

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.01.033>

УДК 539.375

**А.О. Камінський<sup>1</sup>, Л.А.Кіпніс<sup>2</sup>, Т.В. Поліщук<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

<sup>2</sup> Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини

E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua), [polischuk\\_t@ukr.net](mailto:polischuk_t@ukr.net)

## **Про розвиток маломасштабних пластичних смуг з точки перетину ліній мікропластичного деформування**

*Представлено академіком НАН України В.Л. Богдановим*

*Визначено маломасштабну пластичну зону передруйнування у точці перетину ліній мікропластичного деформування. Задачу про пластичну зону зведено до симетричної задачі теорії пружності для площини з чотирма прямими лініями розриву дотичного переміщення, які виходять з її точки. Дві з них напівнескінченні, а дві – скінченної довжини. Точний розв'язок задачі побудовано методом Вінера–Гонфа.*

**Ключові слова:** *маломасштабна пластична зона передруйнування, перетин ліній мікропластичного деформування, лінії розриву дотичного переміщення, метод Вінера–Гонфа.*

Появі пластичних зон у пружнопластичному тілі, що знаходиться в умовах плоскої деформації, передує етап деформації, на якому в тілі має місце мікропластична деформація (рух дислокацій) і воно містить численні лінії мікропластичного деформування (лінії ковзання). Поза цими лініями матеріал тіла є лінійно-пружним. Якщо відбувся перетин ліній мікропластичного деформування, то точка їх перетину представляє собою гострокінцевий концентратор напружень.

На наступному етапі деформації біля різних гострокінцевих концентраторів напружень, що містяться в тілі (кінців тріщин, кутових точок), у тому числі біля точки перетину ліній мікропластичного деформування, виникають і розвиваються пластичні зони. Руйнування матеріалу відбувається після розвитку в ньому цих зон. Наявність інформації про конфігурацію і розміри локальних пластичних зон дозволяє повніше описати напружено-деформований стан матеріалу біля гострокінцевих концентраторів напружень, який передує руйнуванню. Визначення конфігурації і розмірів таких зон є однією з центральних проблем механіки руйнування.

Розрахункам привершинних пластичних зон в рамках моделей з лініями розриву переміщення у випадках, коли гострокінцевими концентраторами напружень є кінці тріщин в однорідних тілах, присвячено праці багатьох авторів [1]. Ціла низка подібних праць відноситься до інших кутових точок – гострокінцевих концентраторів напружень [2–5]. Точка перетину ліній мікропластичного деформування у цьому плані не досліджувалась. Резуль-

тати таких досліджень можуть бути використані при вивченні одного з дислокаційних механізмів зародження тріщин – механізму Коттрелла [6]. Згідно з механізмом Коттрелла тріщина зароджується при перетині ліній мікропластичного деформування.

Нижче дано розв'язок симетричної задачі про визначення маломасштабної пластичної зони передруйнування біля точки перетину ліній мікропластичного деформування в рамках моделі з двома лініями розриву дотичного переміщення.

**Постановка задачі.** У рамках симетричної задачі розглянемо однорідне ізотропне тіло, яке знаходиться в умовах плоскої деформації. Тіло вважається таким, що у ньому біля гострокінцевих концентраторів напружень розвиваються пластичні зони, оточені лінійно-пружним матеріалом. Нехай на етапі деформації, який передуює появи пластичних зон, тіло містить лінії мікропластичного деформування, що перетинаються в точці  $O$  (рис. 1, де  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ). Поза такими лініями матеріал тіла є лінійно-пружним. Лінію мікропластичного деформування моделюватимемо лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює заданій сталій матеріалу  $\tau_s^0$ , що характеризує мікропластичну деформацію тіла ( $\tau_s^0$  – границя мікротекучості на зсув).

