ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.12.003
УДК 517.927.25

Т.К. Юлдашев
Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Спектральная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

Рассмотрены вопросы существования и построения решений одной однородной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и со спектральным параметром. Изучены особенности, возникающие при построении решений и связанные с определением произвольных (неизвестных) постоянных. Вычислены значения спектрального параметра, для которых устанавливаются разрешимость краевой задачи и строятся соответствующие решения.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, спектральная задача, вырожденное ядро, разрешимость, спектральный параметр.*

1. Постановка задачи. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению начальных и граничных задач для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Изучение спектральных свойств и построение решений для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами представляют большой теоретический и практический интерес. Спектральные задачи для дифференциальных уравнений изучались в работах многих математиков (см., например, [1—3]). Различные задачи для интегро-дифференциальных уравнений рассматривались в [4—6], интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром — в [7—11]. В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными интегральными условиями рассматривались в [12—14]. В работе [15] рассматривалась нелокальная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения со спектральным параметром и интегральным условием.

В настоящей работе изучается спектральная задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром, спектральным параметром и интегральным условием. Вычисляются значения спектрального параметра, при которых устанавливается разрешимость рассматриваемой задачи и строятся соответствующие решения в случае их существования. Здесь не подходят стандартные методы, разработанные для исследования интегро-дифференциальных уравнений.

Задача. Требуется найти функцию $u(t)$, удовлетворяющую на интервале $(0;\pi)$ уравнению

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_0^\pi K(t,s)\,u(s)\,ds \tag{1}$$

и следующие однородные краевые условия:

$$u(\pi)=\int_0^\pi u(s)\,ds, \quad u'(\pi)=0, \tag{2}$$

где λ — положительный спектральный параметр; ν — действительный параметр; $K(t,s)=\sum_{i=1}^{k} a_i(t)\,b_i(s)\neq 0$, $a_i(t), b_i(s)\in C[0;\pi]$. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Поскольку краевые условия (2) однородны, интегро-дифференциальное уравнение (1) либо не имеет нетривиальных решений, либо имеет бесконечное множество решений. Наша цель определить, при каких спектральных значениях параметра λ задача не имеет нетривиальных решений, при каких спектральных значениях параметра λ задача имеет бесконечное множество решений и построить эти решения.

2. Построение решения краевой задачи (1), (2). С учетом вырожденности ядра уравнение (1) запишем в виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_0^\pi \sum_{i=1}^{k} a_i(t)b_i(s)u(s)\,ds. \tag{3}$$

С помощью обозначения

$$\tau_i=\int_0^\pi b_i(s)u(s)\,ds \tag{4}$$

уравнение (3) перепишется в виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\sum_{i=1}^{k} a_i(t)\tau_i$$

и решается методом вариации произвольных постоянных:

$$u(t)=A_1\cos\lambda t+A_2\sin\lambda t+\eta(t), \tag{5}$$

где A_1, A_2 — пока произвольные постоянные; $\eta(t)=\dfrac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\,h_i(t)$, $h_i(t)=\int_0^t \sin\lambda(t-s)\,a_i(s)\,ds$, $i=\overline{1,k}$. Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 в (5) используем первое из условий (2) и приходим к равенству

$$A_1\sigma_1(\lambda) = A_2\sigma_2(\lambda) + \xi_0, \tag{6}$$

где $\sigma_1(\lambda) = \sin\lambda\pi - \lambda\cos\lambda\pi$, $\sigma_2(\lambda) = \cos\lambda\pi + \lambda\sin\lambda\pi - 1$, $\xi_0 = \int_0^\pi \eta(s)\,ds - \eta(\pi)$.

