

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.031>

УДК 539.3

**А.А. Каминский, Е.Е. Курчаков**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua)

## **О краевых эффектах в нелинейном упругом анизотропном теле с трещиной**

*Представлено академиком НАН Украины В.Д. Кубенко*

*Численно решена краевая задача о равновесии нелинейного упругого ортотропного тела с трещиной нормального отрыва. В результате установлено влияние одного из размеров тела на поля деформаций и напряжений, а также на зону нелинейности. Выявлены краевые эффекты, обусловленные трансформацией зоны нелинейности.*

**Ключевые слова:** *нелинейное упругое ортотропное тело, трещина нормального отрыва, зона предразрушения, конститутивные уравнения, краевые эффекты.*

При постановке краевых задач механики разрушения надлежит учитывать зону предразрушения, образующуюся перед трещиной. Однако это сопряжено с определенными трудностями. Избежать их можно упрощенно представляя зону предразрушения. В настоящей работе, следуя статье [1], границы зоны предразрушения будем интерпретировать как поверхности раскрытого разреза, к которым приложены противоположные векторы напряжения. Компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения будем полагать зависящими от компонент вектора смещения относительно друг друга этих точек, и воспользуемся конститутивными уравнениями, установленными в работе [2]. Как и в статье [1], будем требовать, чтобы в конце зоны предразрушения соблюдался критерий прочности.

Изучим состояние равновесия нелинейного упругого ортотропного тела с трещиной нормального отрыва. Ограничимся малыми деформациями. Соответствующую краевую задачу поставим в компонентах вектора перемещения. При этом воспользуемся тензорно-линейными определяющими уравнениями, полученными в публикации [3].

Численно решая краевую задачу, исследуем влияние одного из размеров тела на поля деформаций и напряжений, а также на зону нелинейности, примыкающую к трещине.

**Постановка краевой задачи.** Для постановки краевой задачи потребуются определяющие уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений  $\mathbf{S}$  с компонентами тензора деформаций  $\mathbf{D}$ .

© А.А. Каминский, Е.Е. Курчаков, 2019

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 4

31

Обратимся к таким определяющим уравнениям [3]:

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1)$$

Здесь

$$\Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (2)$$

Инварианты  $Z, E, \Xi$  таковы:

$$Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (3)$$

Взаимно обратные тензоры  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  характеризуют анизотропию. Эти тензоры обладают высокой симметрией. Иначе говоря, в компонентах этих тензоров можно менять местами как индексы, относящиеся к любой одной паре индексов, так и сами пары индексов.

Для компонент тензоров  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ , как компонент взаимно обратных тензоров четвертого ранга, имеем

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\delta\epsilon\zeta} = \delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\zeta} (\epsilon, \zeta). \quad (4)$$

В формулах (4) фигурируют символы Кронекера  $\delta_{\gamma}^{\eta}$ :

$$\delta_{\gamma}^{\eta} = \begin{cases} 1 & (\gamma = \eta); \\ 0 & (\gamma \neq \eta). \end{cases} \quad (5)$$

Пусть система координат  $x^1, x^2, x^3$ , к которой отнесено тело, является прямоугольной декартовой. Стало быть,

$$g^{\epsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\epsilon = \zeta); \\ 0 & (\epsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (6)$$

Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещения  $\mathbf{u}$ .

Представим компоненты тензора  $\mathbf{D}$  через частные производные от компонент вектора  $\mathbf{u}$  по координатам, для чего обратимся к соотношениям Коши [4]:

$$D_{\epsilon\zeta} = \frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial x^{\zeta}} (\epsilon, \zeta). \quad (7)$$

Привлекая соотношения (7), запишем уравнения (1) в виде

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x^{\delta}} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x^{\delta}} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (8)$$

С учетом соотношений (7) второй и третий из инвариантов (3) будут

$$E = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x^{\delta}}. \quad (9)$$

Предположим, что тело ортотропно, а главные направления совпадают с направлениями осей  $x^1, x^2, x^3$ .

