doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.022
УДК 517.9

С.М. Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
E-mail: chujko-slav@ukr.net

Узагальнення теореми Ньютона—Канторовича в банаховому просторі

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.Я. Гутлянським

Побудовано модифікацію класичного методу Ньютона—Канторовича в банаховому просторі. Для знаходження розв'язку нелінійного операторного рівняння отримано ітераційну схему із квадратичною збіжністю. Продемонстровано, що побудована модифікація методу Ньютона—Канторовича застосовна для знаходження наближень до розв'язків нелінійних інтегральних та диференціально-алгебраїчних крайових задач.

Ключові слова: *модифікований метод Ньютона—Канторовича, банахів простір, нелінійне операторне рівняння, квадратична збіжність.*

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про побудову розв'язків нелінійного операторного рівняння

$$F(z)=0. \tag{1}$$

Оператор

$$F(z): B_1 \to B_2, \quad \Omega \subseteq B_1,$$

який діє з деякого банахова простору B_1 до банахова простору B_2, вважаємо двічі неперервно диференційовним за z у деякій області Ω. Припустимо, що оператор F має лінійну нетерову частину [1, 2]. Для знаходження розв'язку $\tilde{z} \in \Omega$ нелінійного рівняння (1) побудуємо модифікацію класичного методу Ньютона [3—5]. Інтерес до розвитку методу Ньютона пов'язаний з його ефективним застосуванням для розв'язання нелінійних рівнянь, у тому числі в теорії нелінійних коливань [3—6], зокрема в теорії нелінійних нетерових крайових задач [1, 7—10]. Припустимо, що знайдено наближення z_k, досить близьке до розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (1). Розвинемо оператор F в околі точного розв'язку:

$$F(\tilde{z}) = F(z_k) + F'(z_k)(\tilde{z}-z_k) + R(\xi_k, \tilde{z}-z_k), \tag{2}$$

де

$$R(\xi_k, \tilde{z}-z_k) := \int_0^1 (1-s)\, d^2F(\xi_k, \tilde{z}-z_k)\, ds, \quad \xi_k := \tilde{z} + s(\tilde{z}-z_k);$$

тут ξ_k — точка, розташована між точками $\tilde{z}$ та $z_k; F'$ — похідна за Фреше; лінійний неперервний нетерів оператор [3, с. 636]:

$$\dim N(F') - \dim N(F'^{*}) = s - k < \infty.$$

У малому околі точного розв'язку має місце наближена рівність $F(z_k) + F'(z_k)(\tilde{z} - z_k) \approx 0$, тому для знаходження нижченаведеного наближення до точного розв'язку природно покласти

$$F(z_k) + F'(z_k)(z_{k+1} - z_k) = 0, \tag{3}$$

звідки за умови

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := F'(z_k) \tag{4}$$

знаходимо

$$z_{k+1} = z_k - J_k^{+} F(z_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{5}$$

Тут $P_{J_k^*} : B_2 \to \ker(J_k^*)$ — ортопроектор на нуль-простір спряженого оператора J_k^*; J_k^+ — псевдообернений оператор [1]. Зазначимо, що умова (4) рівнозначна вимозі повноти рангу оператора J_k.

2. Ітераційна схема. Ітераційна схема (5) збігається до точного розв'язку $\tilde{z}$. Дійсно, припустимо, що в околі $\tilde{z}$ мають місце нерівності $\| J_k^+ \| \leqslant \sigma_1(k)$ та

$$\| d^2 F(\xi_k, \tilde{z} - z_k) \| \leqslant \sigma_2(k) \| \tilde{z} - z_k \|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Із рівностей (2) і (3) випливає, що $F'(z_k)(\tilde{z} - z_k) = -R(\xi_k, \tilde{z} - z_k)$, отже

$$\| \tilde{z} - z_{k+1} \| \leqslant \frac{1}{2} \sigma_1(k) \sigma_2(k) \| \tilde{z} - z_k \|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Припустимо, що існує константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left(\frac{1}{2} \sigma_1(k) \sigma_2(k) \right).$$

За цієї умови має місце оцінка

$$\| \tilde{z} - z_{k+1} \| \leqslant \theta \| \tilde{z} - z_k \|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