Случай 1. В (6) положим, что

$$\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda) = 0\,. \tag{7}$$

Тогда из (6) получаем тривиальный результат: $\xi_0 = 0$, т. е. $\nu = 0$. В этом случае соответствующее дифференциальное уравнение $u''(t) + \lambda^2 u(t) = 0$ имеет бесконечное множество решений:

$$u(t,\lambda) = \omega_1\cos\lambda t + \omega_2\sin\lambda t, \tag{8}$$

где ω_1, ω_2 — произвольные постоянные.

Вычислим значения параметра λ, при которых имеет место (7). Пусть $\sigma_1(\lambda) = \sin\lambda\pi - \lambda\cos\lambda\pi = 0$ при некоторых λ. Это условие эквивалентно уравнению $\operatorname{tg}\lambda\pi = \lambda$, которое имеет решения

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda_n + n, \quad n \in N, \tag{9}$$

где N — множество натуральных чисел. Формула (9) является трансцендентным уравнением относительно λ_n. Так как $\lambda_n > 0$ и $\operatorname{arctg}\lambda_n$ — положительная возрастающая функция, то отсюда получим условие разрешимости для уравнения (9): $\lambda_n > n$. Его можно решить методом последовательных приближений

$$\lambda_{n,\mu} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda_{n,\mu} + n, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

или графическим способом

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_n, \\ \lambda = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda_n + n. \end{cases}$$

Пусть теперь при некоторых λ справедливо равенство $\sigma_2(\lambda) = \cos\lambda\pi + \lambda\sin\lambda\pi - 1 = 0$. Это условие эквивалентно уравнению $\cos(\lambda\pi - \theta(\lambda)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, где $\theta(\lambda) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. Отсюда получаем две серии решений:

$$\lambda_n = 2n,\ \lambda_n = \frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^2}} + 2n, n \in N. \tag{10}$$

Вторая формула в (10) является трансцендентным уравнением относительно λ_n. Его тоже можно решать методом последовательных приближений или графическим способом.

Множество всех значений параметра λ_n, определенных в формуле (9), обозначим через Λ_1. Множество всех значений параметра λ_n, определенных в формуле (10), обозначим через Λ_2. Общее число значений параметра λ_n, при которых имеет место условие (7), счетное. Но здесь $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. Поэтому функция (8) не может являться решением краевой задачи (1), (2). Следовательно, краевая задача (1), (2) в данном случае не имеет решений.

Таким образом, справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (7). *Тогда на отрезке* $[0;\pi]$ *краевая задача* (1), (2) *не имеет решений.*

Случай 2. В (6) положим, что

$$\sigma_1(\lambda_n) \neq 0, \quad \sigma_2(\lambda_n) = 0. \tag{11}$$

Тогда из (6) получаем, что $A_1 = \dfrac{\xi_0}{\sigma_1(\lambda_n)}$ и A_2 — произвольное число. В этом случае спектр параметра λ_n состоит из множества Λ_2, определенного формулой (10), и формула (5) принимает вид

$$u(t,\lambda_n) = \frac{\xi_0}{\sigma_1(\lambda_n)} \cos\lambda_n t + A_2 \sin\lambda_n t + \eta(t). \tag{12}$$

С учетом того, что $\eta(t) = \dfrac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i h_i(t)$, $\xi_0 = \int_0^{\pi}\eta(s)\,ds - \eta(\pi)$, преобразуем формулу (12):

$$u(t,\lambda_n) = A_2 \sin\lambda_n t + \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i \xi_i(t), \quad \lambda_n \in \Lambda_2, \tag{13}$$

где $\xi_i(t) = \dfrac{\cos\lambda_n t}{\sigma_1(\lambda_n)}\left[\int_0^{\pi} h_i(s)\,ds - h_i(\pi)\right] + h_i(t)$.

Для определения коэффициента A_2 используется второе условие из (2):

$$u'(\pi,\lambda_n) = 0 = A_2\bar{\lambda}_n + \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i \xi_i'(\pi), \qquad \lambda_n \in \Lambda_2, \tag{14}$$

где $\bar{\lambda}_n = \lambda_n \cos\lambda_n \pi, \quad \lambda_n \in \Lambda_2$.