Остановимся на случае плоского напряженного состояния, в котором

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2); \quad (10)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \quad \beta = 3; \quad \alpha = 3, \quad \beta = 1, 2; \quad \alpha = 3, \quad \beta = 3). \quad (11)$$

Так как  $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$ , то, учитывая равенства (6) и первые четыре из равенств (11), на основании уравнений (8) установим, что

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma=1, 2, \quad \delta=3; \quad \gamma=3, \quad \delta=1, 2). \quad (12)$$

А учитывая равенства (6) и пятое из равенств (11), на основании уравнений (8) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{1}{G^{3333}} \left[ \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + G^{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{E}{Z} \right) - G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right]. \quad (13)$$

Примем следующие обозначения:

$$G^{1111} \equiv \mu_{AA}, \quad G^{1212} \equiv \mu_{BB}, \quad G^{1122} \equiv \mu_{AD}, \quad G^{2222} \equiv \mu_{DD},$$

$$G^{1133} \equiv \mu_{AF}, \quad G^{2233} \equiv \mu_{DF}, \quad G^{3333} \equiv \mu_{FF};$$

$$\frac{G^{1133}}{G^{3333}} \equiv \xi_{AF}, \quad \frac{G^{2233}}{G^{3333}} \equiv \xi_{DF};$$

$$G^{1111} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3311} \equiv \tilde{\mu}_{AA}, \quad G^{1122} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \tilde{\mu}_{AD},$$

$$G^{2211} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3311} \equiv \tilde{\mu}_{DA}, \quad G^{2222} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \tilde{\mu}_{DD}.$$

Согласно уравнениям (8), а также равенствам (6) и выражению (13), для компонент тензора  $\mathcal{S}$ , не равных нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} S^{11} &= \tilde{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \tilde{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (1 - \xi_{AF}) \frac{E}{Z} \right]; \\ S^{12} = S^{21} &= \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) - \tilde{\varphi}(\Omega) \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right); \\ S^{22} &= \tilde{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \tilde{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (1 - \xi_{DF}) \frac{E}{Z} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

В соответствии с равенствами (6) первый из инвариантов (9) примет вид

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (15)$$

Используя равенства (12), представим второй из инвариантов (9) в виде

$$\begin{aligned} \Xi &= \mu_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{AD} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \\ &+ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \left( 2\mu_{AF} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{DF} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{FF} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Обратимся к уравнениям Навье [4]:

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (17)$$

Допустим, что тело однородно.

Учитывая формулы (10), а также используя равенства (11) и уравнения (14), на основании уравнений (17) установим

$$\begin{aligned} \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^1} \right) &= Q^1; \\ \mu_{BB} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \right) + \check{\mu}_{DA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q^1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \check{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (1 - \xi_{AF}) \frac{E}{Z} \right] \right\} + \mu_{BB} \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \check{\varphi}(\Omega) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right]; \\ Q^2 &= \mu_{BB} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \check{\varphi}(\Omega) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \check{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (1 - \xi_{DF}) \frac{E}{Z} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

На границах тела, берегах трещины и границах зоны предразрушения зададим вектор напряжения  $\mathbf{P}$  с компонентами  $P^\alpha$ .

Обратимся к граничным условиям [4]:

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha, \quad (20)$$

где  $n_\beta$  — компоненты единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

Используя равенства (11) и уравнения (14), на основании условий (20) получим

$$\begin{aligned} \left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 &= P^1 + R^1; \\ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left( \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 &= P^2 + R^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R^1 &= \check{\varphi}(\Omega) \left\{ \left[ \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (1 - \xi_{AF}) \frac{E}{Z} \right] n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 \right\}; \\ R^2 &= \check{\varphi}(\Omega) \left\{ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left[ \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (1 - \xi_{DF}) \frac{E}{Z} \right] n_2 \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим прямоугольное тело малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии тела совместим оси  $x^1, x^2$ .

Нагрузку на тело будем задавать симметрично относительно осей  $x^1, x^2$ . Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь четвертой части тела, например, располагающейся в первом квадранте (рис. 1).