яка свідчить про те, що у випадку збіжності ітераційної схеми (5) до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (1), ця збіжність — квадратична. Знайдемо умову збіжності ітераційної схеми (5) до точного розв'язку рівняння (1); для цього зробимо такі оцінки

$$\| \tilde{z} - z_1 \| \leqslant \theta \| \tilde{z} - z_0 \|^2, \quad \| \tilde{z} - z_2 \| \leqslant \theta^{1+2} \| \tilde{z} - z_0 \|^{2^2}, \dots ,$$

$$\| \tilde{z} - z_k \| \leqslant \theta^{1+2+\dots+2^{k-1}} \| \tilde{z} - z_0 \|^{2^k}, \dots.$$

Таким чином, має місце нерівність, аналогічна [5]

$$\| \tilde{z} - z_k \| \leqslant \frac{1}{\theta} (\theta \| \tilde{z} - z_0 \|)^{2^k}, \dots,$$

яка свідчить про збіжність ітераційної схеми (5) до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (1) за умови

$$\theta \| \tilde{z} - z_0 \| < 1. \qquad (6)$$

На практиці останню нерівність можна замінити на $\theta \| z_k - z_0 \| < 1$. Отже, доведено таке твердження.

Теорема. *Припустимо, що для рівняння* (1) *виконуються такі умови.*

1. Нелінійний оператор $F(z): B_1 \to B_2$, який діє з банахова простору B_1 до банахова простору B_2, двічі неперервно диференційовний за z в області $\Omega \subseteq B_1$ та має лінійну нетерову частину.

2. В околі нульового наближення $z_0 \in \Omega$ мають місце нерівності

$$\| J_k^+ \| \leqslant \sigma_1(k) \text{ та } \| d^2F(\xi_k, \tilde{z} - z_k) \| \leqslant \sigma_2(k) \| \tilde{z} - z_k \|^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

3. *Існує константа* θ.

Тоді за умов (4) *та* (6) *для знаходження розв'язку рівняння* (1) *застосовна ітераційна схема* (5), *при цьому швидкість збіжності послідовності до розв'язку рівняння* (1) *квадратична.*

Доведена теорема узагальнює відповідні результати [3, 5] на випадок довільного нетерова оператора і стане в нагоді у теорії нелінійних нетерових крайових задач [1, 7, 8, 10], зокрема в теорії нелінійних інтегральних крайових задач [2, 3, 9, 11]. З іншого боку, доведена теорема узагальнює відповідні результати [12], отримані для нелінійної вектор-функції $F(z): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ у випадку $m \neq n$.

3. Знаходження розв'язків інтегральних крайових задач. Розглянемо задачу про побудову розв'язків $z(t) := (u(t)\, v(t)\, w(t))^* \in C^1[0;1]$ задачі Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$Az'(t) = f(z(t)), \quad z(0) = \alpha, \qquad (7)$$

де

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(z(t)) := \begin{pmatrix} u^2(t) + w^2(t) \\ v^2(t) + w^2(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha := \frac{1}{10}\,(110)^*.$$

Поставлена задача рівнозначна задачі про побудову розв'язків $z(t) \in \mathbb{C}[0,1]$ нелінійного інтегрального рівняння

$$Az(t) = \int_0^t f(z(s))ds + \beta, \quad \beta := \frac{1}{10}(11)^*. \qquad (8)$$

Інтегральне рівняння (2) визначає інтегральний оператор

$$F(z(t)) := Az(t) - \int_0^t f(z(s))\, ds - \beta: \quad \mathbb{C}[0,1] \to \mathbb{C}[0,1],$$

який задовольняє вимоги доведеної теореми. У зазначеному просторі інтегральний оператор $F(z(t))$ двічі диференційовний:

$$F'_z(z(t)) = A - \int_0^t f'_z(z(s))ds\,,\ F''_{z^2}(z(t)) = -\int_0^t f''_{z^2}(z(s))ds\,.$$

Тут

$$f'_z(z(s)) = 2\begin{pmatrix} u(t) & 0 & w(t) \\ 0 & v(t) & w(t) \end{pmatrix},\quad df(z(t)) = 2\begin{pmatrix} u(t) & 0 & w(t) \\ 0 & v(t) & w(t) \end{pmatrix} dz(t),$$