Из (14) находим A_2 и подставляем его в (13), получаем

$$u(t,\lambda_n) = \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\left[\xi_i(t) - \frac{\sin\lambda_n t}{\bar{\lambda}_n}\xi_i'(\pi)\right], \qquad \lambda_n \in \Lambda_2. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (4), приходим к однородной системе алгебраических уравнений (ОСАУ)

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{j=1}^{k}\tau_j H_{ij} = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{16}$$

где $H_{ij} = \int\limits_0^{\pi} b_i(s)\left[\xi_j(s) - \dfrac{\sin\lambda_n s}{\bar{\lambda}_n}\xi_j'(\pi)\right]ds$.

ОСАУ (16) имеет некоторое число $p\,(1 \leqslant p < k)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений $\{\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \ldots, \tau_k^{(l)}\}$, $l = \overline{1, p}$. Функции

$$u_l(t, \lambda_n) = \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i^{(l)}\left[\xi_i(t) - \frac{\sin\lambda_n t}{\bar{\lambda}_n}\xi_i'(\pi)\right],\ l = \overline{1, p},$$

будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u(t, \lambda_n) = \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_0^{\pi}\Phi_i(t, s)\,u(s, \lambda_n)\,ds, \tag{17}$$

где $\Phi_i(t, s) = \left[\xi_i(t) - \dfrac{\sin\lambda_n t}{\bar{\lambda}_n}\xi_i'(\pi)\right]b_i(s)$.

Общее решение однородного интегрального уравнения (17) можно записать в виде

$$u(t, \lambda_n) = \sum_{l=1}^{p}\alpha_l u_l(t, \lambda_n), \tag{18}$$

где α_l — произвольные постоянные.

Таким образом, справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (11). *Тогда для всех значений* $\lambda_n \in \Lambda_2$ *краевая задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество решений, имеющих вид* (18) *на отрезке* $[0; \pi]$.

Случай 3. В (6) положим, что

$$\sigma_1(\lambda_n) = 0, \quad \sigma_2(\lambda_n) \neq 0. \tag{19}$$

Тогда задача решается аналогично предыдущему случаю 2. Из (6) получаем, что A_1 — произвольное число и $A_2 = -\dfrac{\xi_0}{\sigma_2(\lambda_n)}$. В этом случае спектр параметра λ_n состоит из множества Λ_1, определенного формулой (9), и формула (5) приобретает вид

$$u(t, \lambda_n) = A_1\cos\lambda_n t + \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\zeta_i(t), \qquad \lambda_n \in \Lambda_1, \tag{20}$$

где $\zeta_i(t) = h_i(t) - \dfrac{\sin\lambda_n t}{\sigma_2(\lambda_n)}\left[\int\limits_0^{\pi}h_i(s)\,ds - h_i(\pi)\right]$.

Для определения неизвестного коэффициента A_1 используем второе условие из (2):

$$u'(\pi, \lambda_n) = 0 = -A_1\tilde{\lambda}_n + \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\zeta_i'(\pi), \qquad \lambda_n \in \Lambda_1, \tag{21}$$

где $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n \sin \lambda_n \pi$. Из (21) находим A_1 и подставляем его в (20):

$$u(t,\lambda_n) = \frac{\nu}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{k} \tau_i \left[\zeta_i(t) + \frac{\cos \lambda_n t}{\tilde{\lambda}_n} \zeta_i'(\pi) \right], \quad \lambda_n \in \Lambda_1, \tag{22}$$

Подставляя (22) в (4), приходим снова к ОСАУ

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda_n} \sum_{j=1}^{k} \tau_j \mathrm{P}_{ij} = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{23}$$

где $\mathrm{P}_{ij} = \int\limits_0^\pi b_i(s) \left[\zeta_i(s) + \frac{\cos \lambda_n s}{\tilde{\lambda}_n} \zeta_i'(\pi) \right] ds$.

