ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.024
УДК 539.3

Я.Я. Рущицький, член-кореспондент НАН України

Інститут механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка, Київ
E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Про поверхневу хвилю вздовж циліндричної порожнини в неоднорідному пружному середовищі

Класична задача Біо про поверхневу гармонічну пружну хвилю, що поширюється вздовж вільної поверхні циліндричної порожнини, узагальнена на випадок неоднорідності середовища поширення. Припущено, що густина і пружні параметри Ляме середовища змінюються зі збільшенням радіуса (зменшуються при відході від порожнини) за експоненціальним законом. Використано попередні результати про загальні представлення розв'язків. Задача розв'язана аналітично до того рівня, коли далі повинні бути використані числові методи.

***Ключові слова**: циліндрична поверхнева пружна хвиля, експоненціально неоднорідне середовище, вільна циліндрична поверхня, функції Макдональда, затухання гармонічної хвилі.*

1. Постановка задачі. Розглянемо нескінчене тіло з циліндричною круговою порожниною, яка має вісь симетрії Oz і радіус r_0. Припустимо, що це тіло відповідає моделі трансверсально ізотропного неоднорідного пружного середовища з властивостями, які змінюються експоненціально по радіусу з відходом від граничної поверхні. Нехай вздовж поверхні порожнини поширюється в напрямку осі Oz гармонічна хвиля, яка затухає в радіальному напрямку. Така задача може розглядатися як узагальнення класичної задачі Біо [1], розв'язаної в припущенні ізотропії та однорідності середовища і осьової симетрії пружного стану.

2. Основні етапи розв'язування класичної задачі Біо [1]. *2.1. Постановка задачі і основні рівняння в потенціалах*. Вибирається циліндрична система координат $Or\vartheta z$ і розглядається гармонічна хвиля з фазовою змінною $\sigma = k(z - vt)$, невідомим хвильовим числом $k = (\omega/v)$, невідомою фазовою швидкістю v і довільними частотою ω і амплітудою A. Припускається, що хвиля поширюється в нескінченному середовищі з циліндричною порожниною постійного радіуса r_0 у напрямку вертикальної координати z і можливо загасає в напрямку радіальної координати r. У цій лінійній постановці і у припущенні, що деформування пружне задача осесиметрична і деформації описуються лише двома зміщеннями $(u_r(r,z,t) u_\varphi(r,z,t) = 0, u_\varphi(r,z,t))$ та двома рівняннями Ляме такого вигляду:

$$(1/2)(C_{11} - C_{12})[\Delta_{rz} u_r - (1/r^2) u_r] + (1/2)(C_{11} + C_{12})(u_{r,r} + (1/r) u_r + u_{z,z})_{,r} = \rho u_{r,tt}, \quad (1)$$

$$(1/2)(C_{11}-C_{12})\Delta_{rz}u_z+(1/2)(C_{11}+C_{12})[u_{r,r}+(1/r)u_r+u_{z,z}]_{,z}=\rho u_{z,tt}\,, \qquad (2)$$

чи

$$(\lambda+2\mu)[u_{r,rr}+(1/r)u_{r,r}-(1/r^2)u_r+u_{z,rz}]+\mu(u_{r,zz}-u_{z,rz})=\rho u_{r,tt}\,, \qquad (3)$$

$$(\lambda+2\mu)[u_{r,rz}+(1/r)u_{r,z}+u_{z,zz}]-\mu[(1/r)(u_{r,z}-u_{z,r})+(u_{r,rz}-u_{z,rr})]=\rho u_{z,tt}\,. \qquad (4)$$

Далі вводяться потенціали $\Phi(r,z,t), \Psi(r,z,t)$

$$u_r=\Phi_{,r}-\Psi_{,z}, \quad u_z=\Phi_{,z}+\Psi_{,r}+(1/r)\Psi\,, \qquad (5)$$

при підстановці яких у рівняння (3) та (4) отримуються два незв'язані лінійних хвильових рівняння

$$\Delta_{rz}\Phi-(1/v_L)^2\Phi_{,tt}=0\,, \qquad (6)$$

$$\Delta_{rz}\Psi-(1/r^2)\Psi-(1/v_L)^2\Psi_{,tt}=0\,, \qquad (7)$$

де використані стандартні позначення оператора Лапласа

$$\Delta_{rz}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

і швидкостей поздовжної та поперечної хвиль $v_L=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}, \quad v_T=\sqrt{\mu/\rho}$ в ізотропному пружному матеріалі.