крім того,

$$dz(t) = (du(t) \quad dv(t) \quad dw(t))^*.$$

Далі

$$d^2 f(z(t)) = 2\begin{pmatrix} du(t) & 0 & dw(t) \\ 0 & dv(t) & dw(t) \end{pmatrix},$$

$$dz(t) = 2\begin{pmatrix} d^2u(t) + d^2w(t) \\ d^2v(t) + d^2w(t) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо нерівність

$$\| d^2F(\xi_k; \tilde{z} - z_k) \| \leqslant 4 \cdot \| \tilde{z} - z_k \|^2,$$

отже, $\sigma_2(k) = 4, \quad k \in \mathbb{N}$. Покладемо для визначеності

$$u_0(t) := v_0(t) := \frac{1}{10} + \frac{t}{100} + \frac{t}{1000},\quad w_0(t) = 0.$$

Початкове наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_0(t)) := Az_0(t) - \int_0^t f(z_0(s))ds - \beta = -\frac{t^3(500 + 25t + t^2)}{5\,000\,000}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

похідна якого

$$F'(z_0(t)) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 - t - \dfrac{t^2}{20} - \dfrac{t^3}{300} & 0 & 0 \\ 0 & 5 - t - \dfrac{t^2}{20} - \dfrac{t^3}{300} & 0 \end{pmatrix}$$ — матриця повного рангу.

Отже, для початкового значення невідомої умову (4) виконано, тому знаходимо

$$z_1(t) = z_0(t) - J_0^+ F(z_0(t)) = \frac{-1\,500\,000 + 150\,000t + 30\,000t^2 + 4\,000t^3 + 175t^4 + 7t^5}{10\,000(-1500 + 300\,t + 15\,t^2 + t^3)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$\| \| z_1(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,188\,482.$$

Перше наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_1(t)) := A z_1(t) - \int_0^t f(z_1(s))\, ds - \beta,$$

похідна якого $F'(z_1(t))$ — матриця повного рангу. Отже, для першого наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того, $\| J_1^+ \| \leqslant \sigma_1(1) \approx 1{,}26\,699,$ тому знаходимо

$$\theta_1 \cdot \| \| z_1(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,477\,611 \ll 1,$$

де

$$\theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2}.$$

Таким чином, маємо

$$z_2(t) = z_1(t) - J_1^+ F(z_1(t)) \approx \left\{ \frac{1}{10} - \frac{24\,854\,086t}{524\,712\,893} + \frac{57\,864\,781t^2}{11\,838\,356\,065} + \frac{1\,614\,355t^3}{10\,856\,545\,956} + \right.$$
$$\left. + \frac{55\,293t^4}{56\,238\,206\,284} - \frac{72\,973t^5}{42\,889\,516\,970} \right\} \left\{ 1 - \frac{160\,658\,827t}{280\,054\,337} + \frac{22\,496\,936t^2}{233\,743\,901} - \frac{4\,914\,775t^3}{1\,445\,131\,398} - \right.$$
$$\left. - \frac{891\,626t^4}{6\,420\,726\,543} + \frac{98\,929t^5}{16\,480\,952\,675} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\| z_2(t) - z_0(t) \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,150\,384.$$

Друге наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_2(t)) := A z_2(t) - \int_0^t f(z_2(s))\, ds - \beta,$$

похідна якого $F'(z_2(t))$ — матриця повного рангу. Отже, для другого наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того, $\| J_2^+ \| \leqslant \sigma_1(2) \approx 1{,}26\,698,$ тому знаходимо

$$\theta_2 \cdot \| \| z_2(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,381\,067 \ll 1,$$