ОСАУ (23) имеет некоторое число $q (1 \leqslant q < k)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений $\{\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \ldots, \tau_k^{(l)}\}$, $l = \overline{1,q}$. Функции

$$u_l(t,\lambda_n) = \frac{\nu}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{k} \tau_i^{(l)} \left[\zeta_i(t) + \frac{\cos \lambda_n t}{\tilde{\lambda}_n} \zeta_i'(\pi) \right], \; l = \overline{1,q},$$

будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u(t,\lambda_n) = \frac{\nu}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^\pi \Psi_i(t,s)\, u(s,\lambda_n)\, ds, \tag{24}$$

где $\Psi_i(t,s) = \left[\zeta_i(t) + \frac{\cos \lambda_n t}{\tilde{\lambda}_n} \zeta_i'(\pi) \right] b_i(s)$.

Общее решение однородного интегрального уравнения (24) можно записать в виде

$$u(t,\lambda_n) = \sum_{l=1}^{q} \beta_l u_l(t,\lambda_n), \tag{25}$$

где β_l — произвольные постоянные.

Таким образом, справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* (19). *Тогда на отрезке* $[0;\pi]$ *при всех значениях параметра* $\lambda_n \in \Lambda_1$ *краевая задача* (1), (2) *имеет решение в виде* (25).

Случай 4. Положим, что

$$\sigma_1(\lambda_n) \neq 0, \quad \sigma_2(\lambda_n) \neq 0. \tag{26}$$

Тогда из (6) получаем, что

$$u(t,\lambda_n) = A_2 \left(\frac{\sigma_2(\lambda_n)}{\sigma_1(\lambda_n)} \cos \lambda_n t + \sin \lambda_n t \right) + \varsigma(t), \tag{27}$$

где $\varsigma(t)=\dfrac{\xi_0}{\sigma_1(\lambda_n)}\cos\lambda_n t+\eta(t)$. Теперь при $\lambda_n\in(0;\infty)\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2)$ воспользуемся вторым условием формулы (2) и из (27) приходим к равенству

$$0=u'(\pi,\lambda_n)=\lambda_n A_2\left(-\frac{\sigma_2(\lambda_n)}{\sigma_1(\lambda_n)}\sin\lambda_n\pi+\cos\lambda_n\pi\right)+\varsigma'(\pi)=\lambda_n A_2\frac{\sigma_3(\lambda_n)}{\sigma_1(\lambda_n)}+\varsigma'(\pi), \tag{28}$$

где $\sigma_3(\lambda_n)=\sin\lambda_n\pi-\lambda_n$. Здесь для определения неизвестного коэффициента A_2 требуем выполнения следующего условия

$$\sigma_3(\lambda_n)=\sin\lambda_n\pi-\lambda_n\neq 0\,. \tag{29}$$

Тогда из (28) находим A_2:

$$A_2=-\frac{\sigma_1(\lambda_n)}{\sigma_3(\lambda_n)}\frac{\varsigma'(\pi)}{\lambda_n}. \tag{30}$$

С учетом того, что $\varsigma(t)=\dfrac{\xi_0}{\sigma_1(\lambda_n)}\cos\lambda_n t+\eta(t)$, $\xi_0=\int\limits_0^\pi\eta(s)ds-\eta(\pi)$, $\eta(t)=\dfrac{\nu}{\lambda_n}\sum\limits_{i=1}^k\tau_i h_i(t)$, подставляем (30) в (27) и получаем

$$u(t,\lambda_n)=\frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^k\tau_i D_i(t), \tag{31}$$