Для верхней и боковой границ рассматриваемой части тела  $n_1 = 1, n_2 = 0$  и  $n_1 = 0, n_2 = 1$  соответственно. А для верхнего берега трещины и верхней границы зоны предразрушения  $n_1 = 1, n_2 = 0$ .

Будем считать, что только компонента  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе рассматриваемой части тела не равна нулю (см. рис. 1). Введем вектор  $\mathbf{v}$ , изображающий смещение относительно друг друга точек на противоположных границах зоны предразрушения.

Компоненты вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения необходимо представить, используя конститутивные уравнения, через компоненты вектора  $\mathbf{v}$ .

В записи через соответствующие квадратичные формы модуль  $|\mathbf{P}| \equiv P$  вектора  $\mathbf{P}$  и модуль  $|\mathbf{v}| \equiv v$  вектора  $\mathbf{v}$  будут

$$P = \sqrt{g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}; \quad v = \sqrt{g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}. \quad (23)$$

Положим, что  $P|_{v=0} = P_0$ .

Обратимся к таким конститутивным уравнениям [2]:

$$P^\alpha = P_0 [1 - \tilde{f}(v)] \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}, \quad (24)$$

где  $\tilde{f}(v)$  — функция, возрастающая в промежутке  $(0, \eta)$ .

Подчеркнем, что в уравнениях (24) фигурируют компоненты вектора, противоположного вектору  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения.

Очевидно, что в данной задаче

$$v_1 > 0, \quad (25)$$

а

$$v_2 = v_3 = 0. \quad (26)$$

Учитывая равенства (6), а также неравенство (25) и равенства (26), на основании второй из формул (23) получим

$$v = v_1. \quad (27)$$

Для компоненты  $v_1$  вектора  $\mathbf{v}$  имеем

$$v_1 = 2u_1. \quad (28)$$

Согласно уравнениям (24), равенствам (6), а также равенствам (26) и формуле (27), для компонент вектора  $\mathbf{P}$  будем иметь

$$P^1 = P_0 [1 - \tilde{f}(v)]; \quad (29)$$

$$P^2 = P^3 = 0. \quad (30)$$

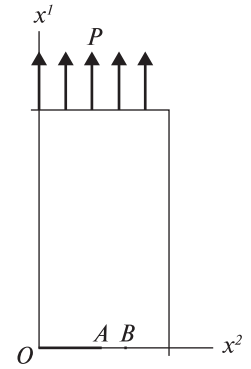


Рис. 1

Решая краевую задачу, для компоненты  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения используем уравнение (29). Помимо этого, учтем первое из равенств (30).

Для решения краевой задачи потребуются еще одна группа уравнений.

Из симметрии относительно осей  $x^1, x^2$  следуют такие уравнения:

$$\begin{aligned} u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, +x^2) &= 0; & u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, +x^2) &= 0; \\ u_1(-x^1, x^2) + u_1(+x^1, x^2) &= 0; & u_2(-x^1, x^2) - u_2(+x^1, x^2) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Кроме того, из симметрии относительно оси  $x^2$  вытекает, что в конце зоны предразрушения

$$u_1 = 0. \quad (32)$$

Выведем уравнение для компоненты  $u_2$ .

Выделим около конца зоны предразрушения точку с координатами  $a^1, a^2$ . Будем полагать, что  $u_2(x^1, x^2)$  — действительная функция, имеющая все непрерывные частные производные (до второго порядка включительно) в окрестности точки  $(a^1, a^2)$ .

Составив кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням  $x^1 - a^1, x^2 - a^2$  и записав координаты конца зоны предразрушения как  $a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2$ , будем иметь

$$\begin{aligned} -u_2(a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2) + u_2(a^1, a^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Решение краевой задачи осуществим численно. Для этого частные производные в основных уравнениях представим через конечные разности.