де

$$\theta_2 := \frac{\sigma_1(2)\sigma_2(2)}{2}.$$

Таким чином, отримуємо

$$z_3(t) = z_2(t) - J_2^+ F(z_2(t)) \approx \left\{ \frac{1}{10} - \frac{58t}{875} + \frac{23\,260\,196t^2}{1\,865\,722\,403} - \frac{882\,887t^3}{4\,303\,375\,297} - \frac{713\,837t^4}{12\,165\,647\,555} - \right.$$

$$\left. - \frac{10\,574\,608\,762t^5}{2\,643\,652\,190\,499\,999} \right\} \left\{ 1 - \frac{12\,182\,989\,873\,378t}{15\,970\,211\,444\,503} + \frac{268\,869\,282t^2}{1\,408\,009\,763} - \right.$$

$$\left. - \frac{9\,212\,507t^3}{634\,525\,197} - \frac{1\,370\,661t^4}{3\,591\,850\,925} + \frac{237\,563t^5}{12\,719\,923\,270} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\| \| z_3(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,158\,656.$$

Третє наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_3(t)) := Az_3(t) - \int_0^t f(z_3(s))\,ds - \beta,$$

похідна якого $F'(z_3(t))$ — матриця повного рангу. Отже, для третього наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того, $\| J_3^+ \| \leqslant \sigma_1(3) \approx 1{,}26\,698,$ тому знаходимо

$$\theta_3 \cdot \| \| z_3(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,402\,028 \ll 1,$$

де

$$\theta_3 := \frac{\sigma_1(3)\sigma_2(3)}{2}.$$

Таким чином, одержуємо

$$z_4(t) = z_3(t) - J_3^+ F(z_3(t)) \approx \left\{ \frac{1}{10} - \frac{158\,687\,237\,287t}{1\,716\,310\,813\,379} + \frac{7\,902\,959t^2}{265\,060\,490} - \frac{7\,268\,503t^3}{2\,106\,715\,632} - \right.$$

$$\left. - \frac{198\,044t^4}{13\,895\,580\,547} + \frac{269\,342t^5}{20\,870\,001\,053} + \frac{241\,270\,750t^6}{351\,853\,177\,083\,333} \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{2\,773\,024\,710\,114t}{2\,706\,490\,160\,339} + \frac{141\,824\,439t^2}{363\,079\,726} - \frac{15\,307\,703t^3}{238\,003\,009} + \right.$$

$$\left. + \frac{5\,772\,711t^4}{1\,745\,268\,151} + \frac{4\,071\,431t^5}{28\,410\,093\,353} - \frac{107\,305t^6}{17\,740\,590\,717} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\| \| z_4(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,156\,782.$$

Четверте наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_4(t)) := Az_4(t) - \int_0^t f(z_4(s))ds - \beta,$$

похідна якого $F'(z_4(t))$ — матриця повного рангу. Отже, для четвертого наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того, $\| J_4^+ \| \leqslant \sigma_1(4) \approx 1{,}26\,698,$ тому знаходимо

$$\theta_4 \cdot \| \| z_4(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,397\,278 \ll 1,$$

де

$$\theta_4 := \frac{\sigma_1(4)\sigma_2(4)}{2}.$$

Таким чином, отримуємо

$$z_5(t) = z_4(t) - J_4^+ F(z_4(t)) \approx$$

$$\approx \left\{ \frac{1}{10} - \frac{52\,534\,856\,695t}{442\,630\,524\,044} + \frac{13\,165\,626t^2}{243\,382\,597} - \frac{7\,162\,541t^3}{635\,163\,610} + \frac{2\,042\,711t^4}{2\,311\,774\,103} + \right.$$

$$\left. + \frac{215\,168t^5}{11\,040\,687\,289} - \frac{80\,217t^6}{26\,417\,913\,281} - \frac{8\,397\,319t^7}{69\,977\,658\,333\,333} \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{167\,715\,715\,017t}{130\,327\,564\,091} + \frac{117\,817\,661t^2}{178\,611\,349} - \frac{29\,319\,557t^3}{175\,712\,222} + \frac{13\,922\,546t^4}{692\,222\,983} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\,418\,728t^5}{3\,511\,890\,045} - \frac{338\,660t^6}{6\,793\,135\,723} + \frac{69\,247t^7}{37\,706\,734\,709} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\| \| z_5(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,157\,219.$$

Зазначимо також, що і початкове значення, і перші п'ять наближень до невідомої задовольняють умову Коші: $z_k(0) = \alpha, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$ П'яте наближення до невідомої визначає інтегральний оператор

$$F(z_5(t)) := Az_5(t) - \int_0^t f(z_5(s))ds - \beta,$$

похідна якого $F'(z_5(t))$ — матриця повного рангу. Отже, для п'ятого наближення до невідомої умову (4) виконано, крім того, $\| J_5^+ \| \leqslant \sigma_1(4) \approx 1{,}26\,698,$ тому знаходимо

$$\theta_5 \cdot \| \| z_5(t) - z_0(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,397\,278 \ll 1,$$