Згідно з загальними положеннями про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл [7] точка  $O$  представляє гострокінцевий концентратор напружень зі степеневою особливістю. Суми головних членів розвинень напружень в асимптотичні ряди при  $r \rightarrow 0$  є розв'язком відповідної задачі теорії пружності (задача К) для площини з напівнескінченими лініями розриву, який породжується єдиним у смузі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$  коренем  $\lambda_0 \in ]-1; 0[$  її характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} & \cos 2\alpha - \cos 2(\lambda + 1)\alpha [\sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda + 1)\sin 2\alpha] + \\ & + [\cos 2\alpha - \cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha)] [\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1)\sin 2\alpha] = 0. \end{aligned}$$

Мають місце формули ( $r \rightarrow 0$ )

$$\sigma_\theta(r, \theta) = C\Sigma(\theta)r^{\lambda_0} + C_0 + \frac{\tau_s^0}{\sin 2\alpha} \cos 2\theta + f_1(r, \theta),$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = CT(\theta)r^{\lambda_0} + \frac{\tau_s^0}{\sin 2\alpha} \sin 2\theta + f_2(r, \theta),$$

$$\sigma_r(r, \theta) = C\Sigma_1(\theta)r^{\lambda_0} + C_0 - \frac{\tau_s^0}{\sin 2\alpha} \cos 2\theta + f_3(r, \theta),$$

$$\Sigma(\theta) = \begin{cases} (\lambda_0 + 2)[\sin \lambda_0(\pi - \alpha)\cos \lambda_0\theta - \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha)\cos(\lambda_0 + 2)\theta] & (0 \leq \theta \leq \alpha), \\ (\lambda_0 + 2)[\sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \theta) - \sin \lambda_0\alpha \cos \lambda_0(\pi - \theta)] & (\alpha \leq \theta \leq \pi), \end{cases}$$

$$T(\theta) = \begin{cases} \lambda_0 \sin \lambda_0(\pi - \alpha)\sin \lambda_0\theta - (\lambda_0 + 2)\sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha)\sin(\lambda_0 + 2)\theta & (0 \leq \theta \leq \alpha), \\ \lambda_0 \sin \lambda_0\alpha \sin \lambda_0(\pi - \theta) - (\lambda_0 + 2)\sin(\lambda_0 + 2)\alpha \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \theta) & (\alpha \leq \theta \leq \pi), \end{cases}$$

$$\Sigma_1(\theta) = \begin{cases} (\lambda_0 + 2)\sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha)\cos(\lambda_0 + 2)\theta - (\lambda_0 - 2)\sin \lambda_0(\pi - \alpha)\cos \lambda_0\theta & (0 \leq \theta \leq \alpha), \\ (\lambda_0 - 2)\sin \lambda_0\alpha \cos \lambda_0(\pi - \theta) - (\lambda_0 + 2)\sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \theta) & (\alpha \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

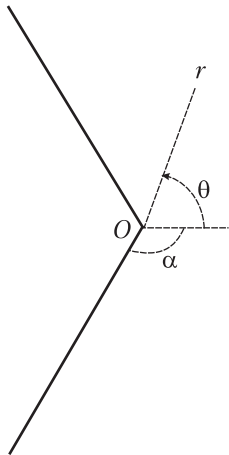


Рис. 1

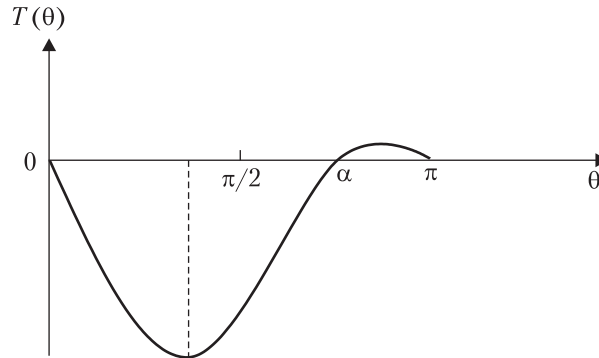


Рис. 2

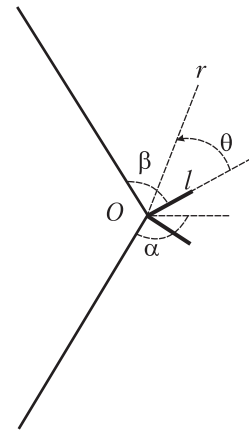


Рис. 3

( $f_{1,2,3}(r, \theta) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ ). Сталі  $C$  і  $C_0$  потрібно визначати з розв'язку кожної конкретної задачі теорії пружності, яка зображена на рис. 1.

Зі зростанням зовнішнього навантаження біля точки  $O$  – гострокінцевого концентратора напружень виникає і розвивається пластична зона передруйнування. Вивчатимемо лише початкову стадію розвитку пластичної зони, коли її розмір значною мірою менший, ніж довжина ліній мікропластичного деформування та розміри тіла (маломасштабна пластична зона передруйнування). Тоді вона буде мати вигляд пари вузьких смужок, що виходять з точки  $O$  [8].