**Числовой пример.** Используются данные для сплава Д16, приведенные в статье [5].

Компоненты тензора анизотропии  $\mathbf{F}$  являются такими:

$$F_{1111} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad -F_{1122} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad -F_{1133} = 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1},$$

$$F_{1212} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{1313} = 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{2222} = 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1},$$

$$-F_{2233} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{2323} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{3333} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Для первого из инвариантов (3) с учетом равенств (6) имеем:

$$Z = 0,250 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Компоненты тензора анизотропии  $\mathbf{G}$  вычислены по формулам (4) (с учетом равенств (5)):

$$G^{1111} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1122} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1133} = 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$G^{1212} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1313} = 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{2222} = 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$G^{2233} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{2323} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{3333} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

Функция  $\tilde{\varphi}(\Omega)$  принята в виде [3]

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega \in [0, \nu]; \\ \frac{\Omega - \nu - a \ln\left(\frac{\Omega - \nu}{a} + 1\right)}{\Omega} & \Omega \in [\nu, \psi]. \end{cases} \quad (34)$$

Постоянные  $\nu$  и  $\psi$ , а также коэффициент  $a$  являются следующими:

$$\nu = 3,25 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}, \quad \psi = 93,50 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}; \quad a = 1,1112866 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}.$$

В дальнейшем используем критерии нелинейности

$$\Omega = \nu \quad (35)$$

и прочности

$$\Omega = \psi, \quad (36)$$

установленные в статье [3].

Функция  $\tilde{f}(v)$  принята в виде [2]

$$\tilde{f}(v) = b_{k_1} v^{k_1} + b_{k_2} v^{k_2}, \quad (37)$$

где  $k_1, k_2$  — целые числа ( $1 < k_1 < k_2$ ).

Коэффициенты  $b_{k_1}, b_{k_2}$  таковы:

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_1}}; \quad b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_2}}. \quad (38)$$

Здесь

$$m = -\left. \frac{d}{dv} \tilde{f}(v) \right|_{v=\eta}.$$

Принято, что

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad m = -0,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}, \quad \eta = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

По формулам (38) вычислены коэффициенты  $b_{k_1}, b_{k_2}$ :

$$b_{k_1} = 0,08 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-2}, \quad b_{k_2} = -0,008 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Размеры рассматриваемой части тела по осям  $x^1, x^2$ , обозначенные  $s_{(1)}, s_{(2)}$ , соответственно, приняты такими:

$$s_{(1)} = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad s_{(2)} = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Координата  $x^2$  начала зоны предразрушения (точки  $A$ ) записана как  $x_f^2$ , а конца зоны предразрушения (точки  $B$ ) — как  $x_g^2$  (см. рис. 1).

Были заданы

$$x_f^2 = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad x_g^2 = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$-\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Итак, длина трещины  $l_R = x_f^2$ , была равна  $1,50 \cdot 10^{-2}$  м, а длина зоны предразрушения,  $l_S = x_g^2 - x_f^2$ , составляла  $0,08 \cdot 10^{-2}$  м,  $0,10 \cdot 10^{-2}$  м,  $0,12 \cdot 10^{-2}$  м.

Лишь компонента  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе рассматриваемой части тела не была равна нулю (см. рис. 1). Эта компонента выражена через параметр  $w$ :  $P^1 = w$ .

Решая краевую задачу, следовало определить параметр  $w$  (из условия, что в точке  $B$  соблюдается критерий (36)).

При решении краевой задачи принимали во внимание, что в точке  $B$  компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  должна удовлетворять равенству

$$S_B^{11} = P_o. \tag{39}$$

Изначально величину  $P_o$  и параметр  $w$  задавали.

Затем, используя уравнения (18), (21), а также (31), (32) и (33), отыскивали компоненты  $u_1, u_2$ . Делали это методом последовательных приближений, изложенным в статье [1]. В первом приближении полагали, что  $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$  и  $\tilde{f}(v) = 0$ . В каждом последующем приближении значения функции  $\tilde{\varphi}(\Omega)$ , величин  $Q^1, Q^2$  и  $R^1, R^2$ , а также функции  $\tilde{f}(v)$  устанавливали на основе значений компонент  $u_1, u_2$ , полученных в предыдущем приближении. Для этого привлекали формулы (34), (2), инварианты (15), (16), выражение (13), формулы (19), (22), а также уравнение (29), формулы (37), (27) и (28).