де

$$\theta_5 := \frac{\sigma_1(5)\sigma_2(5)}{2}.$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку задачі Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) визначимо відхилення перших п'яти наближень:

$$\Delta_k := \| \, \| A z_{k'}(t) - f(z_k(t)) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0;\,2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Таким чином, пересвідчуємося в зменшенні нульової та перших п'яти відхилень від ітерації до ітерації:

$$\Delta_0 \approx 0{,}000\,321, \quad \Delta_1 \approx 0{,}0000\,935\,517, \quad \Delta_2 \approx 0{,}0000\,265\,764,$$

$$\Delta_3 \approx 7{,}44\,232 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_4 \approx 2{,}06\,541 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_5 \approx 5{,}69\,721 \cdot 10^{-7}.$$

Для незалежної оцінки точності знайдених наближень до розв'язку задачі Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) визначимо відхилення перших п'яти наближень до розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (2):

$$\delta_k := \| \, \| A z_k(t) - \int_0^t f(z_k(s))ds - \beta \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0;\,2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Таким чином, пересвідчуємося в зменшенні нульової та перших п'яти відхилень від ітерації до ітерації:

$$\delta_0 \approx 0{,}000\,148\,775, \quad \delta_1 \approx 0{,}0000\,212\,625, \quad \delta_2 \approx 4{,}61\,648 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_3 \approx 1{,}04\,598 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_4 \approx 2{,}43\,778 \cdot 10^{-7}, \quad \delta_5 \approx 5{,}79\,623 \cdot 10^{-8}.$$

Зазначимо також, що задача Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) у припущенні $w(t) \equiv 0$ рівнозначна задачі Коші для скалярного звичайного диференціального рівняння

$$u'(t) = u^2(t), \quad u(0) = \frac{1}{10}, \tag{9}$$

розв'язок якого $u(t) = (10 - t)^{-1}$. Отже, задача Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) має частинний розв'язок

$$u(t) = v(t) = \frac{1}{10 - t}, \quad w(t) \equiv 0,$$

що дає змогу оцінити точність знайдених наближень до розв'язку задачі Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (9):

$$\| \| z_0(t) - z(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}000\,111\,111, \qquad \| \| z_1(t) - z(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 0{,}0000\,313\,473,$$

$$\| \| z_2(t) - z(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 4{,}77\,342 \cdot 10^{-6}, \qquad \| \| z_3(t) - z(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 1{,}07\,555 \cdot 10^{-6},$$

$$\| \| z_4(t) - z(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 2{,}49\,666 \cdot 10^{-7}, \qquad \| \| z_5(t) - z(t) \|_\infty \|_{\mathbb{C}[0,1]} \approx 5{,}91\,861 \cdot 10^{-8}.$$

Доведена теорема буде корисною в теорії нелінійних нетерових крайових задач [1, 3, 7—11], а також у теорії нелінійних крайових задач у частинних похідних [2, 13—15].

Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України. Номер державної реєстрації 0115U003182.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. 2th ed. Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. 298 p.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1991. 277 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва: Наука. 1977. 744 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1969. 248 с.
5. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. Москва: Мир. 1988. 440 с.
6. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике. *Труды ИСА РАН*. 2006. **28**. С. 48—66.
7. Chuiko S.M., Boichuk I.A. Autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations*. 2009. **12**, Iss. 3. P. 417—428.
8. Chuiko S.M., Boichuk I.A., Pirus O.E. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton—Kantorovich method. *J. Math. Sci.* 2013. **189**, № 5. P. 867—881.
9. Boichuk A.A., Holovats'ka I.A. Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. *J. Math. Sci.* 2014. **203**. № 3. P. 306—321.
10. Chuiko S.M., Pirus O.E. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. *J. Math. Sci.* 2013. **191**, № 3. P. 449—464.
11. Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. *Укр. мат. журн*. 1996. **48**, № 11. С. 1576—1579.
12. Chuiko S.M. To the generalization of the Newton—Kantorovich theorem. *Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. матем., прикл. матем. і механіка*. 2017. **85**. P. 62—68.
13. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Solutions of the Schrödinger equation in a Hilbert space. *Boundary Value Problems*. 2014. doi: https://doi.org/10.1186/1687-2770-2014-4
14. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation: a geometric approach. New York etc.: Springer, 2012. 314 p. (Developments in Mathematics; Vol. 26.).
15. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E. Toward the theory of the Dirichlet problem for the Beltrami equations. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. № 11. С. 23–29. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.11.023