где

$$D_i(t)=h_i(t)+\delta(t)h_i'(\pi)+\frac{1}{\sigma_1(\lambda_n)}\left[\int_0^\pi h_i(s)ds-h_i(\pi)\right]\left[\cos\lambda_n t+\delta(t)\sin\lambda_n\pi\right],$$

$$\delta(t)=\frac{\sigma_2(\lambda_n)}{\sigma_3(\lambda_n)}\cos\lambda_n t+\frac{\sigma_1(\lambda_n)}{\sigma_3(\lambda_n)}\sin\lambda_n t,$$

$$h_i(t)=\int_0^t\sin\lambda_n(t-s)\,a_i(s)ds,\quad i=\overline{1,k}\,.$$

Определим, при каких значениях параметра λ_n имеет место (31). Предположим, что нарушается условие (29), т. е. $\sigma_3(\lambda_n)=\sin\lambda_n\pi-\lambda_n=0$ при некоторых λ_n. Это условие эквивалентно тригонометрическому уравнению $\sin\lambda_n\pi=\lambda_n$, которое имеет решения

$$\lambda_n=\frac{\arcsin\lambda_n}{\pi},\quad \lambda_n=1-\frac{\arcsin\lambda_n}{\pi} \tag{32}$$

в предположении, что $\lambda_n\leqslant 1$. Формулы в (32) также являются трансцендентным уравнением относительно λ_n. Если $\lambda_n>1$, то условие (29) всегда выполняется. Множество всех значений параметра λ_n, определенных в формуле (32), обозначим через Λ_3. Итак, формула (31) имеет место для всех $\lambda_n\in(0;\infty)\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3)$.

Подставляя (31) в (4), приходим к ОСАУ

$$\tau_i - \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{j=1}^{k}\tau_j\Theta_{ij} = 0, \quad i=\overline{1,k}, \tag{33}$$

где $\Theta_{ij} = \int\limits_0^\pi b_i(s)\,D_j\,(s)ds$.

ОСАУ (33) имеет некоторое число $r\,(1 \leqslant r < k)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений $\{\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \ldots, \tau_k^{(l)}\}$, $l = \overline{1,r}$. Функции

$$u_l(t,\lambda_n) = \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i^{(l)}D_i(t)\,,\; l=\overline{1,r}\,,$$

будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u(t,\lambda_n) = \frac{\nu}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_0^\pi W_i(t,s)\,u\,(s,\lambda_n)ds\,, \tag{34}$$

где $W_i(t,s) = D_i(t)\,b_i\,(s)$.

Общее решение однородного интегрального уравнения (34) можно записать в виде

$$u(t,\lambda_n) = \sum_{l=1}^{r}\gamma_l u_l(t,\lambda_n)\,, \tag{35}$$

где γ_l — произвольные постоянные.

Таким образом, справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* (26) *и* (29). *Тогда для всех значений* $\lambda_n \in (0;\infty)\setminus(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cup \Lambda_3)$ *краевая задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество решений, имеющих вид* (35) *на отрезке* $[0;\pi]$.

Случай 5. Положим, что

$$\sigma_1(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_2(\lambda) \neq 0, \quad \sigma_3(\lambda) = 0\,. \tag{36}$$

Из равенства (28) следует, что должно удовлетворяться условие $\varsigma'(\pi) = 0$. Это условие равносильно условию

$$\sin\lambda_n\pi = 0\,,\ \text{т. е.}\ \ \lambda_n = n, \quad n \in N\,. \tag{37}$$

Четные значения параметра из (37) $\lambda_n = 2n, \quad n \in N$, являются элементами множества Λ_2. Поэтому нас интересуют нечетные значения параметра $\lambda_n = 2n-1, \quad n \in N$. Множество нечетных натуральных чисел обозначим Λ_4. В соответствии с последним условием из (36), если $\Lambda_3 \cap \Lambda_4$ — не пустое множество, то решения спектральной задачи (1), (2) существуют. Но, к сожалению, $\Lambda_3 \cap \Lambda_4$ — пустое множество. Поэтому спектральная задача (1), (2) в данном случае не имеет нетривиальных решений на отрезке $[0;\pi]$.