После этого по первому из уравнений (14) вычисляли компоненту  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точке  $B$ . Если она не удовлетворяла равенству (39), то величину  $P_o$  корректировали и всю процедуру повторяли.

Наконец, проверяли соблюдение критерия (36) в точке  $B$ . Если это не имело места, то параметр  $w$  изменяли.

**Анализ полученных результатов.** Краевая задача решена для случаев, в которых размер  $s_{(1)}$  составлял  $6,0 \cdot 10^{-2}$  м (первый случай),  $4,0 \cdot 10^{-2}$  м (второй случай) и  $2,0 \cdot 10^{-2}$  м (третий случай).

В результате решения краевой задачи определен, в частности, параметр  $w$  (табл. 1).

Независимо от размера  $s_{(1)}$ , параметр  $w$  был тем большим, чем большей была длина зоны предразрушения. В случаях, когда размер  $s_{(1)}$  был меньшим, параметр  $w$  принимал более низкие значения. И если во втором случае значения параметра  $w$  мало отличаются от его значений в первом случае, то в третьем случае — уже более существенно.

Таблица 1

$s_{(1)} \cdot 10^2, \text{ м}$	$l_s \cdot 10^2, \text{ м}$	$w \cdot 10^{-7}, \text{ Па}$
6,0	0,08	5,8463
	0,10	5,9037
	0,12	5,9098
4,0	0,08	5,7677
	0,10	5,8283
	0,12	5,8360
2,0	0,08	4,2999
	0,10	4,3553
	0,12	4,3657

Таблица 2

$w \cdot 10^{-7}, \text{ Па}$	$S_A^{11} \cdot 10^{-8}, \text{ Па}$	$S_B^{11} \cdot 10^{-8}, \text{ Па}$
5,8463	0,9701	2,0026
5,9037	0,6795	2,0046
5,9098	0,4345	2,0087
5,7677	0,9672	2,0012
5,8283	0,6759	2,0030
5,8360	0,4305	2,0067
4,2999	0,9895	1,9779
4,3553	0,7105	1,9780
4,3657	0,4704	1,9798



Заслуживает внимания то, каким образом изменялась при повышении параметра  $w$  компонента  $S^{11}$  тензора  $S$  в точках  $A$  и  $B$  (табл. 2).

Во всех случаях с повышением параметра  $w$  наблюдалось значительное уменьшение компоненты  $S_A^{11}$  и только некоторое увеличение компоненты  $S_B^{11}$ . К тому же, по сравнению с первым случаем, во втором случае компоненты  $S_A^{11}$  и  $S_B^{11}$  стали меньшими. Вместе с тем, по сравнению с первым случаем, в третьем случае компонента  $S_A^{11}$  стала большей, а компонента  $S_B^{11}$  осталась меньшей.

Проанализируем изменение компоненты  $S^{11}$  тензора  $S$  в точках на линии трещины. Оно обусловлено эволюцией зоны предразрушения, происходящей вследствие повышения параметра  $w$ . Заметим, что с повышением параметра  $w$  возрастает длина зоны предразрушения.

В качестве примера, на рис. 2 приведен график зависимости компоненты  $S^{11}$  от координаты  $x^2$  в первом случае. Для кривых, изображенных на этом графике, длина зоны предразрушения такова:

$$1 - 0,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad 2 - 0,10 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad 3 - 0,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Как видно, при возрастании длины зоны предразрушения от  $0,08 \cdot 10^{-2}$  м до  $0,10 \cdot 10^{-2}$  м компонента  $S^{11}$  тензора  $S$  в точках с координатами  $x^1 = 0$  и  $x^2 \leq 1,58 \cdot 10^{-2}$  м — уменьшалась, а в точках с координатами  $x^1 = 0$  и  $x^2 \geq 1,60 \cdot 10^{-2}$  м — увеличивалась.

В дальнейшем, при возрастании длины зоны предразрушения от  $0,10 \cdot 10^{-2}$  м до  $0,12 \cdot 10^{-2}$  м компонента  $S^{11}$  тензора  $S$  в точках с координатами  $x^1 = 0$  и  $x^2 \leq 1,60 \cdot 10^{-2}$  м — уменьшалась, а в точках с координатами  $x^1 = 0$  и  $x^2 \geq 1,62 \cdot 10^{-2}$  м — увеличивалась.

