ISSN 2522-9818 (print)
ISSN 2524-2296 (online) Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2019. No. 1 (7)

УДК 004.023 DOI: https://doi.org/10.30837/2522-9818.2019.7.102

В. Ф. Прокопенков, Ю. Н. Кожин, О. Н. Малых

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КОЛЬЦЕВОГО МАРШРУТА, ПРОХОДЯЩЕГО ЧЕРЕЗ ЗАДАННОЕ МНОЖЕСТВО ПУНКТОВ НА КАРТЕ

Предметом исследований являются методы и информационные технологии транспортной логистики. **Цель** – снижение затрат и сокращение времени на доставку товаров автомобильным транспортом за счёт разработки и внедрения эффективных методов и алгоритмов поиска оптимального маршрута развоза товаров. В статье рассматривается **задача** поиска оптимального кольцевого маршрута развоза товаров со склада, проходящего через заданное множество пунктов на карте. Для решения задачи используются **методы и алгоритмы** дискретной математики. Получены следующие **результаты.** Выполнен анализ проблемы и существующих методов дискретной математики для её решения, определены недостатки этих методов. Предложен метод решения задачи, устраняющий эти недостатки. Разработан эвристический алгоритм решения задачи, реализующий предложенный метод решения. Решение рассматриваемой задачи сводится к задаче поиска гамильтонова цикла на новом графе меньшей размерности. Новый граф строится из начального графа, описывающего карту, и состоит из вершин заданного множества пунктов на карте, через которые должен пройти маршрут. Каждая дуга в новом графе соединяет пару вершин, если в начальном графе существует путь между этими вершинами. Дуга взвешивается числом, которое определяет минимальное расстояние между вершинами в начальном графе, которые она соединяет. Для построения графа используется алгоритм Дейкстры. **Выводы:** предложенный метод решения рассмотренной задачи выполняет её сводимость к классической задаче дискретной математики поиска гамильтонова цикла на графе. Тестирование разработанной программы показало работоспособность предложенного метода и алгоритма решения задачи. Разработанный метод позволяет понизить размерность решаемой задачи, поскольку решение ищется на новом графе меньшей размерности в отличие от графа, описывающего исходную карту. Фактор понижения размерности значительно снижает затраты на поиск решения и повышает шансы найти оптимальный маршрут развоза товаров.

Ключевые слова: транспортная логистика; маршрут на карте; граф; гамильтонов цикл; сложность; NP-полнота; алгоритм Дейкстры; сводимость; схема поиска с возвратами.

Введение

Логистика это не только широко распространённый термин в экономике, а полноценная наука о планировании, организации, управлении, контроле и регулировании перемещения материальных и информационных потоков в пространстве и во времени от их первичного источника до конечного потребителя [1, 2]. Перемещение товарно-материальных ценностей невозможно без использования транспортных средств. Значительная часть операций логистики, связанных с перемещением материальных ценностей от первичного источника до конечного потребителя, осуществляется с помощью транспорта и затраты на эти операции составляют до 50% от общих затрат на логистику [3]. Поэтому особую роль в этой науке играет транспортная логистика.

Одной из основных задач транспортной логистики является определение рациональных маршрутов доставки товаров. Маршруты доставки могут быть маятниковыми и кольцевыми [4]. В маятниковом маршруте путь следования транспорта вперёд и обратно проходит по одному и тому же пути. Маршрут, при котором путь следования транспортного средства составляет замкнутый контур, называется кольцевым маршрутом. Без сомнения организовывать транспортные перевозки по маятниковым маршрутам проще, поскольку не требуется тратить время и средства на разработку трудно находимого кольцевого маршрута, организацию диспетчеризации и управление перевозками. Но маятниковые маршруты проигрывают кольцевым маршрутам по затратам благодаря существенно большему общему автопробегу задействованного транспорта, затрат на топливо, ремонт и обслуживание транспорта, что заставляет использовать оптимальные кольцевые маршруты транспортирования. Рассмотрим проблему определения рационального кольцевого развозочного маршрута, которая является типичной для службы доставки в обычном современном строительном супермаркете.

Пусть имеется карта, задано некоторое подмножество из множества пунктов на ней. Один из пунктов этого подмножества, в котором автомобиль загружается доставляемыми товарами считается начальным. Автомобиль должен развести товар по указанным пунктам и вернуться в начальный пункт. Предполагаем, что суммарный вес доставляемых товаров не превышает грузоподъёмность используемого автомобиля. Очевидно, выбираемый маршрут развозки товара должен быть рациональным. Под рациональностью понимается и минимум пробега автомобиля, и минимальный расход топлива, и минимум потраченного времени и всего остального, что, так или иначе, сводится к минимизации материальных затрат.

Характерной особенностью этой проблемы является то, что она возникает и решается каждый день, и пункты доставки товара день ото дня меняются. А это означает, что задача маршрутизации не может быть решена однократно и заранее, а маршруты использованы в течение длительного времени. Другая немаловажная особенность – это необходимость привязки к карте реальной местности, которая кроме пунктов назначения содержит множество других не важных для доставки пунктов, но которые также должны быть учтены при определении рационального маршрута. С описанной

ISSN 2522-9818 (print)
Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості. 2019. № 1 (7) ISSN 2524-2296 (online)

проблемой диспетчера служб доставки сталкиваются каждый день и решают её вручную, кто как умеет, на основе личного опыта без чёткого критерия оптимальности и качественного алгоритма решения задачи. Из-за этого очередь на доставку покупок составляет как минимум три дня в не самый активный сезон продаж.

Таким образом, очевидна важность разработки новых эффективных логистических методов, алгоритмов и программного обеспечения в целом для решения описанной проблемы, повышения качества и эффективности работы служб доставки.

Анализ последних исследований и публикаций

Транспортная логистика решает задачи, связанные с организацией доставки разного рода вещей из одних мест в другие по оптимально выбранному маршруту [5–7]. На первый взгляд может показаться, что решение таких задач связано сугубо с организационными проблемами. На практике такое суждение приводит к излишним затратам и оборачивается снижением прибыльности логистических предприятий. Само указание на использование оптимального маршрута доставки заставляет подключать к решению этой проблемы серьёзную теорию. Теоретической основой логистики служат такие дисциплины как теория социально-экономических систем, теория организаций, системотехника и кибернетика, а методологическую основу для решения различных логистических проблем обеспечивают дисциплины: математика, исследование операций, системный анализ, эконометрия, менеджмент [8].

При всём многообразии логистических проблем на первое место необходимо поставить проблемы, непосредственно обеспечивающие транспортирование, а значит, проблему определения оптимального маршрута транспортирования.

В дискретной математике [9] задачи подобные рассматриваемой занимают особое место. К ним относятся транспортная задача Монжа-Канторовича, задача коммивояжёра, задача о кратчайшем пути. Эти задачи относятся к специальному разделу дискретной математики – теории графов, основоположником которой стал Л. Эйлер. Транспортная задача или задача об оптимальном плане перевозки продуктов из пунктов наличия продуктов в пункты потребления была сформулирована Г. Монжем в 1781 году и решена советским математиком Л. Канторовичем в годы Великой Отечественной войны [10, 11]. Эта задача стала классической задачей транспортной логистики и может быть решена как симплекс-методом, так и с помощью теории графов [12].