Переважні деформації в пластичній зоні передруйнування розвиваються за механізмом зсуву. Тому вузьку пластичну смужку-зону моделюватимемо прямою лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює границі текучості на зсув  $\tau_s \gg \tau_s^0$  (модель смуг пластичності [1]).

Залежність  $T(\theta)$  якісно зображено на рис. 2 (найбільше значення функції менше, ніж модуль найменшого значення). Беручи до уваги вигляд цієї залежності і використовуючи критерій максимальних дотичних напружень, приходимо до висновку, що пластична зона буде розвиватись усередині більшого кута між лініями мікропластичного деформування. Значенням  $\alpha$ , що дорівнюють 100; 110; 120; 130; 140; 150; 160; 170 град, відповідають значення кута  $\beta$  нахилу пластичної смужки до лінії мікропластичного деформування, що дорівнюють 50,1; 55,4; 60,7; 66,2; 71,7; 77,1; 82,2; 86,7 град. Як видно, пластична смужка розвивається майже по бісектрисі кута  $\alpha$ . Ставиться задача визначення довжини  $l$  пластичних смужок.

З урахуванням малості пластичної зони передруйнування приходимо до плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності для однорідної ізотропної площини, з точки якої виходять чотири прямі лінії розриву дотичного переміщення (рис. 3). Дві з них напівнескінченні, а дві – скінченної довжини. При  $r \rightarrow 0$  суми головних членів розвинень напружень в асимптотичні ряди є розв'язком аналогічної задачі без ліній розриву скінченної довжини (розв'язком задачі К, про який йшлося вище). Довільні сталі  $C$  і  $C_0$ , що входять до вказаного розв'язку, вважаються заданими. Вони характеризують інтенсивність зовнішнього поля і повинні визначатись з розв'язку кожної конкретної зовнішньої задачі, яку зображено на рис. 1.

Крайові умови задачі теорії пружності, що розглядається (див. рис. 3), мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \theta = \beta, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau_s^0; \\ \theta = \beta - \alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad \theta = \pi - \alpha + \beta, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \\ \theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\tau_s^0}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta) + Cgr^{\lambda_0} + o\left(\frac{1}{r}\right); \\ g = \lambda_0 \sin \lambda_0 (\pi - \alpha) \sin \lambda_0 (\alpha - \beta) - (\lambda_0 + 2) \sin (\lambda_0 + 2) (\pi - \alpha) \sin (\lambda_0 + 2) (\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (3)$$

У цих формулах  $\beta - \alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha + \beta$ ;  $\langle a \rangle$  – стрибок  $a$ ;  $\tau = \tau_s$ , якщо  $C < 0$ ;  $\tau = -\tau_s$ , якщо  $C > 0$ ;  $g < 0$ .

Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності (див. рис. 3) є сумою розв'язків наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що замість третьої з умов (1) і першої з умов (2) маємо

$$\theta = \beta, \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1 - Cgr^{\lambda_0}, \quad \tau_1 = \tau - \frac{\tau_s^0}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta), \quad (4)$$

а на нескінченності напруження згасають як  $o(1/r)$  (у (3) відсутні перші два доданки). Друга задача – задача К. Оскільки розв'язок другої задачі відомий, достатньо побудувати розв'язок першої.

Для побудови точного розв'язку першої задачі будемо використовувати метод Вінера–Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [9].

**Розв'язок рівняння Вінера–Гопфа.** Застосовуючи перетворення Мелліна до рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, закону Гука, умов (1) та враховуючи другу з умов (2) і умови (4), приходимо до наступного функціонального рівняння Вінера–Гопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} = -\text{tg } p\pi G(p) \Phi^-(p), \quad (5)$$

$$G(p) = \frac{G_1(p) \cos p\pi}{G_2(p) \sin p\pi};$$

$$G_1 = \Delta_8 (\Delta_2 \Delta_6 + \Delta_4 \Delta_5) + \Delta_9 (\Delta_2 \Delta_5 + \Delta_4 \Delta_7), \quad G_2 = \Delta_1 \Delta_4 + \Delta_2 \Delta_3;$$

$$\Delta_1 = \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha, \quad \Delta_2 = \sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha, \quad \Delta_3 = \cos 2p\alpha - \cos 2\alpha;$$

$$\Delta_4 = \cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha, \quad \Delta_5 = \sin 2p\beta + p \sin 2\beta, \quad \Delta_6 = \cos 2p\beta - \cos 2\beta;$$

$$\Delta_7 = 2(\sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta), \quad \Delta_8 = \sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta);$$

$$\Delta_9 = \cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta), \quad \tau_2 = -Cgl^{\lambda_0};$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^{\infty} \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho.$$