Указанная закономерность имела место во всех случаях.

Теперь проанализируем изменения компонент  $D_{11}, D_{22}, D_{33}$  тензора  $D$  в точке  $B$ , вызванные повышением параметра  $w$ .

Компоненты  $D_{11}^B, D_{22}^B, D_{33}^B$  вычислены (с учетом выражения (13)) по соотношениям (7) (табл. 3). Отметим, что в первом и втором случаях с повышением параметра  $w$  компонента  $D_{11}^B$  увеличивалась, а компонента  $D_{22}^B$  уменьшалась. В противоположность этому, в третьем случае с повышением параметра  $w$  компонента  $D_{11}^B$  уменьшалась, а компонента  $D_{22}^B$  увеличивалась.

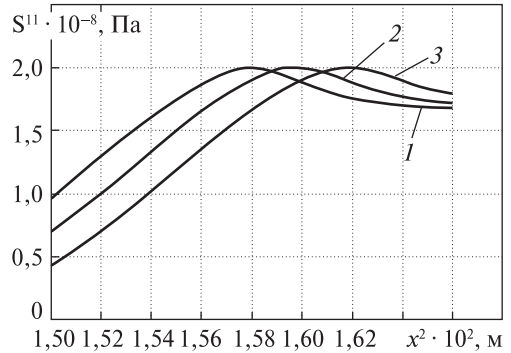


Рис. 2

Таблица 3

$w \cdot 10^{-7}$ , Па	$D_{11}^B \cdot 10^2$	$D_{22}^B \cdot 10^2$	$D_{33}^B \cdot 10^2$
5,8463	2,0235	1,8232	-3,5356
5,9037	2,0281	1,8190	-3,5359
5,9098	2,0311	1,8170	-3,5364
5,7677	2,0198	1,8266	-3,5353
5,8283	2,0240	1,8227	-3,5355
5,8360	2,0267	1,8209	-3,5360
4,2999	1,9597	1,8808	-3,5304
4,3553	1,9596	1,8809	-3,5304
4,3657	1,9590	1,8818	-3,5304

Укажем, что, по сравнению с первым случаем, во втором случае и, по сравнению со вторым случаем, в третьем случае компонента  $D_{11}^B$  уменьшилась, а компонента  $D_{22}^B$  увеличилась.

Но гораздо интересней поведение компоненты  $D_{33}^B$ . Действительно, в первом и

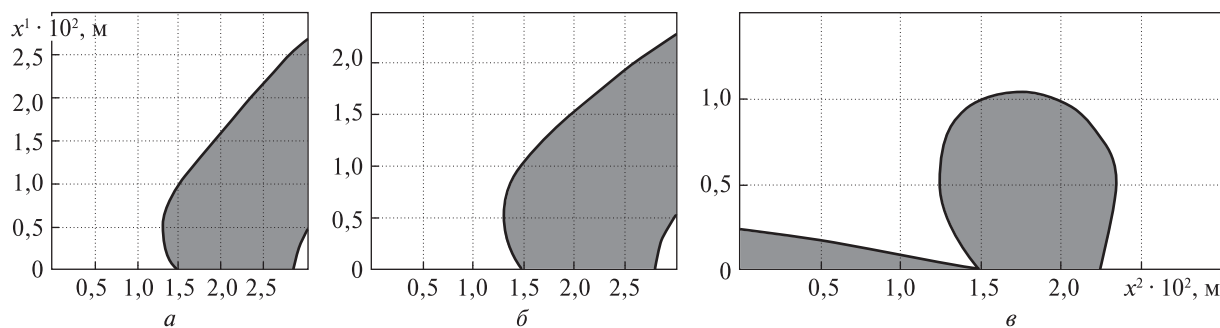


Рис. 3

втором случае повышение параметра  $\omega$  привело к незначительному уменьшению компоненты  $D_{33}^B$ , а в третьем случае вообще не вызвало каких-либо ее изменений.