В [13] для решения транспортной задачи предлагается двухэтапная схема решения. На первом этапе производится декомпозиция транспортного графа на подграфы, выступающие в качестве опорных транспортных маршрутов для второго этапа оптимизации. На втором этапе осуществляется поиск оптимальных маршрутов в каждом подграфе.

Задача коммивояжёра [14] ставит своей целью нахождение выгодного маршрута, проходящего через указанные города с однократным посещением и возвратом в исходный город. Появление этой задачи связывается с У. Гамильтоном, известным математиком жившем в 19 веке, а её решение в графической интерпретации как замкнутый путь в графе, проходящий через все вершины графа по одному разу, получил название гамильтонова цикла. Задача коммивояжёра, как известно [15], относится к числу NP–полных задач. Для таких задач невозможно найти оптимальное решение за полиномиальное время из-за невозможности последовательного перебора допустимых решений с целью выбора оптимального решения. Лучший точный метод решения задачи коммивояжёра, основанный на методе ветвей и границ, был получен в 1964 году Дж. Литтлом с соавторами [16]. Недостатком применения этого метода для решения транспортной задачи является невозможность совместной оптимизации кольцевых маршрутов для нескольких транспортных средств [13].

Единственным способом решения NP–полных задач является разработка эвристических методов. Таким примером может служить разработанный Дж. Кларком и Дж. Райтом в 1964 году алгоритм [17], объединяющий маятниковые маршруты в кольцевые. Но этот алгоритм имеет существенные недостатки [13].

Задача о кратчайшем пути в отличие от задачи коммивояжёра имеет точные алгоритмы решения Алгоритм Беллмана-Форда [18], Дейкстры [19] и др., применяемые, например, в картографических сервисах и могут использоваться для решения различных проблем, в том числе и рассматриваемой.

Выделение нерешённых ранее частей общей проблемы. Цель работы

В настоящее время благодаря стремительному прогрессу в развитии компьютерной техники, которая является основой для решения задач сбора накопления, анализа информации для принятия решений в управлении материальными потоками, чем занимается логистика, она представляет собой бурно развивающуюся отрасль знаний. В логистике большое внимание уделяется организационным вопросам управления материальными потоками. Но вероятно недостаточно уделяется внимания математическому и прикладному программному обеспечению, что хорошо иллюстрируется описанной проблемой службы доставки супермаркета.

Очевидно, что рассматриваемая постановка проблемы определения кольцевого маршрута сильно похожа на задачу коммивояжёра, но в силу того, что она относится к числу NP–полных задач, она не имеет точных алгоритмов решения за полиномиальное время.

В рассматриваемой задаче искомый кольцевой маршрут должен проходить через подмножество

ISSN 2522-9818 (print)
ISSN 2524-2296 (online) Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2019. No. 1 (7)

пунктов карты. Но при этом в решении необходимо указать не только очерёдность посещения пунктов доставки, но в общем случае и указать, как по карте необходимо проехать из одного соседнего пункта в другой по всему развозочному маршруту. То есть решением задачи является гамильтонов цикл на подмножестве из множества пунктов карты. Это отличие требует приёма для адаптации методов решения задачи коммивояжёра для решения рассматриваемой проблемы [20].

Материалы и методы

В теории графов объект задачи представляется математическим объектом граф, состоящим из множества вершин, представляющим элементы структуры объекта задачи, соединёнными рёбрами (дугами), устанавливающими отношения между ними. Цель решения задачи формулируется в терминах такого объекта, а решение задачи сводится к выполнению различных вычислений на таком графе. Сформулируем рассматриваемую задачу в терминах теории графов.

Постановка задачи. Пусть карта представляется конечным ориентированным графом $G=\langle V,E\rangle$, в котором $V=\left\{ v_i \mid i=\overline{1,n} \right\}$ – это множество вершин, соответствует пунктам карты, $E=\left\{ e_{ij} \mid i,j=\overline{1,n}, i\neq j \right\}$ – множество дуг графа. Дуга e_{ij} определяет наличие соединения между вершинами v_i и v_j, характеризуется расстоянием d_{ij} (затратами, связанными с перемещением из v_i в v_j) Множество пунктов, через которые должен пройти замкнутый путь обозначим как $V_z \subset V$.

Пусть заданы граф *G*, множество V_z и начальная вершина $v_s^z \in V_z$. Необходимо найти замкнутый путь минимальной длины из вершины v_s^z, проходящий через все вершины множества V_z однократно.

Метод решения задачи. Из анализа постановки задачи следует, что искомый путь должен проходить через вершины множества V_z. С другой стороны, этот путь должен быть привязан к карте. Таким образом, для каждой пары $v_i^z, v_j^z \in V_z$ таких, что предполагается перемещение из вершины v_i^z в вершину v_j^z в искомом пути, должно быть однозначно указано, как это перемещение достигается по карте, т.е. через какие вершины множества $V \setminus V_z$ нужно перемещаться из вершины v_i^z в вершину v_j^z.

Поскольку результирующий путь должен пройти через все вершины множества V_z, будем его искать как гамильтонов цикл в графе $G_z=\langle V_z,E_z\rangle$, который создадим. $E_z=\left\{ e_{ij}^z \mid i,j=\overline{1,|V_z|}, i\neq j \right\}$ – это множество дуг. Дуга $e_{ij}\in E_z$, если в *G* есть путь $p_{ij}=\langle v_i^z, v_1^{ij}, v_2^{ij},\ldots,v_k^{ij},\ldots,v_{m-2}^{ij},v_j^z\rangle$ такой, что $v_i^z, v_j^z \in V_z, v_k^{ij}\in V$ и $v_k^{ij}\notin V_z$ для $\forall k=\overline{0,|V|-2}$. С каждой дугой $e_{ij}\in E_z$ свяжем значение d_{ij}^z, равное длине пути p_{ij} в графе *G*.

Накладываемые ограничения на путь p_{ij} обеспечивают, что он будет начинаться или заканчиваться вершиной из V_z. Поэтому, если в графе G_z гамильтонов цикл существует, то каждая из вершин множества V_z будет входить в него однократно.

Алгоритм решения задачи.

П.1. Для заданных графа *G* и множества $V_z \subset V$ построить граф G_z:

1.1. Для каждой пары пунктов $v_i^z, v_j^z \in V_z, i\neq j$, через которые должен пройти искомый путь, используя алгоритм Дейкстры, определить кратчайший путь p_{ij} такой, что v_i^z, v_j^z – соответственно начальная и конечная вершины пути, а промежуточные вершины не принадлежат V_z, и зафиксировать его длину d_{ij}^z.

1.2. Создать граф $G_z=\langle V_z,E_z\rangle$, в котором $E_z=\left\{ e_{ij}^z \mid i,j=\overline{1,|V_z|}, i\neq j \right\}$ и дуга $e_{ij}^z\in E_z$, если в графе *G* существует путь p_{ij}.

П.2. Для графа G_z каким-либо алгоритмом решить задачу поиска гамильтонова цикла $p_c=\langle v_i \mid i=\overline{1,|V_z|+1}\rangle$. Если решения нет, перейти к п. 4.

П.3. Каждую дугу $e_{i,i+1} \mid i=\overline{1|V_z|}\in p_c$ заменить на $p_{i,i+1}$ – путь, который соответствует ей в графе *G*. Полученный результат и есть искомое решение.