Таким образом, справедлива следующая

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2018. № 12

Лемма 5. *Пусть выполняются условия* (36). *Тогда на отрезке* $[0;\pi]$ *ни для каких значений параметра* λ_n *краевая задача* (1), (2) *не имеет нетривиального решения.*

3. Заключение. Из справедливости доказанных выше лемм следует, что справедлива

Теорема. *Пусть выполняются условия* (7) *или* (36). *Тогда спектральная задача* (1), (2) *не имеет нетривиальных решений на отрезке* $[0;\pi]$. *Если выполняются условия* (11) *или* (19) *либо* (26) *и* (29), *то спектральная задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество решений на отрезке* $[0;\pi]$. *При этом* $\lambda_n \in (0;\infty)\setminus\Lambda_3$. *Решения спектральной задачи* (1), (2) *имеют вид* (18) *при* $\lambda_n \in \Lambda_2$*; решения имеют вид* (25) *при* $\lambda_n \in \Lambda_1$*; решения имеют вид* (35) *при* $\lambda_n \in (0;\infty)\setminus(\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3)$. *Кроме того,* $\left|u(t,\lambda_n)\right| \to 0$, *если* $\left|\nu\right| < 1$ и $\lambda_n \to \infty$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин Е.Д. Решение многопараметрической спектральной задачи для слабосвязанных систем гамильтоновых уравнений второго порядка. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2015. **55**, № 1. С. 46—55.
2. Смирнов Ю. Г. Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение TE- и TM-волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2015. **55**, № 3. С. 460—468.
3. Cetinkaya F.A., Mamedov K.R. A boundary value problem wih retarded argument and discontinuous coefficient in the differential equation. *Azerbaijan J. Math.* 2017. № 1. С. 130—141.
4. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. *Матем. заметки.* 2017. **102**, № 1. С. 28—38.
5. Смирнов Ю.Г. Об эквивалентности электромагнитной задачи дифракции на неоднородном ограниченном диэлектрическом теле объемному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2016. **56**, № 9. С. 1657—1666.
6. Фалалеев М.В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения. *Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Матем.* 2012. **5**, № 2. С. 90—102.
7. Бойчук А.А., Страх А.П. Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-динамических уравнений с вырожденным ядром на временной шкале. *Нелинейные колебания.* 2014. **17**, № 1. С. 32—38.
8. Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. *Нелинейные колебания.* 2015. **18**, № 4. С. 489—506.
9. Юлдашев Т.К. Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром. *Укр. мат. журн.* 2016. **68**, № 8. С. 1115—1131.
10. Юлдашев Т.К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром. *Дифференц. уравнения.* 2017. **53**, № 1. С. 101—110.
11. Yuldashev T.K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel. *Lobachevskii J. Math.* 2017. **38**, № 3. С. 547—553.
12. Даровская К.А., Скубачевский А.Л. Об одной спектральной задаче с интегральными условиями. *Тр. сем. им. И.Г. Петровского.* 2011. **28**, С. 147—160.
13. Подъяпольский В. В. Суммируемость по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи с интегральными условиями. *Мат. заметки.* 1999. **65**, № 5. С. 797—800.
14. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями. *Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.* 1982. № 6. С. 12—21.
15. Юлдашев Т.К. Разрешимость и определение коэффициента в одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 5. С. 8—16. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.008

