doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.02.017
УДК 517.54; 517.12

Б.А. Клищук, Р.Р. Салимов, М.В. Стефанчук

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: kban1988@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Асимптотическое поведение решений нелинейных уравнений Бельтрами

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.Я. Гутлянским

Исследуются регулярные гомеоморфные решения нелинейного уравнения Бельтрами на степенной и логарифмический порядок роста. Построены решения, которые показывают точность порядка роста в найденных оценках.

Ключевые слова: *уравнение Бельтрами, нелинейное уравнение Бельтрами, отображение класса Соболева, регулярный гомеоморфизм.*

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть $\mu : G \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ почти всюду (п. в.) в G.

Напомним, что *уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z. \tag{1}$$

Здесь

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y), \quad f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y),$$

где $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а $K_\mu(z) = \dfrac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ — *дилатационным отношением* уравнения (1).

Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если K_μ является существенно неограниченной, т. е. $K_\mu \notin L^\infty(G)$.

Пусть $\sigma : G \to \mathbb{C}$ — измеримая функция и $m \geqslant 0$. Рассмотрим в полярной системе координат (r, θ) следующее уравнение

$$f_r = \sigma(re^{i\theta}) \, | f_\theta |^m \, f_\theta, \tag{2}$$

где f_r и f_θ — частные производные отображения f по r и θ соответственно (см. [1]). Здесь

$$f_r = \frac{zf_z + \overline{z}f_{\overline{z}}}{|z|}, \quad f_\theta = i(zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}).$$

Уравнение (2) в прямоугольной системе координат можно переписать в комплексной форме:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}} \cdot \frac{\sigma(z)|z|i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)|z|i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1} f_z. \tag{3}$$

Уравнение (3) представляет собой частный случай нелинейной системы уравнений в частных производных (см. (1) в [2], [3], а также [4]).

Заметим, что при $m = 0$ уравнение (3) сводится к обычному уравнению Бельтрами (1) с комплексным коэффициентом

$$\mu(z) = \frac{z}{\overline{z}} \cdot \frac{\sigma(z)|z|i - 1}{\sigma(z)|z|i + 1}.$$

Далее будем считать, что $m > 0$.

Напомним, что отображение $f : G \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in G$, если в этой точке f имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ (см., например, I. 1.6 в [5]). Гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ называется *регулярным*, если $J_f(z) > 0$ п. в.

Определение. Регулярным гомеоморфным решением уравнения (3) будем называть регулярный гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{C}$, удовлетворяющий почти всюду уравнению (3).

Всюду далее полагаем $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Теорема 1. *Пусть* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — *регулярное гомеоморфное решение уравнения* (3) *класса Соболева* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *с нормировкой* $f(0) = 0$. *Предположим, что для некоторых чисел* $c > 0$, $0 \leqslant \alpha < m$ и $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *коэффициент* $\sigma : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z|(Im\,\overline{\sigma})^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \leqslant cr^{-\alpha} \tag{4}$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. *Тогда*

$$\varlimsup_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{1-\frac{\alpha}{m}}} \leqslant \nu_0 < \infty, \tag{5}$$

где ν_0 — *положительная постоянная, зависящая только от чисел* c, m и α.

Полагая $\alpha = 0$ в теореме 1, получаем следующее заключение.

Следствие. Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярное гомеоморфное решение уравнения (3) класса Соболева $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ с нормировкой $f(0) = 0$. Предположим, что для некоторых чисел $c > 0$ и

$\varepsilon_0 \in (0,1)$ коэффициент $\sigma : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z| (\operatorname{Im} \overline{\sigma})^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \leqslant c \tag{6}$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда

$$\varlimsup_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \nu_0 < \infty, \tag{7}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от чисел c и m.

Пример 1. Предположим, что $m > 0$ и $0 \leqslant \alpha < m$. Рассмотрим уравнение

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}} \cdot \frac{(m-\alpha)|z|^{\alpha - m} |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m - m}{(m-\alpha)|z|^{\alpha - m} |z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m + m} f_z \tag{8}$$

в единичном круге.

Перепишем уравнение (8) в полярной системе координат

$$f_r = -\frac{m - \alpha}{m} i r^{\alpha - m - 1} |f_\theta|^m f_\theta. \tag{9}$$

Легко проверить, что

$$f(re^{i\theta}) = r^{1 - \frac{\alpha}{m}} e^{i\theta}$$

является решением уравнения (9).

Заметим, что коэффициент $\sigma = -\frac{m-\alpha}{m} i r^{\alpha - m - 1}$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z| (\operatorname{Im} \overline{\sigma})^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} = \frac{m}{m - \alpha} r^{-\alpha}.$$

Таким образом, условие (4) теоремы 1 выполнено.

С другой стороны, легко видеть

$$\lim_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{1 - \frac{\alpha}{m}}} = 1.$$

Теорема 2. *Пусть* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *— регулярное гомеоморфное решение уравнения* (3) *класса Соболева* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *с нормировкой* $f(0) = 0$. *Предположим, что для некоторых чисел* $c > 0$ *и*

$\varepsilon_0 \in (0,1)$ *коэффициент* $\sigma : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z|(\operatorname{Im}\overline{\sigma})^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \leqslant c r^{-m} \tag{10}$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. *Тогда*

$$\varlimsup_{z \to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|} \right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \nu_0 < \infty, \tag{11}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от чисел c и m.