П.4. Остановиться.

Программная реализация. Для проверки разработанного решения была выполнена программная реализация на языке C#. Для представления графа G_z в программе использовалась структура Вирта [21]. Для шага 3 предложенного алгоритма решения задачи была выбрана схема поиска с возвратами [22], которая позволила получить и проанализировать все возможные результаты, получаемые разработанным методом. Разработанное приложение позволяет задать карту в виде jpeg-файла (рис. 1), на которой отмечены пункты исходного графа. Карта сопровождается файлом описания пунктов (рис. 2), который загружается с картой. Для задания пунктов карты, определяющих множество V_z

ISSN 2522-9818 (print)
Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості. 2019. № 1 (7) ISSN 2524-2296 (online)

необходимо использовать вкладку "Исходные данные" (рис. 3). После выполнения расчёта на вкладке "Результаты" (рис. 4–5) можно увидеть найденные кольцевые маршруты и посмотреть их поочерёдно в отдельном окне (рис. 6).

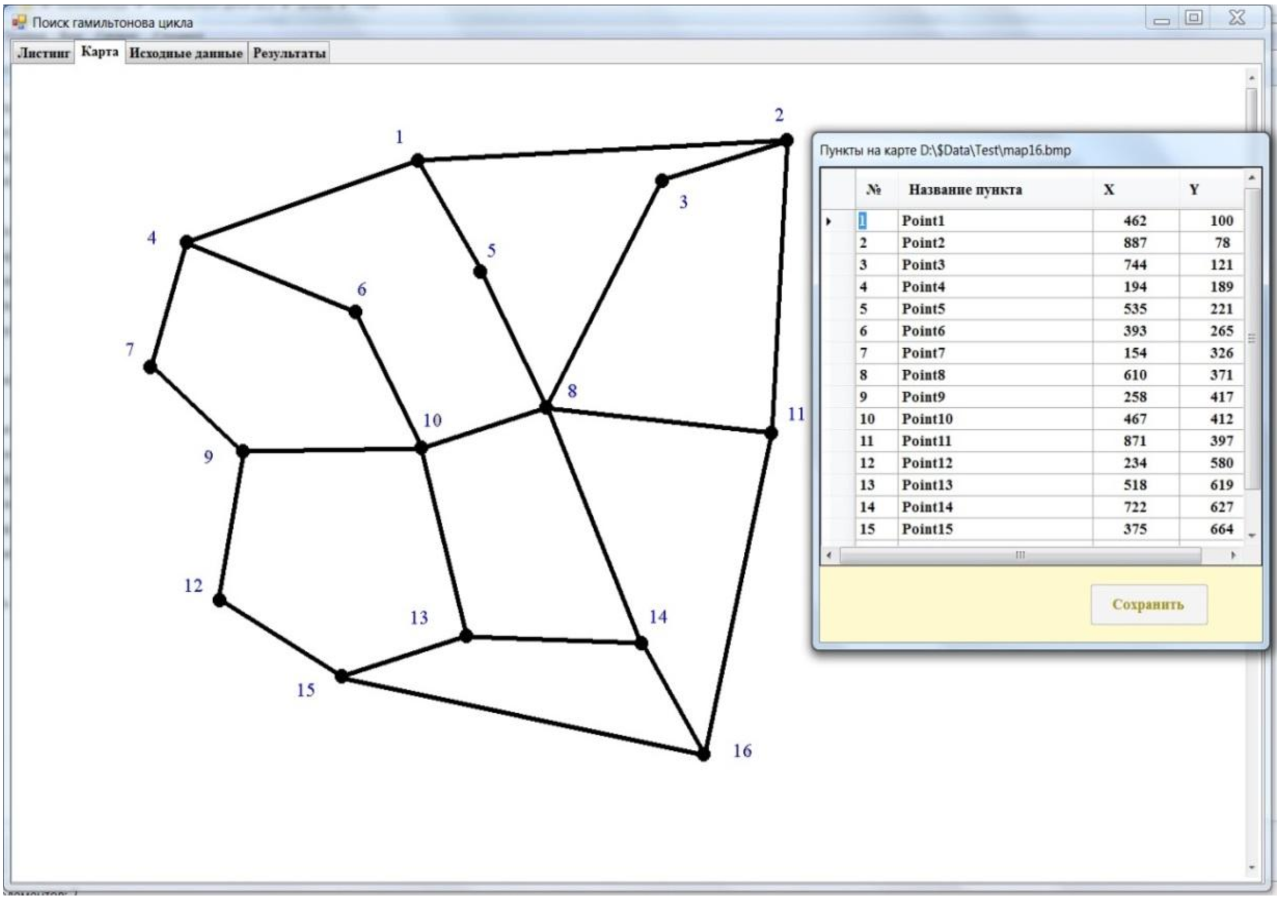
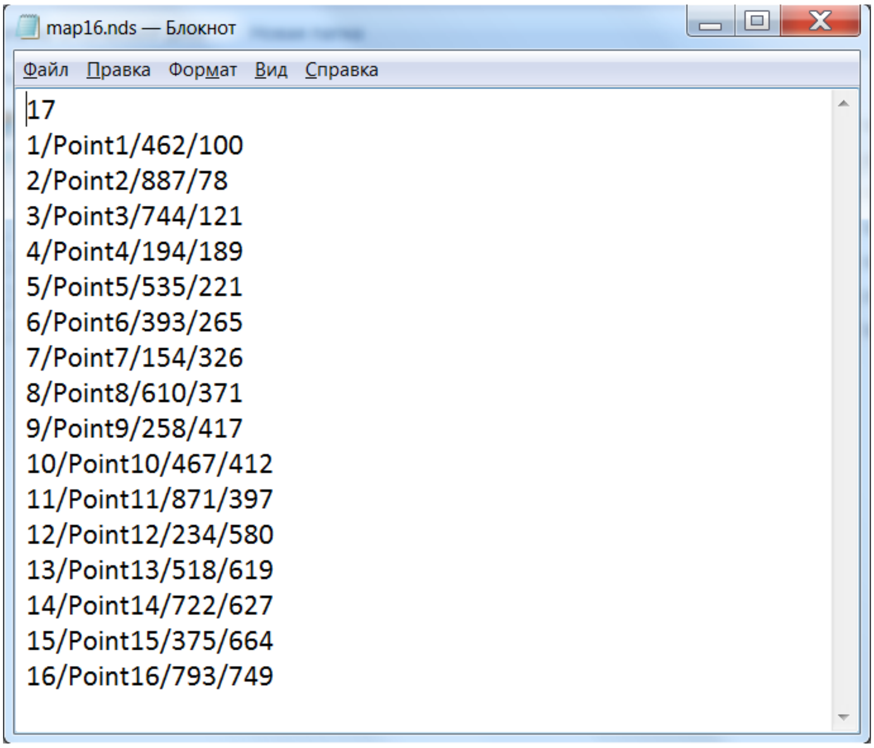