Для каждого значения параметра  $\omega$  выявлены точки, в которых соблюдается критерий (35). Через эти точки проведены линии, являющиеся границами зоны нелинейности. Следует подчеркнуть, что во всех случаях они слабо зависят от параметра  $\omega$ , а значит, и от длины зоны предразрушения.

Наглядное представление о зоне нелинейности, изображенной в виде затемненной области, дают графики, приведенные на рис. 3. Это графики *a*, *б* и *в*, относящиеся к первому, второму и третьему случаям соответственно. В каждом из этих случаев длина зоны предразрушения составляла  $0,12 \cdot 10^{-2}$  м.

Напомним, что для вершины трещины  $x^1 = 0$ , а  $x^2 = 1,50 \cdot 10^{-2}$  м. Для боковой границы тела  $x^2 = 3,00 \cdot 10^{-2}$  м.

Из данных рис. 3, следует, что в рассмотренных случаях зона нелинейности получилась различной. Если в первом и втором случаях она, образовавшись у вершины трещины, почти полностью вышла на боковую границу тела (за исключением малой части указанной границы напротив трещины), то в третьем случае этого не произошло вовсе. Последнее связано с тем, что в этом случае зона нелинейности заметно сократилась и приняла иную форму. Представляется заслуживающим внимания и то, что в области сжатия над трещиной образовалась еще одна зона нелинейности.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Каминский А.А., Курчаков Е.Е. Об эволюции зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейном анизотропном теле. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 10. С. 44–55. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.044>
2. Богданова О.С., Каминский А.А., Курчаков Е.Е. О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 5. С. 25–33. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025>
3. Курчаков Е.Е. Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2015. № 9. С. 46–53. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.09.046>
4. Love A. *Treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge: Univ. Press, 1927. 674 p.
5. Kurchakov E.E. Stress-strain relation for nonlinear anisotropic medium. *Sov. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 9. С. 803–807.

Поступило в редакцию 11.02.2019

REFERENCES

1. Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2018). On evolution of fracture process zone near the crack tip in nonlinear anisotropic body. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 10, pp. 44-55 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.044>
2. Bogdanova, O. S., Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2017). On the fracture process zone near the front of an arbitrary crack in a solid. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 5, pp. 25-33 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025>
3. Kurchakov, E. E. (2015). Thermodynamic verification of constitutive equations for a nonlinear anisotropic body. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 9, pp. 46-53 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.09.046>
4. Love, A. (1927). *Treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge: Univ. Press.
5. Kurchakov, E. E. (1979). Stress-strain relation for nonlinear anisotropic medium. *Sov. Appl. Mech.*, 15, No. 9, pp. 803-807.

Received 11.02.2019

*A.O. Камінський, Є.Є. Курчаков*

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua)

ПРО КРАЙОВІ ЕФЕКТИ В НЕЛІНІЙНОМУ ПРУЖНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ З ТРИЩИНОЮ

Чисельно розв'язано крайову задачу про рівновагу нелінійного пружного ортотропного тіла з тріщиною нормального відриву. В результаті встановлено вплив одного із розмірів тіла на поля деформацій і напружень, а також на зону нелінійності. Виявлено крайові ефекти, зумовлені трансформацією зони нелінійності.

**Ключові слова:** нелінійне пружне ортотропне тіло, тріщина нормального відриву, зона передруйнування, конститутивні рівняння, крайові ефекти.

*A.A. Kaminsky, E.E. Kurchakov*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua)

ON EDGE EFFECTS IN THE NONLINEAR ELASTIC ANISOTROPIC BODY WITH A CRACK

The numerical solution is found for the boundary-value problem of equilibrium of the nonlinear elastic orthotropic body with a crack of normal separation. As a result, it is found that one of the body sizes influences substantially the stress-strain field and the nonlinearity zone size. Some edge effects due to the nonlinearity zone transformation are exposed.

**Keywords:** nonlinear elastic orthotropic body, crack of normal separation, prefracture zone, constitutive equations, edge effects.