Los, V. M. & Murach, A. A. (2014). Parabolic mixed problems in spaces of generalized smoothness. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 6, pp. 23-31 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.06.023
14. Seneta, E. (1976). Regularly Varying Functions. Lecture Notes in Mathematics, vol. 508. Berlin: Springer.
15. Los, V. M. (2016). Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder. J. Math. Sci., 217, No. 4, pp. 456-467. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-016-2985-9

Received 11.04.2017

В.Н. Лось[1], *В.А. Михайлец*[2], *А.А. Мурач*[3]

[1] НТУ Украины "Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского"
[2, 3] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: v_los@yahoo.com, mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБЩИХ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ ХЕРМАНДЕРА

Доказаны теоремы о глобальной и локальной регулярности обобщенных решений общих параболических начально-краевых задач в пространствах Хермандера.

Ключевые слова: *параболическая начально-краевая задача, пространство Хермандера, обобщенное решение, локальная регулярность решения.*

V.M. Los[1], *V.A. Mikhailets*[2], *A.A. Murach*[3]

[1] NTU of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
[2, 3] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: v_los@yahoo.com, mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

REGULARITY OF SOLUTIONS TO GENERAL
PARABOLIC PROBLEMS IN HÖRMANDER SPACES

We prove theorems on global and local regularities of generalized solutions to general parabolic initial-boundary-value problems in Hörmander spaces.

Keywords: *parabolic initial-boundary-value problem, Hörmander space, generalized solution, local regularity of a solution.*