Рис. 1. Состояние окна после загрузки карты


map16.nds — Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

17
1/Point1/462/100
2/Point2/887/78
3/Point3/744/121
4/Point4/194/189
5/Point5/535/221
6/Point6/393/265
7/Point7/154/326
8/Point8/610/371
9/Point9/258/417
10/Point10/467/412
11/Point11/871/397
12/Point12/234/580
13/Point13/518/619
14/Point14/722/627
15/Point15/375/664
16/Point16/793/749

Рис. 2. Файл описания пунктов карты

ISSN 2522-9818 (print)
ISSN 2524-2296 (online) Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2019. No. 1 (7)

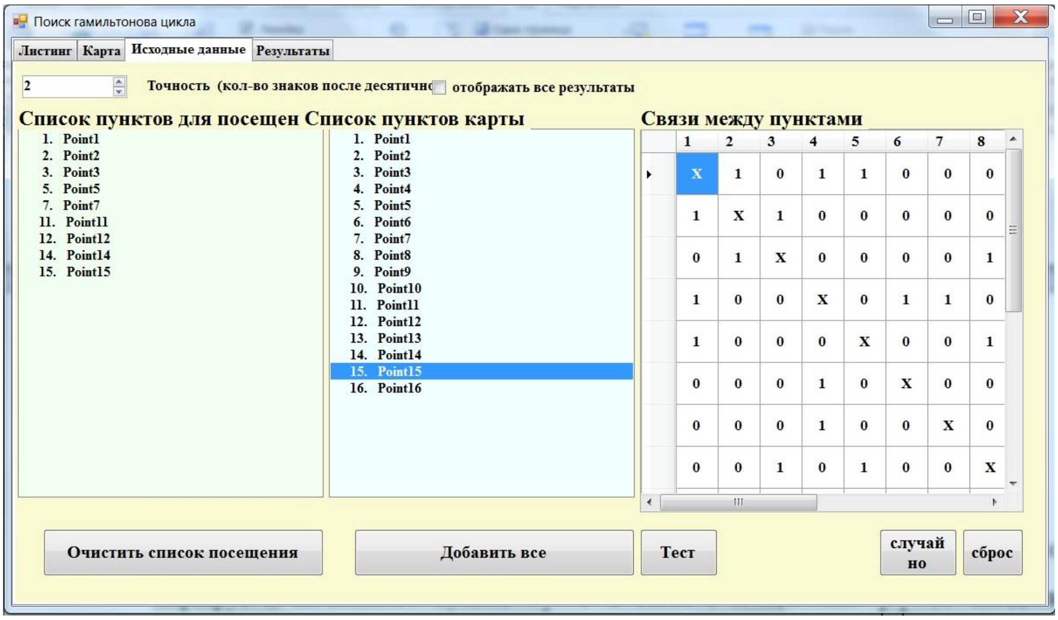


Рис. 3. Вкладка "Исходные данные"

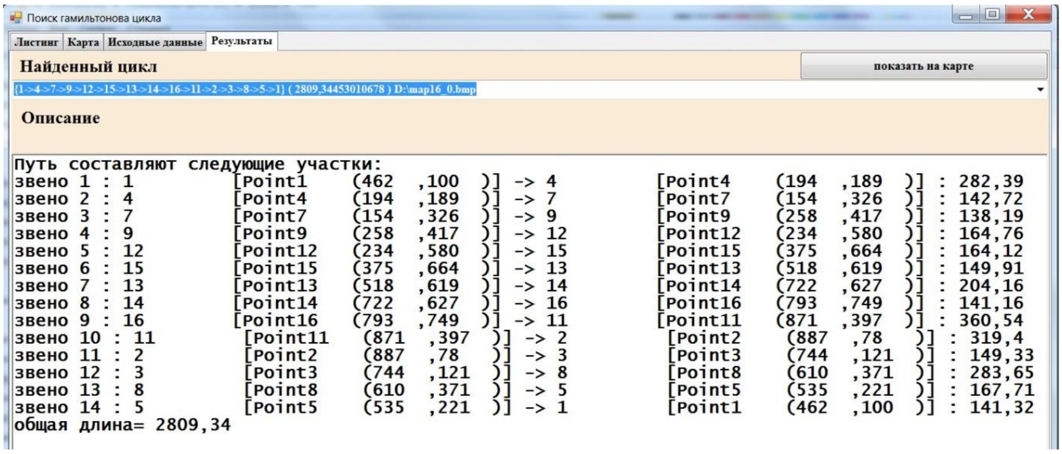


Рис. 4. Вкладка "Результаты" – выбранный для просмотра маршрут

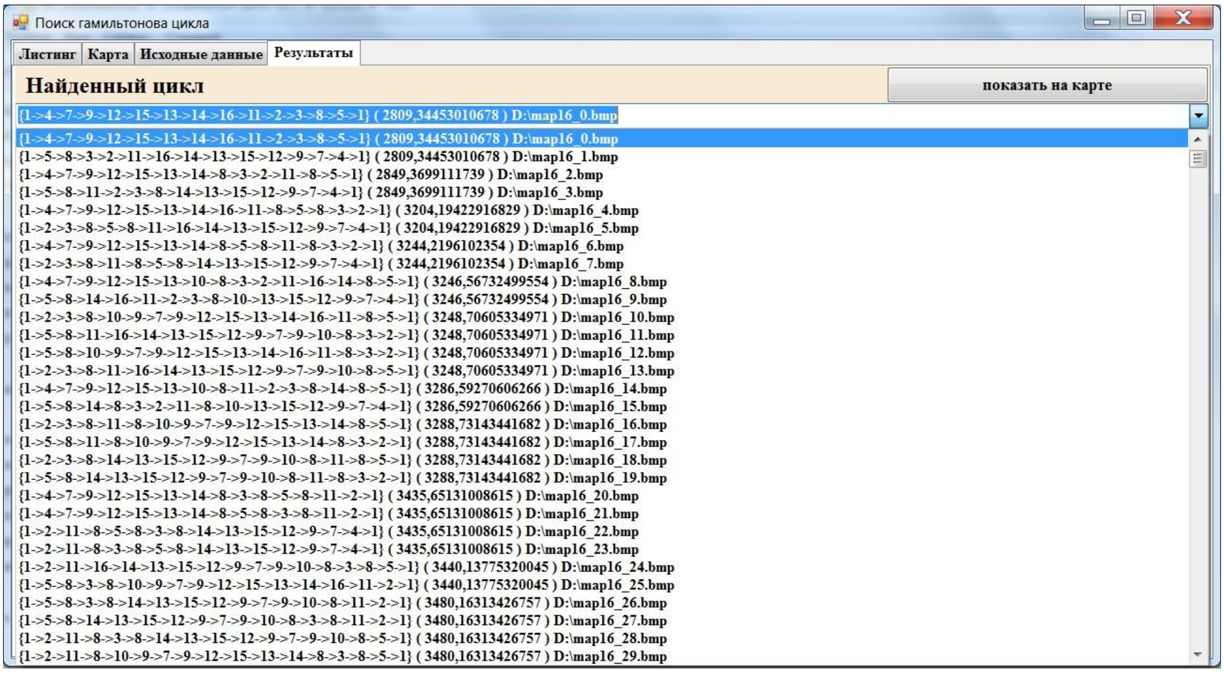


Рис. 5. Вкладка "Результаты" – список выбора маршрута

ISSN 2522-9818 (print)
Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості. 2019. № 1 (7) ISSN 2524-2296 (online)