Надійшло до редакції 29.01.2018

REFERENCES

1. Boichuk, A. A. & Samoilenko, A. M. (2004). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Berlin; Boston: Walter de Gruyter.
2. Azbelev, N. V., Maksimov, V. P. & Rakhmatullina, L. F. (1991). An introduction to the theory of functional differential equations. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1977). Functional analysis. Moscow: Nauka (in Russian).
4. Bogolyubov, N. N., Mitropol'skii, Yu. A. & Samoilenko, A. M. (1969). Method of accelerated convergence in nonlinear mechanics. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
5. Dennis, J. E. & Schnabel, R. B. (1996). Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Colorado: Society for Industrial and Applied Mathematics.
6. Polyak, B. T. (2006). Newton's method and its role in optimization and computational mathematics. Trudy ISA RAN, 28, pp. 48-66 (in Russian).
7. Chuiko, S.M., Boichuk, I.A. (2013). Autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. Nonlinear Oscillations. 2009, 12, Iss. 3, pp. 417-428.
8. Chuiko, S. M., Boichuk, I. A., & Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton—Kantorovich method. J. Math. Sci., 189, No. 5, pp. 867-881.
9. Boichuk, A. A. & Holovats'ka, I. A. (2014). Boundary-value problems for systems of integro-differential equations. J. Math. Sci., 203, No. 3, pp. 306-321.

10. Chuiko, S. M. & Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. J. Math. Sci., 191, No. 3, pp. 449-464.
11. Samoilenko, A. M., Boichuk, A. A., &Krivosheya, S. A. (1996). Boundary-value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel. Ukr. Math. J., 48, No. 11, pp. 1785-1789.
12. Chuiko, S. M. (2017). To the generalization of the Newton—Kantorovich theorem. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics", 85, pp. 62-68.
13. Boichuk, A. A., & Pokutnyi, A. A. (2014). Solutions of the Schrödinger equation in a Hilbert space. Boundary Value Problems. doi: https://doi.org/10.1186/1687-2770-2014-4
14. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2012). The Beltrami equation: a geometric approach, developments in mathematics, Vol. 26. New York etc: Springer.
15. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V. & Yakubov, E. (2015) Toward the theory of the Dirichlet problem for the Beltrami equations. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 11, pp. 23-29. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi 2015.11.023

Received 29.01.2018

С.М. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
E-mail: chujko-slav@ukr.net

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НЬЮТОНА—КАНТОРОВИЧА
В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Построена модификация классического метода Ньютона—Канторовича в банаховом пространстве. Для нахождения решения нелинейного операторного уравнения предложена итерационная схема с квадратичной сходимостью. Построен пример, иллюстрирующий применимость модифицированного метода Ньютона—Канторовича для нахождения приближений к решениям нелинейных интегральных и дифференциально-алгебраических краевых задач.

Ключевые слова: *модифицированный метод Ньютона—Канторовича, банахово пространство, нелинейные операторные уравнения, квадратичная сходимость.*

S.M. Chuiko

Donbas State Pedagogical University, Slov'yansk
E-mail: chujko-slav@ukr.net

A GENERALIZATION OF THE NEWTON—KANTOROVICH
THEOREM IN A BANACH SPACE

We present a modification of the Newton—Kantorovich method for nonlinear operator equations in a Banach space. We prove, under certain conditions, that this modified Newton—Kantorovich method has quadratic convergence. The modified Newton—Kantorovich method is used to solve some nonlinear integral and integral- differential equations.

Keywords: *modification of the Newton—Kantorovich method, Banach space, nonlinear operator equations, quadratic convergence.*