У цих формулах  $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{1,2}$  – досить малі додатні числа;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Розв’язок рівняння (5) має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) = & -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Phi^-(p) = K^-(p)G^-(p) \left[ \frac{\tau_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2 K^+(-\lambda_0-1)}{(p+\lambda_0+1)(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0);$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p) & (\operatorname{Re} p < 0), \\ G^-(p) & (\operatorname{Re} p > 0), \end{cases} \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}$$

( $\Gamma(z)$  – гамма-функція).

**Визначення довжини пластичної зони передруйнування.** Виходячи з відомих асимптотик, маємо

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r \rightarrow l+0, \quad \tau_{r\theta} & \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r-lp)}}, \\ \theta = 0, \quad r \rightarrow l-0, \quad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle & \sim -\frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}. \end{aligned}$$

Тут  $k_{II}$  – коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці лінії розриву дотичного переміщення. За теоремою абелевого типу одержуємо

$$\Phi^+(p) \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{-2pl}}, \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{k_{II}}{\sqrt{2pl}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (7)$$

За допомогою (6) знаходимо асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \left[ \frac{\tau_1 K^+(-1)}{G^+(-1)} + \frac{\tau_2 K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \quad (p \rightarrow \infty). \quad (8)$$

Згідно з (7), (8) одержуємо

$$k_{II} = q_1(\alpha)Cl^{\lambda_0+1/2} + q_2(\alpha)\left[\frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha}\sin 2(\alpha-\beta) - \tau\right]\sqrt{l}, \quad (9)$$

$$q_1(\alpha) = \frac{\sqrt{2}g\Gamma(\lambda_0+1)}{\Gamma(\lambda_0+3/2)G^+(-\lambda_0-1)}, \quad q_2(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}G^+(-1)}.$$

Довжина пластичної зони передруйнування визначається з умови обмеженості напружень біля кінця лінії розриву дотичного переміщення, тобто з умови рівності нулю коефіцієнта  $k_{II}$ .

Прирівнюючи до нуля праву частину (9), одержуємо наступну формулу для визначення довжини пластичних смужок при  $C < 0$ :

$$l = \Lambda \left[ \frac{|C|}{\tau_s - \frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta)} \right]^{-1/\lambda_0}, \quad \Lambda = \left[ \frac{\sqrt{\pi}|g|\Gamma(\lambda_0+1)G^+(-1)}{2\Gamma(\lambda_0+3/2)G^+(-\lambda_0-1)} \right]^{-1/\lambda_0}.$$

Якщо  $C > 0$ , то

$$l = \Lambda \left[ \frac{C}{\tau_s + \frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta)} \right]^{-1/\lambda_0} \quad \left( \tau_s^o < -\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\alpha - \beta)} \tau_s \right).$$

Значенням  $\alpha$ , що дорівнюють 100; 110; 120; 130; 140; 150; 160; 170 град, відповідають значення  $-\lambda_0$ , що дорівнюють 0,190; 0,335; 0,449; 0,541; 0,619; 0,689; 0,756; 0,831 град, і значення  $\Lambda$ , що дорівнюють 7,524; 14,083; 12,996; 11,417; 10,208; 8,339; 7,654; 5,811 град.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Panasyuk V.V., Savruk M.P. Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics. *Mater. Sci.* 1992. **28**, № 1. P. 41–57. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00723631>
2. Berezhnitskii L.T., Kundrat N.M. Plastic bands at the tip of a linear rigid inclusion. *Strength of Materials*. 1982. № 11. P. 1502–1505. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00768948>
3. Berezhnitskii L.T., Kundrat N.M. Origin and development of plastic strains in the neighborhood of an acute-angled rigid inclusion. *Mater. Sci.* 1984. **19**, № 6. P. 538–546. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00722124>
4. Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A. Study of the Stress State Near a Corner Point in Simulating the Initial Plastic Zone by Slipbands. *Int. Appl. Mech.* 2001. **37**, № 5. P. 647–653. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1012312513881>
5. Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A. Analysis of Plastic Zone at a Corner Point by the Trident Model. *Int. Appl. Mech.* 2002. **38**, № 5. P. 611–616. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1019766106040>
6. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1988. 488 с.
7. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. Москва: Наука, 1981. 688 с.
8. Vitvitskii P.M., Panasyuk V.V., Yarema S.Ya. Plastic deformation in the vicinity of a crack and the criteria of fracture (Review). *Strength of Materials*. 1973. № 2. P. 135–151. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00770282>
9. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Надійшло до редакції 29.05.2018

