doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.035
УДК 539.421

М.Ф. Селіванов, Ю.О. Чорноіван

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

Модель зони зчеплення з нерівномірним законом зчеплення—відриву для системи декількох колінеарних тріщин

Представлено членом-кореспондентом НАН України В. М. Назаренком

Для оцінки граничного рівня навантаження на елементи конструкції, які містять тріщини із зонами передруйнування, широко використовується модель зони зчеплення. У статті розглянуто навантаження нескінченної пластини із системою колінеарних тріщин нормального відриву прикладеними на нескінченності розтягувальними зусиллями. Використано метод розв'язання задач механіки тріщин в рамках моделі зони зчеплення, який був запропонований авторами. Розв'язок для розкриттів тріщин знайдено для нерівномірного зв'язку між зчепленням та відривом з урахуванням умови плавності змикання берегів. Побудовано числові розв'язки для декількох значень параметра форми степеневого закону зчеплення—відриву. Проілюстровано залежність розкриття у вершинах фізичних тріщин від рівня зовнішнього навантаження. Встановлено, що його критичний рівень практично не залежить від параметра форми.

Ключові слова: *модель зони зчеплення, руйнування, закон зчеплення—відриву, функція форми, умова скінченності напружень, колінеарні тріщини.*

Руйнування квазікрихких матеріалів відбувається переважно внаслідок зародження, поширення та злиття мікротріщин. Біля вершин тріщин в таких матеріалах утворюються зони, що містять напівзруйнований матеріал, який ще здатний витримувати навантаження. Зони послаблених зв'язків біля вершин тріщини називають зонами процесу руйнування або зонами передруйнування. Моделювання цих зон у більшості випадків здійснюється в рамках моделі зони зчеплення з рівномірним законом зчеплення—відриву (модель Леонова—Панасюка—Дагдейла—Баренблата). Зону моделюють додатковим розрізом на продовженні тріщини, до берегів якого прикладено стягуючі береги напруження зчеплення σ сталої ($\sigma = \sigma_{\max}$, $\sigma_{\max}$ — міцність зчеплення, яка є параметром тріщиностійкості) або залежної від відстані до вершини інтенсивності ($\sigma = \sigma(x)$). Довжину додаткового розрізу називають довжиною зони передруйнування або довжиною зчеплення. Для знаходження цієї довжини слід задовольнити вимогу скінченності напружень у вершині зони (ця вимога еквівалентна умові плавності змикання берегів). У випадку декількох незалежних довжин зчеплення, їх

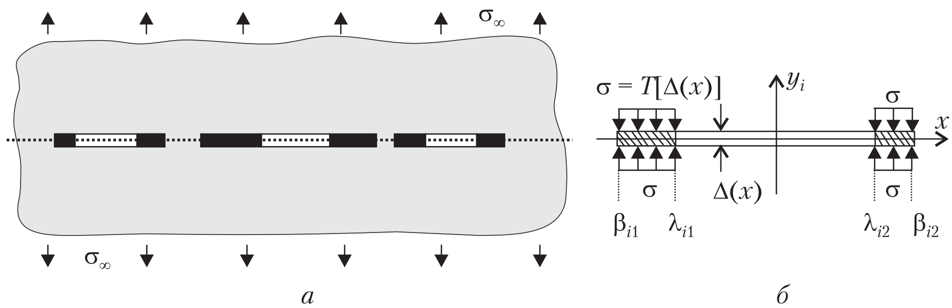

Рис. 1

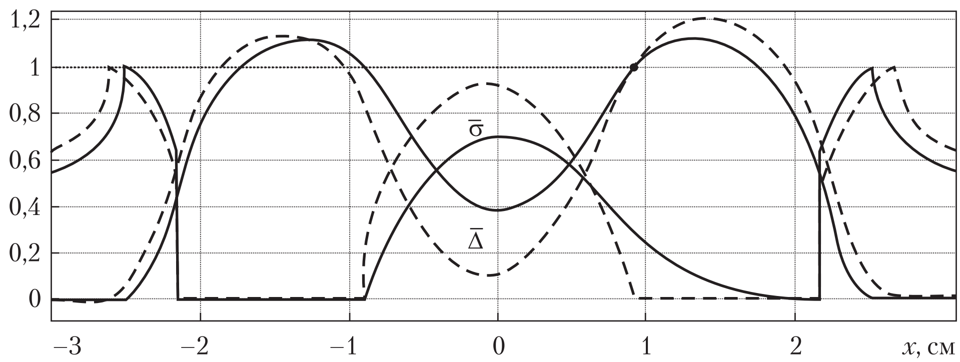

Рис. 2

можна визначити з системи відповідної кількості рівнянь і для визначених величин записати розв'язок (розкриття берегів тріщини). За величиною розкриття (відриву) у вершині фізичної тріщини можна дослідити стан граничної рівноваги (знайти або критичну комбінацію параметрів навантаження або граничний рівень довжини тріщини при заданому навантаженні). Стан граничної рівноваги досягається, коли розкриття у вершині фізичної тріщини та робота сил зчеплення одночасно досягають своїх критичних значень $\Delta_{\max}$ (критичне розкриття) та ϕ (енергія руйнування, другий параметр тріщиностійкості).