2.2. Розв'язок хвильових рівнянь у вигляді функцій Макдональда. Розв'язок рівнянь (6) та (7) шукається у вигляді гармонічних хвиль у напрямку вертикальної координати

$$\Phi(r,z,t)=\Phi^*(r)e^{i(kz-\omega t)}, \quad \Psi(r,z,t)=\Psi^*(r)e^{i(kz-\omega t)}. \qquad (8)$$

Підстановка розв'язків (8) у хвильові рівняння (6) та (7) дає рівняння щодо невідомих амплітуд $\Phi^*(r), \quad \Psi^*(r)$

$$\Phi^*_{,rr}+(1/r)\Phi^*_{,r}-(k^2-k_L^2)\Phi^*=0 \quad (\Phi^*_{,rr}+(1/r)\Phi^*_{,r}-k^2(1-(v/v_L)^2)\Phi^*=0)\,, \qquad (9)$$

$$\Psi^*_{,rr}-(1/r)\Psi^*_{,r}-[k^2-k_T^2+(1/r^2)]\Psi^*=0\,, \qquad (10)$$

$$(\Psi^*_{,rr}-(1/r)\Psi^*_{,r}-\{k^2[1-(v/v_T)^2]+(1/r^2)\}\Psi^*=0)\,.$$

Отримані рівняння відповідають рівнянню Бесселя для функцій Макдональда $K_\lambda(x)$ (модифікованим функціям Бесселя другого роду) [2]

$$y''+(1/x)y'-[1+(\lambda^2/x^2)]y=0\,. \qquad (11)$$

Більш точно рівняння (9), (10) мають розв'язок у вигляді функцій Макдональда, якщо виконуються умови

$$k^2-k_L^2>0\,,\ k^2-k_T^2>0 \quad (k^2(1-(v/v_L)^2)>0\,,\ k^2(1-(v/v_T)^2)>0)\,. \qquad (12)$$

Згідно з умовами (12), хвильове число циліндричної хвилі повинно бути дійсним і її швидкість меншою від швидкостей класичних поздовжної і поперечної плоских хвиль.

Далі хвильові рівняння (9) та (10) розглядаються кожне окремо.

Перше записується таким чином:

$$\Phi^{*}{}_{,rr} + (1/r)\Phi^{*}{}_{,r} - m_L^2\Phi^{*} = 0, \quad m_L = k\sqrt{(1-(v/v_L)^2)}\,. \tag{13}$$

Це рівняння має розв'язок у вигляді функції Макдональда

$$\Phi^{*}(r) = A_{\Phi}K_0(m_L r) \tag{14}$$

нульового порядку і невідомого аргументу $x = m_L r$, який включає невідому швидкість хвилі. Амплітудний коефіцієнт A_{Φ} вважається постійним і довільним.

Друге хвильове рівняння може бути записане у вигляді

$$\Psi^{*}{}_{,rr} - (1/r)\Psi^{*}{}_{,r} - \{m_T^2 + (1/r^2)\}\Psi^{*} = 0\,,\ m_T = k\sqrt{(1-(v/v_T)^2)}\,. \tag{15}$$

Відповідний розв'язок цього рівняння за умов (12)

$$\Psi^{*}(r) = A_{\Psi}K_0(m_T r) \tag{16}$$

виражається через функцію Макдональда

$$K_1 = \left(r\sqrt{(k^2 - k_T^2} \right)$$

першого порядку і невідомого аргументу $x = m_L r$, який включає невідому швидкість хвилі. Амплітудний коефіцієнт A_{Ψ} вважається постійним і довільним.

Зазначимо, що функції Макдональда мають властивість зменшення значень (загасання) зі збільшенням їх аргументу. Тому хвилі (15), (16), які поширюються вздовж вертикальної координати z, можуть розглядатися як хвилі з амплітудами $\Phi^{*}(r), \Psi^{*}(r)$, що загасають при збільшенні радіальної координати r. Це означає, що амплітуди можуть зменшуватися істотно при збільшенні відстані від поверхні циліндричної порожнини. У цьому сенсі хвилі (15) та (16) є поверхневими. Також у цьому полягає сенс умов (12).

Такі ж умови використані в аналізі класичної поверхневої хвилі Релея, яка поширюється вздовж плоскої поверхні пружного ізотропного тіла. Однак хвиля Релея загасає як експоненціальна функція при відході від вільної поверхні, тоді як циліндрична хвиля Біо загасає як функції Макдональда. При цьому аргументи в експоненціальній функції і функціях Макдональда ідентичні і залежать від швидкості хвилі.