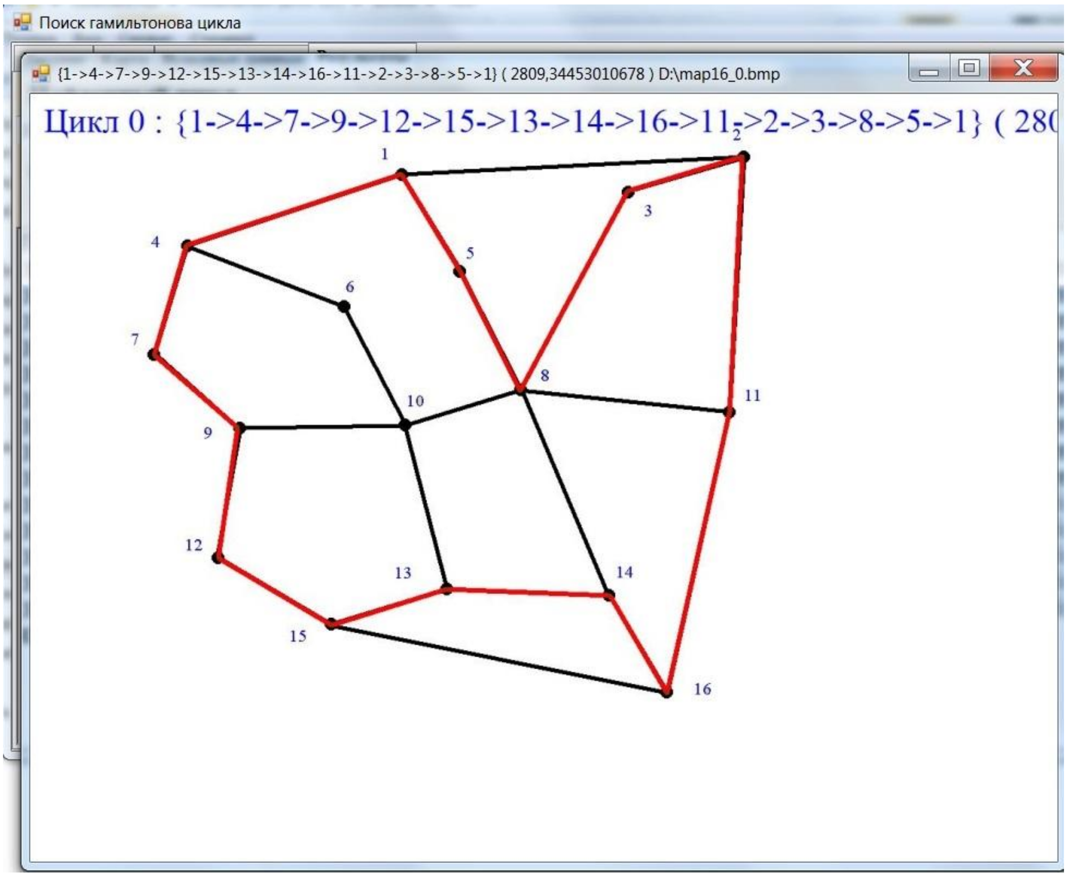


Рис. 6. Окно с найденным кольцевым маршрутом

Тестовый пример. В качестве тестового примера карта была представлена в виде множества V точек (пунктов) на битмапе, со своими координатами (табл. 1). Соединения между пунктами определили множество дуг E и были изображены отрезками прямых линий. Поэтому, расстояния между пунктами не задавались, а считались координатным способом в пикселях (табл. 2).

Таблица 1. *Пункты карты*

№	Название пункта карты	Координаты пункта на карте	
		x	*y*
1	point1	462	100
2	point2	887	78
3	point3	744	121
4	point4	194	189
5	point5	535	221
6	point6	393	265
7	point7	154	326
8	point8	610	371
9	point9	258	417
10	point10	467	412
11	point11	871	397
12	point12	234	580
13	point13	518	619
14	point14	722	627
15	point15	375	664
16	point16	793	749

Таблица 2. *Расстояния между пунктами на карте (дуги графа G)*

№	v_i	→	v_j	e_{ij}
1	1	→	2	425.57
2	1	→	4	282.39
3	1	→	5	141.32
4	2	→	1	425.57
5	2	→	3	149.33
6	2	→	11	319.4
7	3	→	2	149.33
8	3	→	8	283.65
9	4	→	1	282.39
10	4	→	6	213.02
11	4	→	7	142.72
12	5	→	1	141.32
13	5	→	8	167.71
14	6	→	4	213.02
15	6	→	10	164.58
16	7	→	4	142.72
17	7	→	9	138.19
18	8	→	3	283.65
19	8	→	5	167.71
20	8	→	10	209.06
21	8	→	11	262.29
22	8	→	14	279.43
23	9	→	7	138.19
24	9	→	10	209.06

ISSN 2522-9818 (print)
ISSN 2524-2296 (online) *Innovative technologies and scientific solutions for industries. 2019. No. 1 (7)*

Конец **таблицы 2**

25	9	→	12	164.76
26	10	→	6	164.58
27	10	→	8	148.76
28	10	→	9	209.06
29	10	→	13	213.19
30	11	→	2	319.4
31	11	→	8	262.29
32	11	→	16	360.54
33	12	→	9	164.76
34	12	→	15	164.12
35	13	→	10	213.19
36	13	→	14	2014.16
37	13	→	15	149.91
38	14	→	8	279.43
39	14	→	13	204.16
40	14	→	16	141.16
41	15	→	12	164.12
42	15	→	13	149.91
43	15	→	16	426.55
44	16	→	11	360.54
45	16	→	14	141.16
46	16	→	15	426.55

Для заданного множества пунктов $V_z=\{1,2,3,5,7,11,12,14,15\}$, через которые должен пройти кольцевой маршрут, и начального пункта $v_s^z=1$ в тесте с мощностью $|V|=16$ найдены все решения задачи. Общее количество решений составило 4320. Лучшими решениями по длине пути из них являются следующие:

- $\langle 1,4,7,9,12,15,13,14,16,11,2,3,8,5,1\rangle$ (2809.34);
- $\langle 1,4,7,9,12,15,13,14,8,3,2,11,8,5,1\rangle$ (2849.37);
- $\langle 1,4,7,9,12,15,13,14,16,11,8,5,8,3,2,1\rangle$ (3204.19);
- $\langle 1,4,7,9,12,15,13,14,8,5,8,11,8,3,2,1\rangle$ (3244.22);
- $\langle 1,5,8,14,16,11,2,3,8,10,13,15,12,9,7,4,1\rangle$ (3246.57);
- $\langle 1,5,8,11,16,14,13,15,12,9,7,9,10,8,3,2,1\rangle$ (3248.71).

На рис. 7 найденные решения на графе обозначены пунктирной линией. В табл. 3 – представлены дуги сформированного в ходе решения графа G_z.