Вивчення процесу руйнування сучасних матеріалів не обмежується використанням рівномірного закону зчеплення—відриву. При використанні моделі зони зчеплення за нерівномірного закону ($\sigma = T(\Delta)$, Δ — відрив, що відповідає зчепленню σ) задача про систему колінеарних тріщин значно ускладнюється. Окрім двох основних параметрів тріщиностійкості $\sigma_{\max}$ та ϕ, у розгляд вводяться параметри форми (параметри функції T), вплив яких на граничний рівень навантаження треба з'ясовувати окремо. Для визначення довжин зчеплення слід розв'язувати нелінійну систему рівнянь відносно цих довжин числовим методом, на кожному кроці якого необхідно отримати розв'язок зв'язаної (зчеплення—відрив) задачі теорії пружності. Складнощі виникають і при дослідженні стану граничної рівноваги, який може бути досягнуто при навантаженні, більшому за те, яке відповідає максимально можливому розкриттю $\Delta_{\max}$ [1]. Іншими словами, залежність $\Delta(\lambda) - \sigma_\infty$ (λ характеризує розташування вершини фізичної тріщини з найбільшим розкриттям, σ_∞ — параметр зовнішнього навантаження) може набути свого максимально можливого значення у внутрішній точці інтервалу $(0, \Delta_{\max})$. Аналіз опублікованих досліджень з даної тематики свідчить про

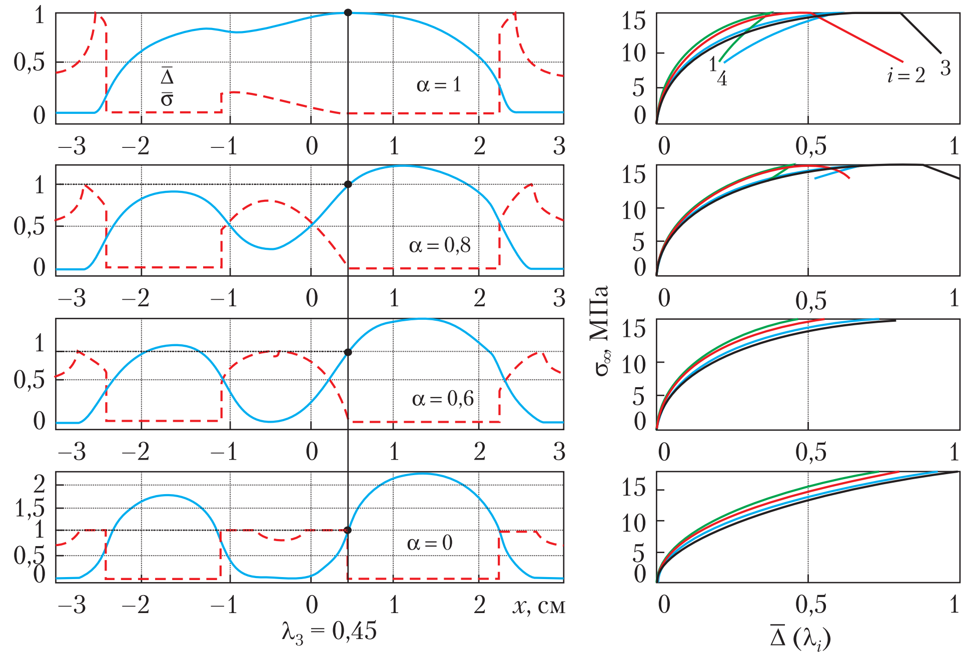

Рис. 3

те, що дослідниками ще не наведено прикладів розв'язання задач про систему колінеарних тріщин в рамках моделі зони зчеплення з нерівномірним законом зчеплення—відриву.