2.3. Граничні умови. Рівняння для невідомого хвильового числа. Граничні умови відповідають відсутності напружень на поверхні $r = r_0$

$$\sigma_{rr}(r = r_0, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r = r_0, t) = 0\,. \tag{17}$$

Напруження

$$\sigma_{rr} = 2\mu u_{r,r} + \lambda((u_r/r) + u_{r,r} + u_{z,z}), \quad \sigma_{rz} = \mu(u_{r,z} + u_{z,r}) \tag{18}$$

записуються через потенціали

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)(\Phi_{,rr} - \Psi_{,rz}) + \lambda\{(1/r)(\Phi_{,r} - \Psi_{,z}) + \Phi_{,zz} + \Psi_{,rz} + (1/r)\Psi_{,z}\}\,, \tag{19}$$

$$\sigma_{rz} = \mu[(\Phi_{,rz} - \Psi_{,zz}) + \Phi_{,zr} + \Psi_{,rr} + (1/r)\Psi_{,r} - (1/r^2)\Psi]\,. \tag{20}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2019. № 5

Тоді граничні умови (17) можна записати у вигляді

$$[2\mu(\Phi_{,rr}-\Psi_{,rz})+\lambda\Delta\Phi]_{r=r_0}=0,\quad [2(\Phi_{,rz}-\Psi_{,zz})+\Delta\Psi-(1/r^2)\Psi]_{r=r_0}=0\,. \qquad (21)$$

У роботі [1] Біо використав вирази

$$\Delta\Phi-(1/v_L)^2\Phi_{,tt}=0\,,\ \Delta\Psi-(1/r^2)\Psi-(1/v_T)^2\Psi_{,tt}=0$$

і переписав рівняння (21) таким чином

$$[(\Phi_{,rr}-\Psi_{,rz})+(\lambda/2\mu)(1/v_L)^2\Phi_{,tt}]_{r=r_0}=0,\quad [2(\Phi_{,rz}-\Psi_{,zz})+(1/v_T)^2\Psi,tt]_{r=r_0}=0\,.$$

Тоді підстановка розв'язків (14), (16) у граничні умови (21) дає два однорідних алгебраїчних рівняння щодо невідомих постійних амплітудних коефіцієнтів

$$\left(1-(v/v_L)^2-\frac{\lambda}{\mu}(v/v_L)^2\frac{K_0(m_Lr_0)}{K_0(m_Lr_0)+K_2(m_Lr_0)}\right)A_\Phi-\sqrt{(1-(v/v_L)^2})A_\Psi=0\,, \qquad (22)$$

$$2\sqrt{(1-(v/v_L)^2})A_\Phi+(2-(v/v_T)^2)\frac{K_1(m_Tr_0)}{K_1(m_Lr_0)}A_\Psi=0\,. \qquad (23)$$

Аналіз цих рівнянь, що описують циліндричну поверхневу хвилю, подібний до аналізу, проведеного Релеєм для класичної хвилі, яка поширюється вздовж площини [3—6]. Певною новацією в аналізі системи (22), (23) є розгляд системи щодо величин $K_1(m_Lr_0)A_\Phi$ і $K_1(m_Sr_0)A_\Psi$

$$\left\{(1-(v/v_L)^2)\left[\frac{K_0(m_Lr_0)}{K_1(m_Lr_0)}+\frac{1}{m_Lr_0}\right]-\frac{\lambda}{2\mu}(v/v_L)^2\frac{K_0(m_Lr_0)}{K_1(m_Lr_0)}\right\}K_1(m_Lr_0)A_\Phi+$$

$$+\sqrt{(1-(v/v_S)^2}\left[\frac{K_0(m_Tr_0)}{K_1(m_Tr_0)}+\frac{1}{m_Tr_0}\right]K_1(m_Tr_0)A_\Psi=0\,, \qquad (24)$$

$$2\sqrt{(1-(v/v_L)^2})K_1(m_Lr_0)A_\Phi+(2-(v/v_T)^2)K_1(m_Tr_0)A_\Psi=0\,. \qquad (25)$$

Розв'язування системи (24), (25) дає два результати. По-перше, розв'язок знаходиться з точністю до одного амплітудного множника. По-друге, рівняння для визначення фазової швидкості циліндричної поверхневої хвилі може бути отримане в явному вигляді.