Пример 2. Предположим, что $m > 0$. Рассмотрим уравнение

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}} \cdot \frac{|zf_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m - m}{|zf_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m + m} f_z \tag{12}$$

в единичном круге.

Перепишем уравнение (12) в полярной системе координат

$$f_r = -\frac{i}{mr} |f_\theta|^m f_\theta. \tag{13}$$

Легко проверить, что

$$f(re^{i\theta}) = \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{-\frac{1}{m}} e^{i\theta}$$

является решением уравнения (13).

Заметим, что коэффициент $\sigma = -\dfrac{i}{mr}$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z|(\operatorname{Im}\overline{\sigma})^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} = m r^{-m}.$$

Таким образом, условие (10) теоремы 2 выполнено.

С другой стороны, легко видеть

$$\lim_{z \to 0} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{|z|} \right)^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Замечание. Примеры 1 и 2 показывают точность найденных порядков роста в теоремах.

Заметим, что наши исследования тесно переплетаются с недавними работами по полулинейным уравнениям (см. [6—9]).

Публикация содержит результаты исследований, проведенных при поддержке гранта Президента Украины по конкурсному проекту Ф75/30308 Государственного фонда фундаментальных исследований.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Golberg A., Salimov R., Stefanchuk M. Complex Anal. *Oper. Theory*. 2018. doi: https://doi.org/10.1007/s11785-018-0833-2
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными. *Докл. АН СССР*. 1957. **112**, № 5. С. 810—811.
3. Лаврентьев М. Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей. *Матем. сб.* 1947. **21**, № 2. С. 285—320.
4. Лаврентьев М.А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. Москва: Изд-во АН СССР, 1962. 136 с.
5. Lehto O., Virtanen K. Quasiconformal Mappings in the Plane. New York: Springer, 1973. 258 p.
6. Gutlyanskiĭ V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. Semilinear equations in the plane with measurable data. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2018. № 2. С. 12—18. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.02.012
7. Gutlyanskiĭ V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. On the Dirichlet problem for quasilinear Poisson equations. *Праці ІППМ НАН України*. 2017. **31**, № 2. С. 28—37.
8. Gutlyanskiĭ V., Nesmelova O., Ryazanov V. On quasiconformal maps and semilinear equations in the plane. *Укр. мат. вісн*. 2017. **14**, № 2. С. 161—191.
9. Gutlyanskiĭ V., Nesmelova O., Ryazanov V. The Dirichlet problem for semilinear equations. arXiv: 1804.05875v9 [math.CV], 28 June 2018. 29 p.

Надійшло до редакції 22.11.2018

REFERENCES

1. Golberg, A., Salimov, R. & Stefanchuk, M. (2018). Complex Anal. Oper. Theory. doi: https://doi.org/10.1007/s11785-018-0833-2
2. Lavrent'ev, M. A. & Shabat, B. V. (1957). The geometric properties of solutions of non-linear systems of partial differential equations. Dokl. AN SSSR, 112, No. 5, pp. 810-811 (in Russian).
3. Lavrent'ev, M. A. (1947). A general problem of the theory of quasi-conformal representation of plane regions. Mat. sbornik, 21, No. 2, pp. 285-320 (in Russian).
4. Lavrent'ev, M. A. (1962). The variational method in boundary-value problems for systems of equations of elliptic type. Moscow: Izd-vo AN SSSR (in Russian).
5. Lehto, O. & Virtanen, K. (1973). Quasiconformal Mappings in the Plane. New York: Springer.
6. Gutlyanskiĭ, V. Ya., Nesmelova, O. V. & Ryazanov, V. I. (2018). Semilinear equations in the plane with measurable data. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 2, pp. 12-18. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi-2018.02.012
7. Gutlyanskiĭ, V. Ya., Nesmelova, O. V. & Ryazanov, V. I. (2017). On the Dirichlet problem for quasilinear Poisson equations. Pratsi IPPM NAN Ukrainy, 31, No. 2, pp. 28-37.
8. Gutlyanskiĭ, V., Nesmelova, O. & Ryazanov, V. (2017). On quasiconformal maps and semilinear equations in the plane. Ukr. Mat. Visn., 14, No. 2, pp. 161-191.
9. Gutlyanskiĭ, V., Nesmelova, O. & Ryazanov, V. (June 2018). The Dirichlet problem for semilinear equations. arXiv: 1804.05875v9 [math.CV].

Received 22.11.2018

Б.А. Кліщук, Р.Р. Салімов, М.В. Стефанчук

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: kban1988@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ
НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ БЕЛЬТРАМІ

Досліджуються регулярні гомеоморфні розв'язки нелінійного рівняння Бельтрамі на степеневий і логарифмічний порядок росту. Побудовані розв'язки, що показують точність порядку росту в знайдених оцінках.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, нелінійне рівняння Бельтрамі, відображення класу Соболєва, регулярний гомеоморфізм.*

B.A. Klishchuk, R.R. Salimov, M.V. Stefanchuk
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: kban1988@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS
OF NONLINEAR BELTRAMI EQUATIONS

Regular homeomorphic solutions of the nonlinear Beltrami equation for the power and logarithmic orders of growth are investigated. Solutions showing the accuracy of the growth order in the found estimates are constructed.

Keywords: *Beltrami equation, nonlinear Beltrami equation, mappings of the Sobolev class, regular homeomorphism.*