Вивченню взаємодії двох тріщин однакової довжини при $\sigma = \sigma_{max}$ присвячені роботи [2—4], для нерівних довжин розв'язки представлено в [5—7]. Для отримання розв'язку симетричної задачі слід, як і у випадку однієї несиметричної тріщини, знайти дві невідомі довжини зчеплення з нелінійної системи рівнянь (або одну невідому довжину у разі об'єднаної внутрішньої зони). Для знаходження розкриття системи m колінеарних тріщин різної довжини така система буде містити не більше $2m$ рівнянь. У роботі [8] досліджено взаємний вплив трьох колінеарних тріщин. Показано, як зі збільшенням рівня зовнішнього навантаження відбувається об'єднання внутрішніх зон передруйнування. При моделюванні про утворення спільної внутрішньої зони свідчить відсутність розв'язку задачі з відокремленими зонами сусідніх вершин системи. Отже, при розв'язанні таких задач зі збільшенням навантаження необхідно переходити від одного типу граничних умов до іншого. Щоб уникнути такої незручності в роботі [9] запропоновано метод розв'язання задач теорії тріщин в рамках моделі зони зчеплення, що спирається на методи дослідження контактної взаємодії берегів тріщини. Цей метод у даній роботі поширено на випадок системи колінеарних тріщин при нерівномірному законі зчеплення—відриву.

Постановка і методика розв'язуваня задачі. Розглянемо систему m колінеарних тріщин у нескінченному ізотропному тілі (на рис. 1, *а* ($m = 3$). Отримаємо розв'язок задачі для найпростішого типу навантаження, коли рівномірно розподілені розтягувальні зусилля прикладено на нескінченності. Тріщини розташовано вздовж осі *x*; ліва і права вершини фізичної тріщини відповідають точкам λ_{i1} та λ_{i2} ($i = 1, \ldots, m$) відповідно (тріщини занумеровано направо). В моделі зони зчеплення матеріал поза зоною вважається лінійно пружним. Отже, для розв'язання задачі можна використовувати принцип суперпозиції. Навантаження на тіло із системою трьох колінеарних тріщин із зонами передруйнування зображено на рис. 1, *а*; параметри моделі для i-ї тріщини із зонами передруйнування наведено на рис. 1, *б*. Граничні умови запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &\sigma_y^{\pm}(x) = -\sigma_\infty + \sigma(x), \qquad x \in (\beta_{11}, \beta_{m2}), \\ &\Delta'(\beta_{ik}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{1}$$

де напруження $\sigma(x)$ пов'язане з відповідним розкриттям законом зчеплення—відриву

$$\sigma(x) = \begin{cases} T[\Delta(x)], & x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} \{(\beta_{i1}, \lambda_{i1}) \cup (\lambda_{i2}, \beta_{i2})\}, \\ 0, & x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}). \end{cases}$$

Друга умова в (1) має виконуватись для необ'єднаних внутрішніх зон ($\beta_{i2} < \beta_{(i+1)1}$).

Для знаходження невідомого розкриття та напруження вздовж лінії розташування тріщин виберемо інтервал $(-\delta, \delta)$ так, щоб він напевно містив тріщини з їх зонами зчеплення, довжини яких наперед невідомі. Сформулюємо модифіковані граничні умови

$$\begin{aligned} &\sigma_y^{\pm}(x) = -\tilde{\sigma}(x) + \widehat{T}[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x), \quad |x| < \delta, \\ &\qquad \widehat{T}(\Delta) = \begin{cases} T(\Delta), & \Delta \geqslant 0, \\ P(\Delta), & \Delta < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

що дозволяє використати результати [9] для знаходження розв'язку. В основі методу лежить квадратурний метод розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь [10] та ітеративна процедура визначення контактних напружень, що виникають між берегами тріщини [11]. В даній роботі результати отримаємо без врахування логарифмічної особливості похідної від розкриття, але врахувати цю особливість можна використавши результати [12]. Граничні умови (2) отримано з (1) шляхом заміни $\sigma(x)$ різницею подовженого на від'ємний відрив зчеплення $\widehat{T}$ та додаткового напруження $\hat{\sigma}$, яке визначається умовою невід'ємності відриву.

Числові розв'язки. На рис. 2 наведено відносні відриви та відповідні напруження вздовж лінії розташування колінеарних тріщин, отримані для $T(\overline{\Delta}) = (1 - \overline{\Delta})^{\alpha}$ ($\overline{\Delta} = \Delta / \Delta_{\max}$, $\Delta_{\max} = (\alpha + 1)\phi / \sigma_{\max}$) при $\alpha = 0{,}7$, $\sigma = 35$ МПа, $\phi = 300$ Н/м, E $= 40$ ГПа, $-\lambda_1 = \lambda_4 = 2{,}16$ см, $-\lambda_2 = \lambda_3 = 0{,}9$ см (дві тріщини рівної довжини), $\delta = 3$ см. Для вказаного закону зчеплення–відриву в (2) можна покласти $P(\Delta) = \sigma_{\max}$. Для граничного значення $\Delta(\lambda_3) = \Delta_{\max}$ було знайдено два розв'язки з об'єднаними внутрішніми зонами. Перший розв'язок є симетричним (відповідає суцільним кривим), у той час як другий (штрихові криві) характеризується докритичним станом у внутрішній вершині лівої тріщини $\Delta(\lambda_2) = \Delta_{\max}$. Значення граничного навантаження для двох наведених розв'язків становлять відповідно 15,4 та 17,6 МПа.