Таблица 3. *Дуги графа* G_z

№	v_i^z	→	v_j^z	d_{ij}	p_{ij}
1	1	→	2	425.57	1,2
2	1	→	3	1092.39	1,4,6,10,8,3
3	1	→	5	141.32	1,5
4	1	→	7	425.11	1,4,7
5	1	→	11	1071.04	1,4,6,10,8,11
6	1	→	12	1033.8	1,4,6,10,9,12
7	1	→	14	1077.33	1,4,6,10,13,14
8	1	→	15	1023.09	1,4,6,10,13,15

Конец **таблицы 3**

9	2	→	3	149.33	2,3
10	2	→	11	319.4	2,11
11	3	→	5	451.35	3,8,5
12	3	→	7	779.66	3,8,10,9,7
13	3	→	11	545.94	3,8,11
14	3	→	12	806.23	3,8,10,9,12
15	3	→	14	563.08	3,8,14
16	3	→	15	795.51	3,8,10,13,15
17	5	→	7	663.72	5,8,10,9,7
18	5	→	11	430	5,8,11
19	5	→	12	690.28	5,8,10,9,12
20	5	→	14	447.13	5,8,14
21	5	→	15	679.57	5,8,10,13,15
22	7	→	11	758.31	7,9,10,8,11
23	7	→	12	302.95	7,9,12
24	7	→	14	764.6	7,9,10,13,14
25	7	→	15	710.36	7,9,10,13,15
26	11	→	12	784.87	11,8,10,9,12
27	11	→	14	501.69	11,16,14
28	11	→	15	774.16	11,8,10,13,15
29	12	→	14	791.16	12,9,10,13,14
30	12	→	15	164.12	12,15
31	14	→	15	354.07	14,13,15
32	2	→	1	425.57	2,1
33	3	→	1	1092.39	3,8,10,6,4,1
34	5	→	1	141.32	5,1
35	7	→	1	425.11	7,4,1
36	11	→	1	1071.04	11,8,10,6,4,1
37	12	→	1	1033.8	12,9,10,6,4,1
38	14	→	1	1077.33	14,13,10,6,4,1
39	15	→	1	1023.09	15,13,10,6,4,1
40	3	→	2	149.33	3,2
41	11	→	2	319.4	11,2
42	5	→	3	451.35	5,8,3
43	7	→	3	779.66	7,9,10,8,3
44	11	→	3	545.94	11,8,3
45	12	→	3	806.23	12,9,10,8,3
46	14	→	3	563.08	14,8,3
47	15	→	3	795.51	15,13,10,8,3
48	7	→	5	663.72	7,9,10,8,5
49	11	→	5	430	11,8,5
50	12	→	5	690.28	12,9,10,8,5
51	14	→	5	447.13	14,8,5
52	15	→	5	679.57	15,13,10,8,5
53	11	→	7	758.31	11,8,10,9,7
54	12	→	7	302.95	12,9,7
55	14	→	7	764.6	14,13,10,9,7
56	15	→	7	710.36	15,13,10,9,7
57	12	→	11	784.87	12,9,10,8,11
58	14	→	11	501.69	14,16,11
59	15	→	11	774.16	15,13,10,8,11
60	14	→	12	791.16	14,13,10,9,12,
61	15	→	12	164.12	15,12
62	15	→	14	354.07	15,13,14

ISSN 2522-9818 (print)
Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості. 2019. № 1 (7) ISSN 2524-2296 (online)

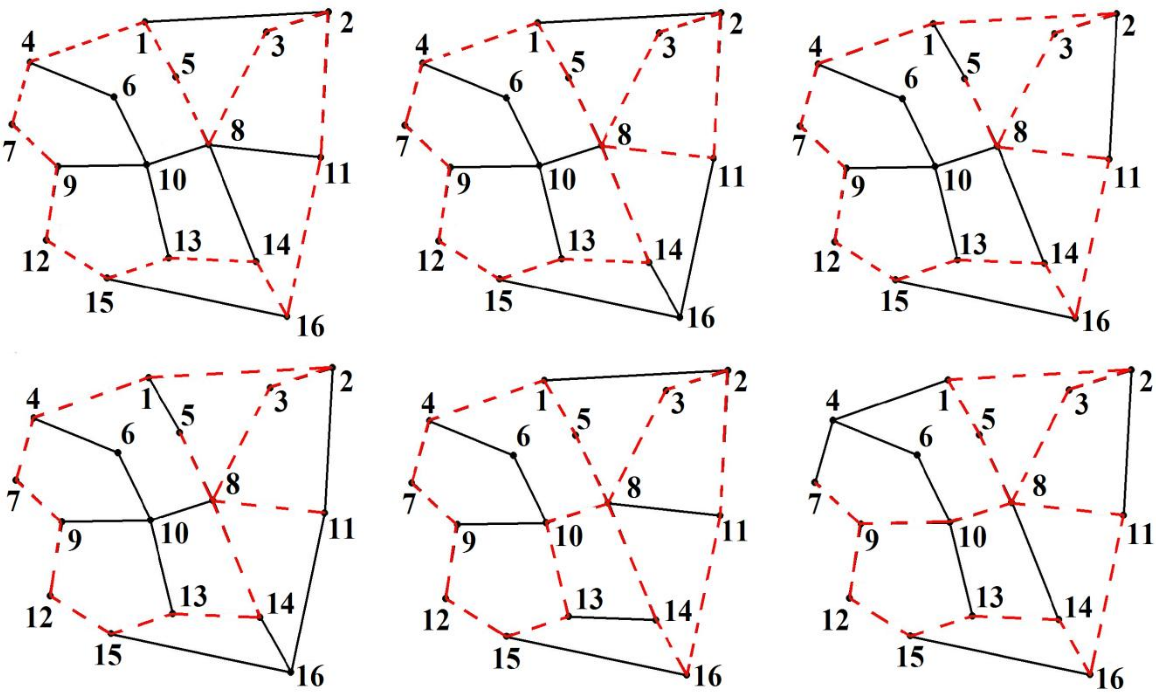


Рис. 7. Найденные лучшие пути на карте

Результаты исследований

Тестирование показало пригодность разработанного алгоритма для нахождения кольцевого маршрута развозки товаров, проходящего через заданное множество пунктов карты. Оптимальность определяемого кольцевого маршрута закладывается при выполнении шага 1 алгоритма и зависит от точности применяемого алгоритма поиска гамильтонова цикла в графе. На шаге 1 формируются минимальные по длине пути между вершинами V_z. Если бы существовал точный алгоритм поиска гамильтонова цикла минимальной длины, то разработанный алгоритм всегда бы давал оптимальное решение.

В любом случае предложенный метод даёт выигрыш, состоящий в сокращении вычислительных затрат на поиск решения. Так, если бы для тестовой задачи мы использовали классический алгоритм поиска гамильтонова цикла, нам пришлось бы его искать в графе с 16 вершинами, в то время как в предложенном методе размерность графа поиска определяется мощностью множества V_z и в тестовом примере равна 9. И необходимо согласиться, что в случае реальной задачи на карте это значительный выигрыш. Заметим также, что в найденных решениях никогда не повторяются вершины из множества V_z, но возможен повтор вершин, не принадлежащих этому множеству, что не противоречит условиям решаемой задачи. Поскольку алгоритм Дейкстры для $n = |V|$ имеет сложность $O(n^2)$, сложность предложенного алгоритма оценивается как $O(n^4 + \xi(m))$, где $\xi(m)$ – сложность шага 2 ($m = |V_z|$), используемого алгоритма поиска гамильтонова цикла. Таким образом, разработанное решение задачи реализует её сводимость к решению задачи поиска гамильтонова цикла с понижением размерности задачи, а вычислительная сложность сводимости оценивается функцией $O(n^4)$.