REFERENCES

1. Panasyuk, V. V. & Savruk, M. P. (1992). Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics. *Mater. Sci.*, 28, No. 1, pp. 41-57. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00723631>
2. Berezhnitskii, L. T. & Kundrat, N. M. (1982). Plastic bands at the tip of a linear rigid inclusion. *Strength of Materials*, No. 11, pp. 1502-1505. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00768948>
3. Berezhnitskii, L. T. & Kundrat, N. M. (1984). Origin and development of plastic strains in the neighborhood of an acute-angled rigid inclusion. *Mater. Sci.*, 19, No. 6, pp. 538-546. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00722124>
4. Kaminskii, A. A., Kipnis, L. A. & Khazin, G. A. (2001). Study of the Stress State Near a Corner Point in Simulating the Initial Plastic Zone by Slipbands. *Int. Appl. Mech.*, 37, No. 5, pp. 647-653. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1012312513881>
5. Kaminskii, A. A., Kipnis, L. A. & Khazin, G. A. (2002). Analysis of Plastic Zone at a Corner Point by the Trident Model. *Int. Appl. Mech.*, 38, No. 5, pp. 611-616. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1019766106040>
6. Panasyuk, V. V., Andreykiv, A. E. & Parton, V. Z. (1988). *Fundamentals of fracture mechanics*. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
7. Parton, V. Z. & Perlin, P. I. (1981). *Methods of the mathematical theory of elasticity*. Moscow: Nauka (in Russian).
8. Vitvitskii, P. M., Panasyuk, V. V. & Yarema, S. Ya. (1973). Plastic deformation in the vicinity of a crack and the criteria of fracture (Review). *Strength of Materials*, No. 2, pp. 135-151. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00770282>
9. Noble, B. (1962). Using of the Wiener–Hopf method for the solve the partial derivative equations. Moscow: Izda-vo Inostr. lit. (in Russian).

Received 29.05.2018

*А.А. Каминский<sup>1</sup>, Л.А. Кипнис<sup>2</sup>, Т.В. Полищук<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ

<sup>2</sup> Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини

E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua), [polischuk\\_t@ukr.net](mailto:polischuk_t@ukr.net)

О РАЗВИТИИ МАЛОМАСШТАБНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛОС  
ИЗ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИЙ МИКРОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Определена маломасштабная пластическая зона предразрушения в точке пересечения линий микропластического деформирования. Задача о пластической зоне сведена к симметричной задаче теории упругости для плоскости с четырьмя прямыми линиями разрыва касательного смещения, исходящими из ее точки. Две из них полубесконечные, а две — конечной длины. Точное решение задачи построено методом Винера–Хопфа.

**Ключевые слова:** *маломасштабная пластическая зона предразрушения, пересечение линий микропластического деформирования, линии разрыва касательного смещения, метод Винера – Гопфа.*

*A.A. Kaminsky<sup>1</sup>, L.A. Kipnis<sup>2</sup>, T.V. Polischuk<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

<sup>2</sup> Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University

E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua), [polischuk\\_t@ukr.net](mailto:polischuk_t@ukr.net)

ON THE DEVELOPMENT OF SMALL-SCALE PLASTIC STRIPS  
FROM THE POINT OF INTERSECTION OF MICROPLASTIC DEFORMATION LINES

The small-scale plastic prefracture zone at the point of intersection of microplastic deformation lines is determined. The problem on the plastic zone is reduced to the symmetric problem of the theory of elasticity for a plane with four straight tangential displacement rupture lines emerging from its point. Two of them are semi-infinite, and two have a finite length. The exact solution of the problem is constructed by the Wiener–Hopf method.

**Keywords:** *small-scale plastic prefracture zone, intersection of microplastic deformation lines, tangential displacement rupture lines, Wiener–Hopf method.*