Для фіксованих значень $\Delta(\lambda_3)$ отримаємо розв'язок задачі для двох колінеарних тріщин різної довжини, зображений на рис. 3. Відносні відриви та відповідні напруження вздовж лінії розташування колінеарних тріщин для $\bar{\Delta}(\lambda_3)=1$ та декількох значень параметра форми показано у першому стовпці блоків рис. 3, рівень зовнішнього навантаження σ_∞, як функцію найбільшого з відривів у вершинах фізичних тріщин $\Delta(\lambda_3)$, зображено у другому стовпці блоків рис. 3. Також проілюстровано відповідні величини $\Delta(\lambda_i)$ ($i\neq 3$). Числові результати отримано при параметрах попередньої задачі, окрім положень вершин фізичної тріщини, які становлять $-\lambda_1=2{,}4$ см, $-\lambda_2=1{,}05$ см, $\lambda_3=0{,}45$ см та $\lambda_4=2{,}25$ см.

Параметр форми істотно впливає на довжину зчеплення. Зі зменшенням цього параметра (наближенням закону зчеплення до рівномірного) довжина зчеплення значно зменшується. Так, для значень $\alpha=1$ та 0,8 внутрішні зони є об'єднаними, для $\alpha=0{,}6$ ці зони є близькими до об'єднання, в той час як для $\alpha=0$ вони віддалені на величину довжини зчеплення. Злами на залежностях $\Delta(\lambda_i)-\sigma_\infty$ зумовлені об'єднанням внутрішніх зон. Для $\alpha=0{,}6$ можна прослідкувати екстремум вказаної залежності, але максимальне значення σ_∞ несуттєво відрізняється від значення, що відповідає $\bar{\Delta}(\lambda_3)=1$. Також відзначаємо незначну залежність максимального рівня зовнішнього навантаження від параметра форми α; цей рівень для обраних α трохи перевищує 15 МПа.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Stang H., Olesen J.F., Poulsen P.N., Dick–Nielsen L. On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials. *Mater. Struct.* 2007. **40**. P. 365—374. doi: https://doi.org/10.1617/s11527-006-9179-8
2. Chang D., Kotousov A. A strip yield model for two collinear cracks in plates of arbitrary thickness. *Int. J. Fract.* 2002. **176**. P. 39—47. doi: https://doi.org/10.1007/s10704-012-9724-0
3. Feng X.Q., Gross D. On the coalescence of collinear cracks in quasi-brittle materials. *Eng. Fract. Mech.* 2000. **65**. P. 511-524. doi: https://doi.org/10.1016/S0013-7944(99)00139-3
4. Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2011. № 11. С. 51—60.
5. Bhargava R.R., Jangid K. Strip-coalesced interior zone model for two unequal collinear cracks weakening piezoelectric media. *Appl. Math Mech.* 2014. **35** (10). P. 1249—1260. doi: https://doi.org/10.1007/s10483-014-1890-9
6. Theocaris P.S. Dugdale models for two collinear unequal cracks. Eng. Fract. Mech. 1983. **18** (3). P. 545—559. doi: https://doi.org/10.1016/0013-7944(83)90048-6
7. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Yu.O. Determination of displacement of the faces of two collinear cracks of different lengths within the framework of the Leonov-Panasyuk model. *J. Math. Sci.* 2013. **190** (14). P. 1—16. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-014-1775-5
8. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model. *Int. J. Solids Struct.* 2013. **50** (19). P. 2929—2942. doi: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.010
9. Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Вплив довжини зчеплення на рівень критичного навантаження для тіла з тріщиною нормального відриву. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 8. С. 36—44. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018
10. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. Solution of singular integral equations. Methods of analysis and solutions of crack problems. *Mechanics of Fracture.* 1973. **1**. P. 368—425. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5_7
11. Gross D., Heimer St. Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load. *Eng. Fract. Mech.* 1993. **46**. P. 633—640. doi: https://doi.org/10.1016/0013-7944(93)90169-S
12. Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю.О. Порівняння алгоритмів визначення переміщень берегів тріщини зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 7. С. 29—36. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi-2017.07.029