Выводы

В статье на примере проблемы определения кольцевого маршрута на карте рассмотрено современное состояние транспортной логистики. Задача определения кольцевого маршрута в настоящее время не имеет точных алгоритмов решения. Предложен метод, разработан, программно реализован и протестирован алгоритм реализующий сводимость рассмотренной проблемы к решению задачи поиска гамильтонова цикла на графе со значительно меньшей размерностью, чем граф, представляющий карту. Хотя задача поиска гамильтонова цикла и относится к классу NP–полных и трудно решаемых в дальнейшем необходимо продолжать предпринимать подходы к разработке новых приёмов и методов решения этой задачи.

Список литературы

1. Фёдоров В. А. Анализ превосходств и недостатков традиционного способа обработки и доставки груза в транспортной логистике. *Символ Науки*. 2016. №11 (1). С. 217–218.

2. Iastremska O. Logistics at an enterprise: the peculiarities of procurement activities. I*nnovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*. 2018. No. 3 (5). P. 141–148. DOI: https://doi.org/10.30837/2522-9818.2018.5.141.
3. Устенко М. О. Основні проблеми транспортної логістики : сайт. URL: http://uran.donntu.org/~masters/2012/iii/dyadyk/library/article3.htm (дата звернення : 08.02.2019).
4. Горяинов А. Н. Виды маршрутов автотранспортных средств при перевозке грузов в логистической системе. *Коммунальное хозяйство городов*. 2006. № 67. С.304–309.
5. Проблемы транспортной логистики: Практический опыт украинских предприятий : сайт. URL: http://www.ukrlogist.com/node/452 (дата обращения : 08.02.2019).
6. Николин В. И. Грузовые автомобильные перевозки : монография. Омск, 2004, 480 с.
7. Шамис В. А. Некоторые аспекты выбора оптимального маршрута перевозок : сайт. URL: https://novainfo.ru/article/5296 (дата обращения : 08.02.2019).
8. Сергеев В. И. Логистика в бизнесе. Москва, 2001. 608 с.
9. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. Москва, 2003. 214 с.
10. Vershik A. M. Long history of the Monge-Kantorovich transportation problem. *Math. Intelligencer*. 2013. № 4 (35). P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1007/s00283-013-9380-x.
11. Канторович Л. В. Избранные труды. Математико-экономические работы. Новосибирск, 2011. 760 с.
12. Транспортная задача. Математическая модель : сайт. URL: http://www.grandars.ru/student/vysshaya-matematika/model-transportnoy-zadachi.html (дата обращения : 08.02.2019).
13. Рогаткин А. Ю., Захаркина М. В. Оптимизация автотранспортных маршрутов: эвристические алгоритмы и практика логистического менеджмента. *Вестник Московской международной академии*. 2016. № 1. С. 124–135.
14. Davendra D. Traveling Salesman Problem. Theory and Applications. London, 2010. 336 p. DOI: https://doi.org/10.5772/547.
15. Гери М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва, 1982. 419 с.
16. Алгоритм Литтла – метод решения задачи коммивояжера : сайт. URL: https://intellect.ml/algoritm-littla-metod-resheniya-zadachi-kommivoyazhera-7734 (дата обращения : 08.02.2019).
17. Clarke, G., Wright, J. Scheduling of Vehicles from a central depot to a number of delivery. *Operations Research*. 1964. No. 4 (12). P. 568–581. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.12.4.568.
18. Bellman R. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1958. No. 1 (16). P. 87–90. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/102435.
19. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*. 1959. No. 1 (1). P. 269–271. DOI: https://doi.org/10.1007/bf01386390.
20. Прокопенков В. Ф. Поиск замкнутого пути в графе, проходящего через заданное множество вершин, являющееся собственным подмножеством вершин графа. *Международная научная конференция MicroCAD 2014 : Секция №1 : Информационные и управляющие системы*. 2014. С. 18.
21. Wirth N. Data Structures and Algorithms. *Scientific American*. 1984. No. 3 (251). P. 60–69. DOI: https://doi.org/10.1038/scientificamerican0984-60.
22. Оре О. Теория графов. Москва, 2009. 354 с.

References

1. Fëdorov, V. A. (2016), "Analysis of the advantages and disadvantages of the traditional method of handling and delivery of goods in transport logistics" ["Analyz prevoskhodstv y nedostatkov tradytsyonnoho sposoba obrabotky y dostavky hruza v transportnoy lohystyke"], *Symbol of Science*, No. 11 (1), P. 217–218.
2. Iastremska, O. (2018), "Logistics at an enterprise: the peculiarities of procurement activities" *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*, No. 3 (5), P. 141–148. DOI: https://doi.org/10.30837/2522-9818.2018.5.141.
3. Ustenko, M. O. "The main problems of transport logistics" ["Osnovni problemy transportnoyi lohistyky"], available at : http://uran.donntu.org/~masters/2012/iii/dyadyk/library/article3.htm (last accessed 08.02.2019).
4. Horyaynov, A. N. (2006), "Types of routes of vehicles in the transport of goods in the logistics system" ["Vydy marshrutov avtotransportnykh sredstv pry perevozke hruzov v lohystycheskoy systeme"], *Utilities of cities*, No. 67, P. 304–309.
5. "Problems of transport logistics: Practical experience of Ukrainian enterprises" ["Problemy transportnoy lohystyky: Praktycheskyy opyt ukraynskykh predpryyatyy"], available at : http://www.ukrlogist.com/node/452 (last accessed 08.02.2019).
6. Nykolyn, V. Y. (2004), *Freight transport* : monograph [*Hruzovye avtomobyl'nye perevozky* : monohrafyya], Varyant, Omsk, 480 p.
7. Shamys, V. A. "Some aspects of choosing the optimal shipping route" ["Nekotorye aspekty vybora optymal'noho marshruta perevozok"], available at : https://novainfo.ru/article/5296 (last accessed 08.02.2019).
8. Serheev, V. Y. (2001), *Logistics in business* [*Lohystyka v byznese*], Ynfra-M, Moscow, 608 p.
9. Anderson, Dzh. (2003), *Discrete mathematics and combinatorics* [*Dyskretnaya matematyka y kombynatoryka*], Vyl'yams, Moscow, 214 p.
10. Vershik, A. M. (2013), "Long history of the Monge-Kantorovich transportation problem", *Math. Intelligencer*, No. 4 (35), P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1007/s00283-013-9380-x.
11. Kantorovych, L. V. (2011), *Selected work. Mathematical and economic work* [*Yzbrannye trudy. Matematyko-ekonomycheskye raboty*], Nauka, Novosybyrsk, 760 p.
12. "Transport task. Mathematical model" ["Transportnaya zadacha. Matematycheskaya model'"], available at : http://www.grandars.ru/student/vysshaya-matematika/model-transportnoy-zadachi.html (last accessed 08.02.2019).
13. Rohatkyn, A. Yu., Zakharkyna, M. V. (2016), "Optimization of motor routes: heuristic algorithms and logistics management practices" ["Optymyzatsyya avtotransportnykh marshrutov: evrystycheskye alhorytmy y praktyka lohystycheskoho menedzhmenta"], *Bulletin of the Moscow International Academy*, No. 1, P. 124–135.
14. Davendra, D. (2010), *Traveling Salesman Problem. Theory and Applications*, IntechOpen, London, 336 p. DOI: https://doi.org/10.5772/547.