В роботі [1] Біо продемонстрував певне мистецтво в оперуванні з функціями Макдональда і записав рівняння (24) лише через функції нульового і першого порядків. Для цього були використані відомі формули [2]

$$K_0'(x)=-K_1(x),\quad K_1'(x)=-K_0''(x),$$

$$K_0''(x)+(1/x)K_0'(x)=K_0(x)\,,\ \ K_0''(x)=(1/x)K_1(x)+K_0(x)\,. \qquad (26)$$

В результаті рівняння для визначення фазової швидкості циліндричної хвилі має вигляд

$$(2-(v/v_T)^2)\left\{[2-(v/v_T)^2]\frac{K_0(m_Lr_0)}{K_1(m_Lr_0)}+\frac{(1-(v/v_L)^2)}{m_Lr_0}\right\}-$$

$$-4\sqrt{(1-(v/v_L)^2})\sqrt{(1-(v/v_T)^2})\left[\frac{K_0(m_Tr_0)}{K_1(m_Tr_0)}+\frac{1}{m_Tr_0}\right]=0\,. \qquad (27)$$

Запишемо для порівняння відповідне рівняння для хвилі Релея [3—6]

$$-4\sqrt{1-(v/v_L)^2}\,\sqrt{1-(v/v_S)^2}\,[2-(v/v_S)^2]^2=0\,. \tag{28}$$

Таким чином, присутність функцій Макдональда в рівнянні (27) істотно ускладнює аналіз цього рівняння, оскільки функції згідно зі співвідношеннями

$$m_L=k\sqrt{(1-(v/v_L)^2)}\,,\ m_S=k\sqrt{(1-(v/v_T)^2)}$$

мають в аргументі невідому швидкість. Коли радіус порожнини великий, тоді функції Макдональда можуть бути представлені простой формулою

$$K_0(r)=K_1(r)=e^{-r}\sqrt{\pi/2r}$$

і рівняння (27) зводиться до рівняння Релея (28).

Строго кажучи, аналітична частина аналізу закінчується отриманням рівняння (27). Далі аналіз можна продовжити за допомогою числових методів і Біо в [1] пропонує деякі коментарі і висновки, основані на числових можливостях 1950-х років.

Можливості аналітичного підходу ще зберігаються в задачі про існування прийнятної швидкості хвилі. Перш за все, рівняння (27) залежить від пружних постійних і ця залежність може бути представлена в формі залежності від відношення відомих швидкостей (v_L/v_T). Якщо прийняти позначення $(v^2/v_T^2)=z$, то рівняння (27) можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}(2-z(v_L/v_T)^2)\left\{(2-z)\frac{K_0(r_0k\sqrt{1-z(v_L/v_T)^2})}{K_1(r_0k\sqrt{1-z(v_L/v_T)^2})}+\frac{(1-z(v_L/v_T)^2)}{r_ok\sqrt{1-z(v_L/v_T)^2}}\right\}-\\-4\sqrt{(1-z)^2}\,\sqrt{1-z(v_L/v_T)^2}\left[\frac{K_0(r_0k\sqrt{1-z})}{K_1(r_0k\sqrt{1-z})}+\frac{1}{r_0k\sqrt{1-z}}\right]=0.\end{gathered} \tag{29}$$

3. Циліндрична хвиля, що поширюється вздовж поверхні циліндричної порожнини у напрямку вертикальної осі (осесиметрична задача ізотропної неоднорідної теорії пружності). Розглянемо нескінчене ізотропне пружне тіло з циліндричною круговою порожниною, яка має вісь симетрії Oz і радіус r_0. Припустимо, що пружні модулі Ляме і густина є функціями і експоненціально залежать від радіуса за достатньо простим законом

$$\lambda(r)=\lambda_0e^{-\alpha r};\quad \mu(r)=\mu_0e^{-\alpha r};\quad \rho(r)=\rho_0e^{-\alpha r}\left(\alpha>0,\lambda_0,\mu_0=\mathrm{const};\quad \nu_o=\frac{\lambda_0}{2(\lambda_0+\mu_0)}\right). \tag{30}$$

Якщо вздовж поверхні порожнини поширюється гармонічна хвиля у напрямку осі Oz, амплітуда якої загасає при відході від порожнини, то така задача може розглядатися як узагальнення на випадок неоднорідності матеріалу задачі Біо [1], яку Біо розв'язав у припущенні ізотропії матеріалу.