Поступило в редакцию 14.08.2018

REFERENCES

1. Kalinin, E. D. (2015). Solving the multiparameter eigenvalue problem for weakly coupled systems of second order Hamilton equations. Comput. Math. Math. Phys., 55, No. 1, pp. 43-52.
2. Smirnov, Yu. G. (2015). Eigenvalue transmission problems describing the propagation of TE and TM waves in two-layered inhomogeneous anisotropic cylindrical and planar waveguides. Comput. Math. Math. Phys., 55, No. 3, pp. 461-469.
3. Cetinkaya, F. A. & Mamedov, K. R. (2017). A boundary value problem wih retarded argument and Discontinuous coefficient in the differential equation. Azerbaijan J. Math., No. 1, pp. 130-141.
4. Bobodzhanov, A. A. & Safonov, V. F. (2017). Regularized asymptotic solutions of the initial problem for the system of integro-partial differential equations. Math. Notes, 102, No. 1, pp. 22-30.
5. Smirnov, Yu. G. (2016). On the equivalence of the electromagnetic problem of diffraction by an inhomogeneous bounded dielectric body to a volume singular integro-differential equation. Comput. Math. Math. Phys., 56, No. 9, pp.1631-1640.
6. Phalaleev, M. V. (2012). Integro-differential equations with Fredholm operator on the highest derivative in Banach spaces and their applications. Izv. Irkutskogo gos. univ. Ser. Matem., 5, No. 2, pp. 90-102 (in Russian).
7. Boichuk, A. A. & Strakh, A. P. (2014). Noetherian boundary-value problems for systems of linear integrodynamical equations with degenerate kernel on a time scale. Nonlinear oscillations, 17, No. 1, pp. 32-38 (in Russian).
8. Djumabaev, D. S. & Bakirova, E. A. (2015). On one single solvability of boundary value problem for a system of Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel. Nonlinear oscillations, 18, No. 4, pp. 489-506 (in Russian).
9. Yuldashev, T. K. (2016). Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integrodifferential equation with degenerate kernel. Ukr. Math. J., 68, No. 8, pp. 1278-1296.
10. Yuldashev, T. K. (2017). Mixed problem for pseudoparabolic integrodifferential equation with degenerate kernel. Diff. Equat., 53, No. 1, pp. 99-108.
11. Yuldashev, T. K. (2017). Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel. Lobachevskii J. Math., 38, No. 3, pp. 547-553.
12. Darovskaya, K. A. & Skubachevsky, A. L. (2011). A spectral problem with integral conditions. J. Math. Sci., 179, No. 3, pp. 437-445.
13. Pod"yapol'skii, V. V. (1999). Abel summability of a system of root functions for a nonlocal problem with integral conditions. Math. Notes, 65, No. 5, pp. 672-675.
14. Shkalikov, A. A. (1982). On the basis property of the eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions. Vestn. Moskov. univ. Ser. 1. Matematika, mekhanika, No. 6, pp. 12-21 (in Russian).
15. Yuldashev, T. K. (2017). Solvability and determination of the coefficient in one boundary-value problem for the integro-differential Fredholm equation with a degenerate kernel. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 5, pp. 8-16 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.008

Received 14.08.2018

Т. К. Юлдашев

Сибірський державний університет науки і технологій
ім. акад. М. Ф. Решетньова, Красноярськ, Росія
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто питання існування та побудови розв'язків однієї однорідної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння Фредгольма другого порядку з виродженим ядром і зі спектральним параметром. Вивчено особливості, що виникають під час побудови розв'язків і пов'язані з визначенням довільних (невідомих) сталих. Обчислено значення спектральних параметрів, для яких встановлюються розв'язність крайової задачі та будуються відповідні розв'язки.

Ключові слова: *інтегро-диференціальне рівняння, спектральна задача, вироджене ядро, розв'язність, спектральний параметр.*

T.K. Yuldashev

Reshetnev Siberian State University of Sciences and Technology, Krasnoyarsk, Russia
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

SPECTRAL PROBLEM FOR A FREDHOLM SECOND-ORDER
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

The questions of existence and construction of solutions of a homogeneous boundary value-problem for a second-order Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and with spectral parameter are considered. The singularities that arise in the construction of solutions and are associated with the definition of arbitrary (unknown) constants are studided. The values of spectral parameters, for which the solvability of the boundary-value problem is proved and the corresponding solutions are constructed, are calculated.

Keywords: integro-differential equation, spectral problem, degenerate kernel, solvability, spectral parameter.