Надійшло до редакції 13.03.2018

REFERENCES

1. Stang, H., Olesen, J.F., Poulsen, P.N. & Dick–Nielsen, L. (2007). On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials. Mater. Struct., 40, pp. 365-374. doi: https://doi.org/10.1617/s11527-006-9179-8
2. Chang, D. & Kotousov, A. (2002). A strip yield model for two collinear cracks in plates of arbitrary thickness. Int. J. Fract., 176, pp. 39-47. doi: https://doi.org/10.1007/s10704-012-9724-0
3. Feng, X. Q. & Gross, D. (2000). On the coalescence of collinear cracks in quasi-brittle materials. Eng. Fract. Mech., 65, pp. 511-524. doi: https://doi.org/10.1016/S0013-7944(99)00139-3
4. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2011). Study of a displacement of crack edges for two collinear cracks of equal length. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 11, pp. 51-60 (in Ukrainian).
5. Bhargava, R. R. & Jangid, K. (2014). Strip-coalesced interior zone model for two unequal collinear cracks weakening piezoelectric media. Appl. Math Mech., 35 (10), pp. 1249-1260. doi: https://doi.org/10.1007/s10483-014-1890-9
6. Theocaris, P. S. (1983). Dugdale models for two collinear unequal cracks. Eng. Fract. Mech., 18 (3), pp. 545-559. doi: https://doi.org/10.1016/0013-7944(83)90048-6
7. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2013). Determination of displacement of the faces of two collinear cracks of different lengths within the framework of the Leonov-Panasyuk model. J. Math. Sci., 190 (14), pp. 1-16. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-014-1775-5
8. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2013). Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model. Int. J. Solids Struct., 50 (19), pp. 2929-2942. doi: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.010
9. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2018). Cohesive zone length influence on the critical load for mode i crack. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 8, pp. 36-44 (in Ukrainian).
10. Erdogan, F., Gupta, G. D. & Cook, T. S. (1973). Solution of singular integral equations. Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of Fracture, 1, pp. 368-425. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5_7
11. Gross, D. & Heimer, St. (1993). Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load. Eng. Fract. Mech., 46, pp. 633-640. doi: https://doi.org/10.1016/0013-7944(93)90169-S
12. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2017). Comparison of the crack opening displacement determination algorithms for a cohesive crack. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 7, pp. 29-36 (in Ukrainian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.029 (in Ukrainian).

Received 13.03.2018

М.Ф. Селиванов, Ю.А. Черноиван

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

МОДЕЛЬ ЗОНЫ СЦЕПЛЕНИЯ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ЗАКОНОМ СЦЕПЛЕНИЯ—ОТРЫВА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕСКОЛЬКИХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН

Для оценки предельного уровня нагрузки на элементы конструкции, содержащие трещины с зонами предразрушения, широко используется модель зоны сцепления. В статье рассмотрено действие на бесконечную пластину с системой коллинеарных трещин нормального отрыва растягивающих усилий, приложенных на бесконечности. Использован метод решения задач механики трещин, предложенный авторами. Решение для раскрытий трещин найдено для неравномерной связи между сцеплением и отрывом с учетом условия плавности смыкания берегов. Построены числовые решения для нескольких значений параметра формы степенного закона сцепления—отрыва. Проиллюстрирована зависимость раскрытия в вершинах физических трещин от уровня внешней нагрузки. Установлено, что его критический уровень практически не зависит от параметра формы.

Ключевые слова: *модель зоны сцепления, разрушение, закон сцепления—отрыва, функция формы, условие конечности напряжений, коллинеарные трещины.*

M.F. Selivanov, Yu.O. Chornoivan

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

THE COHESIVE ZONE MODEL
WITH A NON-UNIFORM TRACTION-SEPARATION LAW
FOR A SYSTEM OF SEVERAL COLLINEAR CRACKS

The cohesive zone models are widely used for assessments of the critical loading level on structures. Here, an infinite plate with mode I collinear cracks is studied under a uniform tension applied at infinity. A proposed technique is applied to solve the problem basing on the cohesive crack model. The solution for the crack opening is found for a non-uniform traction-separation law with regard for the condition of smooth closure of the crack lips. Numerical results are presented for several values of the traction-separation law shape parameter. Some illustrations are given for the dependence of the crack opening on the external loading. It is found that its critical level is almost independent of the shape parameter.

Keywords: *cohesive zone model, fracture, traction—separation law, shape parameters, finite stress condition, collinear cracks.*