Перша принципова відмінність сформульованої задачі від задачі однорідної теорії виявляється у визначальних рівняннях

$$\sigma_{rr}(r,z,t)=e^{-\alpha r}\{(\lambda_0+2\mu_0)u_{r,r}(r,z,t)+\lambda_0(1/r)u_r(r,z,t)+\lambda_0u_{z,z}(r,z,t)\}\,; \tag{31}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(r,z,t)=e^{-\alpha r}\{\lambda_0u_{r,r}(r,z,t)+\lambda_0\overline{u}_r(r,z,t)+2\mu_0(1/r)u_r(r,z)+\lambda_0u_{z,z}(r,z)\}\,; \tag{32}$$

$$\sigma_{zz}(r,z,t) = e^{-\alpha r}\{\lambda_0 u_{r,r}(r,z,t) + \lambda_0 (1/r) u_r(r,z,t) + (\lambda_0 + 2\mu_0) u_{z,z}(r,z,t)\}; \tag{33}$$

$$\sigma_{rz}(r,z,t) = e^{-\alpha r}\mu_0 [(u_{r,z}(r,z,t) + u_{z,r}(r,z,t)]. \tag{34}$$

Залежності (31)—(34) ускладнюють процедуру переходу від рівнянь руху

$$\sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + (1/r)(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = \rho_0 e^{-\alpha r} u_{r,tt}, \ \sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + (1/r)\sigma_{rz} = \rho_0 e^{-\alpha r} u_{z,tt} \tag{35}$$

до системи рівнянь типу Ляме неоднорідної теорії пружності [7]. Така система, в якій вже враховані представлення (30) і прийнято припущення про гармонічність з частотою ω руху з часом

$$u_{r(z)}(r,z,t) = \bar{u}_{r(z)}(r,z) e^{-i\omega t}, \tag{36}$$

теж містить два рівняння

$$(\lambda_0 + 2\mu_0)[\bar{u}_{r,rr} + (1/r)\bar{u}_{r,r} - ((1/r^2) - k_{0L}^2)\bar{u}_r + \bar{u}_{r,rz}] + \mu_0(\bar{u}_{r,zz} - \bar{u}_{z,rz}) - \tag{37}$$

$$-\alpha\{\underline{(\lambda_0 + 2\mu_0)\bar{u}_{r,r} + \lambda_0(1/r)\bar{u}_r - \lambda_0 \bar{u}_{z,z}}\} = 0; \ k_{0L} = \omega/v_{0L}, \ v_{0L} = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0};$$

$$(\lambda_0 + 2\mu_0)[\bar{u}_{r,rz} + (1/r)\bar{u}_{r,z} + \bar{u}_{z,zz}] - \mu_0[(1/r)(\bar{u}_{r,z} - \bar{u}_{z,r}) + (\bar{u}_{r,rz} - \bar{u}_{z,rr}) + k_{0T}^2 \bar{u}_z] - \tag{38}$$

$$\underline{-\alpha\mu_0(\bar{u}_{r,z} + \bar{u}_{z,r})} = 0; \ k_{0T} = \omega/v_{0T}, \ v_{0T} = \sqrt{\mu_0/\rho_0}.$$

Далі будемо дотримуватися публікацій [8—10], у яких отримані загальні представлення зміщень для осесиметричної задачі статики ізотропної неоднорідної теорії пружності для системи рівнянь, подібної до системи (37), (38). Введемо замість функцій $\bar{u}_r(r,z)$, $\bar{u}_z(r,z)$ дві нові функції $R(r,z), Z(r,z)$

$$\bar{u}_r = (\partial R/\partial r), \quad \bar{u}_z = Z \tag{39}$$

і підставимо представлення (39) у рівняння (39) та (38). Отримаємо два нових рівняння щодо функцій $R(r,z), Z(r,z)$.

$$\begin{gathered}(\lambda_0 + 2\mu_0)[R_{,rrr} + (1/r)R_{,rr} - ((1/r^2) - k_{0L}^2)R_{,r}] + \mu_0 R_{,zz} - \\ -\alpha\{(\lambda_0 + 2\mu_0)R_{,rr} + \lambda_0(1/r)R_{,r}\} + (\lambda_0 + \mu_0)Z_{,rz}\alpha\lambda_0 Z_{,z} = 0;\end{gathered} \tag{40}$$

$$(\lambda_0 + \mu_0)(\Delta_r R)_{,z} - \alpha\mu_0 R_{,z} + (\lambda_0 + 2\mu_0)Z_{,zz} - \mu_0\Delta_r Z + \mu_0 k_{0T}^2 Z - \alpha\mu_0 Z_{,r} = 0. \tag{41}$$

Припустимо, що розглядається розв'язок у вигляді гармонічної хвилі вздовж вертикальної осі

$$R = \tilde{R}(r)e^{ikz}, \quad Z = \tilde{Z}(r)e^{ikz}. \tag{42}$$

Зауважимо, що умови (36) вже гарантують гармонічність і хвиля має стандартний вигляд

$$u_{r(z)}(r,z,t) = \bar{u}_{r(z)}(r,z)e^{-i\omega t} = \tilde{u}_{r(z)}(r)e^{-i(kz-\omega t)}, \tag{43}$$

Рівняння (40), (41) можна записати таким чином:

$$\begin{gathered}(\lambda_0 + 2\mu_0)[\tilde{R}_{,rrr} + (1/r)\tilde{R}_{,rr} - ((1/r^2) - k_{0L}^2)\tilde{R}_{,r}] + k^2\mu_0\tilde{R}_{,r} \\ -\alpha\{(\lambda_0 + 2\mu_0)\tilde{R}_{,rr} + \lambda_0(1/r)\tilde{R}_{,r}\} + ik(\lambda_0 + \mu_0)\tilde{Z}_{,r} + ik\alpha\lambda_0\tilde{Z} = 0;\end{gathered} \tag{44}$$

$$ik(\lambda_0+\mu_0)\Delta_r\tilde{R}-\alpha ik\mu_0\tilde{R}-\mu_0\{\Delta_r\tilde{Z}+(k_{0T}^2-k^2((\lambda_0+2\mu_0)/\mu_0))\tilde{Z}\}-\alpha\mu_0\tilde{Z}_{,r}=0\,, \tag{45}$$

$$\Delta_r f=f_{,rr}+(1/r)f_r$$

чи

$$L_{11}\tilde{R}+L_{12}\tilde{Z}=0,\quad L_{21}\tilde{R}+L_{22}\tilde{Z}=0\,. \tag{46}$$

Введемо далі функцію типу Лява $\chi(r)$ за допомогою співвідношень

$$\tilde{R}=L_{22}\chi,\quad \tilde{Z}=-L_{11}\chi\,. \tag{47}$$

Тоді рівняння (44) задовольняється тотожньо, а (45) трансформується в рівняння для знаходження функції $\chi(r)$

$$\begin{aligned}&\Delta_r\Delta_r\tilde{\chi}_{,r}+\{k_{oL}^2+k_{oT}^2-((\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0))k^2\}\Delta_r\tilde{\chi}_{,r}+\\&+(k_{0T}^2-k^2((\lambda_0+2\mu_0)/\mu_0))(k_{0L}^2-k^2(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0)))\tilde{\chi}_{,r}=\\&=\alpha\{\Delta_r\chi_{,rr}+M_{\Delta rr}\Delta_r((1/r)\chi_{,r})+(\Delta_r\chi)_{,r}+M_{\Delta}\Delta_r\chi+M_{rr}\chi_{,rr}+M_r\chi_{,r}\}\end{aligned} \tag{48}$$

чи

$$\begin{aligned}&(\Delta_r-N^{2+})(\Delta_r-N^{2-})\chi_{,r}=\\&=\alpha\{\Delta_r\chi_{,rr}+M_{\Delta rr}\Delta_r((1/r)\chi_{,r})+(\Delta_r\chi)_{,r}+M_{\Delta}\Delta_r\chi+M_{rr}\chi_{,rr}+M_r\chi_{,r}\},\end{aligned} \tag{49}$$

де прийняті позначення

$$\begin{aligned}&N^{2\pm}=(1/2)\{(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0))k^2-k_{0L}^2-k_{0T}^2\}\times\\&\times\left[1\pm\sqrt{1-4\frac{\{(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0))k^2-k_{0L}^2-k_{0T}^2\}^2}{(k^2(((\lambda_0+2\mu_0)/\mu_0)-k_{0T}^2)(k^2(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0)-k_{0L}^2))}}\right]\end{aligned} \tag{50}$$

$$M_{\Delta rr}=\lambda_0/(\lambda_0+2\mu_0)\,;\;\; M_{\Delta rr}=k^2(\lambda_0/(\lambda_0+\mu_0)/\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0)\,; \tag{51}$$

$$M_{rr}=k_{0T}^2+k_{0L}^2-k^2\frac{{\lambda_0}^2+3\mu_0\lambda_0+4{\mu_0}^2}{\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0)}\,;\;\; M_r=[\lambda_0/(\lambda_0+2\mu_0)][((\lambda_0+3\mu_0)/\mu_0)k^2-k_{0T}^2]\,.$$

Припустимо далі, що хвиля $u(r,z,t)=\widehat{u}(r)e^{-i(kz-\omega t)}$ є поверхневою. Тоді один з розв'язків $\widehat{\chi}(r)$ рівняння (48) повинен описуватися функціями, що загасають при збільшенні радіуса. В класичній задачі Біо це гарантується умовою додатності коефіцієнта $m_L^2=k^2(1-(v/v_L)^2)>0$ в рівнянні (13) і такими функціями є функції Макдональда. $\chi(r)=K_m(nr)$.

Якщо матеріал однорідний ($\alpha=0$), то права частина рівняння (48) дорівнює нулю і рівняння (48) перетворюється у класичне

$$(\Delta_r\chi-N^{2+}\chi)(\Delta_r\chi-N^{2-}\chi)=0\,, \tag{52}$$

розв'язок якого є розв'язком задачі в рамках однорідної теорії пружності і він виражається через функцію Макдональда нульового індексу

$$\chi(r)=A^+K_0(N^+r)+A^-K_0(N^-r)\,. \tag{53}$$

При записі коефіцієнтів (51) припущено, що зміна фізичних властивостей матеріалу достатньо слабка і квадратами параметра загасання α можна знехтувати.

Зміщення виражаються через потенціал $\chi(r)$ таким чином:

$$u_{r(z)}(r,z,t) = -ik\{(\lambda_0+\mu_0)\chi_{,rr} - \alpha\lambda_o\chi_{,r}\}e^{-i(kz-\omega t)}, \tag{54}$$

$$u_{r(z)}(r,z,t) = \{(\lambda_0+2\mu_0)[(\Delta_r\chi)_{,r} + (k_{0L}^2 - k^2(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0)))\chi_{,r}] -$$

$$-\alpha[(\lambda_0+2\mu_0)\chi_{,rr} + \lambda_0(1/r)\chi_{,r}]\}e^{-i(kz-\omega t)}. \tag{55}$$

При розв’язуванні рівняння (48) можна застосовувати різні методи, для яких важливо, що ліва частина рівняння є класичним лінійним виразом [3—6]. Тоді розв’язок при відсутності правої частини (коли малий параметр α є нулем) відомий.

Розглянемо, наприклад, процедуру знаходження розв’язку, що відповідає шостому доданку в правій частині (54) $-\alpha M_r\chi_{,r}^{(1)}$, і запишемо рівняння (48) з правою частиною лише з шостим доданком у вигляді

$$\Delta_r\Delta_r\tilde{\chi}_{,r} + \{k_{0L}^2 + k_{0T}^2 - (\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0))k^2\}\Delta_r\tilde{\chi}_{,r} +$$

$$+\left\{\begin{matrix} k_{0T}^2 - k^2((\lambda_0+2\mu_0/\mu_0))(k_{0L}^2 - k^2(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0)))- \\ -\alpha[(\lambda_0/(\lambda_0+2\mu_0)][((\lambda_0+3\mu_0/\mu_0)k^2 - k_{0T}^2] \end{matrix}\right\}\tilde{\chi}_{,r} = 0. \tag{56}$$

Розв’язок цього рівняння відрізняється від розв’язку (53) більш складним виразом для аргументів функції Макдональда через наявність в (56) доданку з множником α

$$\chi_{,r}(r) = A^+K_0(N^{+(6\alpha)}r) + A^-K_0(N^{-(6\alpha)}r), \tag{57}$$

$$N^{2\pm(6\alpha)} = (1/2)[(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0))k^2 - k_{0L}^2 - k_{0T}^2]\times$$

$$\times\left[1\pm\sqrt{1-4\frac{\{(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0))k^2 - k_{0L}^2 - k_{0T}^2\}^2 -}{\left\{\begin{matrix}(k^2((\lambda_0+2\mu_0/\mu_0) - k_{0T}^2)(k^2(\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0)) - k_{0L}^2) \\ -\alpha[\lambda_0/(\lambda_0+2\mu_0)][((\lambda_0+3\mu_0/\mu_0)k^2 - k_{0T}^2]\end{matrix}\right\}}}\right].$$

Показана процедура може бути використана і для наближеного обчислення розв’язків, які відповідають решті п’яти доданків. Наближеність може бути основана на близькості графіків функцій Макдональда з індексами 1—4. Тоді загальний висновок щодо впливу слабкої неоднорідності матеріалу на параметри хвилі (хвильове число чи швидкість хвилі) полягає у тому, що згідно з формулами (57) ці параметри залежать від малого параметра неоднорідності і через малість параметра мало змінюються порівняно з випадком однорідного матеріалу. Більш визначена відповідь може бути отримана при числовому моделюванні.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Biot M.A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid. *J Appl. Phys.*, 1952. **23**, № 9. P. 997—1005. doi: https://doi.org/10. 1063/1.1702365
2. Olver F.W.J., Lozier D.W., Bousvert R.F., Clark C.W. (eds). NIST (National Institute of Standards and Technology). Handbook of Mathematical Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 968 p.
3. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam: North-Holland, 1973. 425 p.
4. Viktorov I.A. Rayleigh and Lamb Waves. New York: Plenum Press, 1967. 168 p.
5. Rushchitsky J.J. Theory of waves in materials. Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2012. 270 p.
6. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of engineering mechanics. Heidelberg: Springer, 2014. 454 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00464-8
7. Lekhnitsky S.G. Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body. San Francisco: Golden Day Inc., 1963. 404 p. doi: https://doi.org/10.1137/1009023
8. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. Revisiting displacement functions in three-dimen sional elasticity of inhomogeneous media. *Int.J. Solids Struct*. 2009. **46**, № 18—19. P. 3463—3470. doi: https://doi.org/10.1016/j/ijsolstr.2009.06.001
9. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. General Love solution in the linear inhomogeneous isotropic theory of elasticity in dependence of elastic properties on radius. *Int.Appl. Mech*. 2010. **46**, № 3. P. 245—254. doi: https://doi.org/10.1007/s10778-010-0304-6
10. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. General Love solution in the linear inhomogeneous transversely isotropic theory of elasticity in dependence of elastic constants on radial coordinate. *Int. Appl. Mech*. 2010. **46**, № 4. P. 331—343. doi: https://doi.org/10.1007/s10778-010-0304-6

Надійшло до редакції 06.03.2019

REFERENCES

1. Biot, M. A. (1952). Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid. J Appl. Phys., 23, No. 9, pp. 997-1005. doi: https://doi.org/10. 1063/1.1702365
2. Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Bousvert, R. F. & Clark, C. W. (eds). (2010). NIST (National Institute of Standards and Technology). Handbook of Mathematical Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 968 p.
3. Achenbach, J. D. (1973). Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam: North-Holland, 425 p.
4. Viktorov, I. A. (1967). Rayleigh and Lamb Waves. New York: Plenum Press, 168 p.
5. Rushchitsky, J. J. (2012). Theory of waves in materials. Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 270 p.
6. Rushchitsky, J. J. (2014). Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of engineering mechanics. Heidelberg: Springer, 454 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00464-8
7. Lekhnitsky, S. G. (1963). Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body. San Francisco: Golden Day Inc., 404 p. doi: https://doi.org/10.1137/1009023
8. Kashtalyan, M. & Rushchitsky, J. J. (2009). Revisiting displacement functions in three-dimen sional elasticity of inhomogeneous media. Int. J. Solids Struct., 46, No. 18-19, pp. 3463-3470. doi: https://doi.org/10.1016/j/ijsolstr.2009.06.001
9. Kashtalyan, M. & Rushchitsky, J. J. (2010). General Love solution in the linear inhomogeneous isotropic theory of elasticity in dependence of elastic properties on radius. Int.Appl. Mech., 46, No. 3, pp. 245-254. doi: https://doi.org/10.1007/s10778-010-0304-6
10. Kashtalyan, M. & Rushchitsky, J. J. (2010). General Love solution in the linear inhomogeneous transversely isotropic theory of elasticity in dependence of elastic constants on radial coordinate. Int. Appl. Mech., 46, No. 4, pp. 331-343. doi: https://doi.org/10.1007/s10778-010-0304-6

Received 06.03.2019

Я.Я. Рущицкий

Институт механики НАН Украины им. С.П. Тимошенко, Киев
E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

О ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЕ ВДОЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Классическая задача Био о поверхностной гармонической упругой волне, распространяющейся вдоль свободной поверхности цилиндрической полости, обобщена на случай неоднородности среды распространения. Предположено, что плотность и упругие параметры Ляме среды изменяются с увеличением радиуса (уменьшаются при отходе от полости) по экспоненциальному закону. Использованы предыдущие результаты об общих представлениях решений. Задача решена аналитически до того уровня, когда далее должны быть использованы числовые методы.

Ключевые слова: *цилиндрическая поверхностная упругая волна, экспоненциально неоднородная среда, цилиндрическая поверхность, функции Макдональда, затухание гармонической волны.*

J.J. Rushchitsky

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: rushch@inmech.kiev.ua

ON A SURFACE WAVE ALONG THE CYLINDRICAL CAVITY IN AN INHOMOGENEOUS ELASTIC MATERIAL

The classical Biot problem on a surface harmonic elastic wave propagating along the free surface of a cylindrical cavity is generalized to the case of inhomogeneity of a medium of propagation. It is assumed that the density and Lamé elastic parameters of the medium are changed with increasing the radius (they become smaller with moving from the cavity) by the exponential law. The prior results on a general representation of solutions are used. The problem is solved analytically up to the level, when the numerical methods have to be used.

Keywords: *cylindrical surface elastic wave, exponentially inhomogeneous medium, cylindrical surface, Macdonald functions, attenuation of a harmonic wave.*