15. Hery, M., Dzhonson, D. (1982), *Computational machines and difficult tasks* [*Vychyslytel'nye mashyny y trudnoreshaemye zadachy*], Myr, Moscow, 419 p.
16. "Littleton's algorithm is a method for solving a salesman's problem" ["Alhorytm Lyttla – metod reshenyya zadachy kommyvoyazhera"], available at : https://intellect.ml/algoritm-littla-metod-resheniya-zadachi-kommivoyazhera-7734 (last accessed 08.02.2019).
17. Clarke, G., Wright, J. (1964), "Scheduling of Vehicles from a central depot to a number of delivery", *Operations Research*, No. 4 (12), P. 568–581. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.12.4.568.
18. Bellman, R. (1958), "On a routing problem", *Quarterly of Applied Mathematics*, No. 1 (16), P. 87–90. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/102435.
19. Dijkstra, E. W. (1959), "A note on two problems in connexion with graphs", *Numerische Mathematik*, No. 1 (1), P. 269–271. DOI: https://doi.org/10.1007/bf01386390.
20. Prokopenkov, V. F. (2014), "Finding a closed path in a graph passing through a given set of vertices, which is an eigenvalue of vertices of a graph" ["Poysk zamknutoho puty v hrafe, prokhodyashcheho cherez zadannoe mnozhestvo vershyn, yavlyayushcheesya sobstvennym podmnozhestvom vershyn hrafa"], *International Scientific Conference MicroCAD 2014: Section No. 1 – Information and Management Systems*, P. 18.
21. Wirth, N. (1984), "Data Structures and Algorithms", *Scientific American*, No. 3 (251), P. 60–69. DOI: https://doi.org/10.1038/scientificamerican0984-60.
22. Ore, O. (2009), *The theory of graphs* [*Teoryya hrafov*], URSS, Moscow, 354 p.

Поступила (Received) 06.01.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Прокопенков Володимир Пилипович – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", старший викладач кафедри системний аналіз та інформаційно-аналітичні технології, Харків, Україна; e-mail: prokopenkov.vf@gmail.com; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-0084-9832.

Прокопенков Владимир Филиппович – Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", старший преподаватель кафедры системный анализ и информационно-аналитические технологии, Харьков, Украина.

Prokopenkov Vladymyr – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Senior Teacher at the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, Kharkiv, Ukraine.

Кожин Юрій Миколайович – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", старший викладач кафедри системний аналіз та інформаційно-аналітичні технології, Харків, Україна; e-mail: juniko@i.ua; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5424-1422.

Кожин Юрий Николаевич – Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", старший преподаватель кафедры системный анализ и информационно-аналитические технологии, Харьков, Украина.

Kozhyn Yuryy – National technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Senior Teacher at the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, Kharkiv, Ukraine.

Малих Олег Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", доцент кафедри системний аналіз та інформаційно-аналітичні технології, Харків, Україна; e-mail: malykh09@gmail.com; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5996-4363.

Малых Олег Николаевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", доцент кафедры системный анализ и информационно-аналитические технологии, Харьков, Украина.

Malykh Oleh – PhD (Engineering Sciences), Associate Professor, National technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, Kharkiv, Ukraine.

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КІЛЬЦЕВОГО МАРШРУТУ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ЗАДАНУ МНОЖИНУ ПУНКТІВ НА КАРТІ

Предметом досліджень є методи та інформаційні технології транспортної логістики. **Мета** – зниження витрат і скорочення часу на доставку товарів автомобільним транспортом за рахунок розробки і впровадження ефективних методів і алгоритмів пошуку оптимального маршруту розвезення товарів. У статті розглядається **завдання** пошуку оптимального кільцевого маршруту розвезення товарів зі складу, що проходить через задану множину пунктів на карті. Для вирішення завдання використовуються **методи і алгоритми** дискретної математики. Отримані наступні **результати**. Виконаний аналіз проблеми та існуючих методів дискретної математики для її вирішення, визначено недоліки цих методів. Запропоновано метод вирішення завдання, що усуває ці недоліки. Розроблено евристичний алгоритм розв'язання задачі, що реалізує запропонований метод розв'язання. Рішення задачі, що розглядається, зводиться до задачі пошуку гамільтонова циклу на новому графі меншої розмірності. Новий граф будується з початкового графа, що описує карту, і складається з вершин заданої множини пунктів на карті, через які повинен пройти маршрут. Кожна дуга в новому графі з'єднує пару вершин, якщо в початковому графі існує шлях між цими вершинами. Дуга зважується числом, яке визначає мінімальну відстань між вершинами в початковому графі, які вона з'єднує. Для побудови графа використовується алгоритм Дейкстри. **Висновки**: запропонований метод вирішення розглянутої задачі виконує її приведення до класичної задачі дискретної математики пошуку гамільтонова циклу в графі. Тестування розробленої програми показало працездатність запропонованого методу і алгоритму вирішення завдання. Розроблений метод дозволяє знизити розмірність розв'язуваної задачі, оскільки рішення шукається на новому графі меншої розмірності на відміну від графа, що описує вихідну карту. Фактор зниження розмірності значно зменшує витрати на пошук рішення і підвищує шанси знайти оптимальний маршрут розвезення товарів.

Ключові слова: транспортна логістика; маршрут на карті; граф; гамільтонів цикл; складність; NP-повнота, алгоритм Дейкстри; приведення; схема пошуку з поверненнями.

DETERMINATION OF THE OPTIMAL CIRCULAR ROUTE PASSING THROUGH THE GIVEN SET OF POINTS ON THE MAP

The **subject** of research is the methods and information technologies of transport logistics. The **goal** is to reduce costs and time for delivery of goods by road through the development and implementation of effective methods and algorithms for finding the optimal route for delivering goods. The article deals with the **task** of finding the optimal ring route for the delivery of goods from the warehouse, passing through a given set of points on the map. **Methods and algorithms** of discrete mathematics are used to solve the problem. The following **results** were obtained. The analysis of the problem and the existing methods of discrete mathematics for its solution were carried out. The disadvantages of these methods are determined. A heuristic algorithm for solving the problem that implements the proposed solution method has been developed. The solution of the considered problem is reduced to the problem of finding a Hamiltonian cycle on a new graph of smaller dimension. The new graph is constructed from the initial graph describing the map, and consists of the vertices of a given set of points on the map, through which the route must pass. Each arc in a new graph connects a pair of vertices if there is a path between those vertices in the initial graph. The arc is weighted by a number that determines the minimum distance between the vertices in the initial graph it connects. Dijkstra's algorithm is used to construct the graph. **Conclusions**: the proposed method for solving the considered problem performs its reducibility to the classical problem of discrete mathematics of search for a Hamiltonian cycle on a graph. Testing of the developed program showed the efficiency of the proposed method and algorithm for solving the problem. The developed method makes it possible to reduce the dimension of the problem to be solved, since the solution is sought on a new graph of smaller dimension in contrast to the graph describing the original map. The factor of dimension reduction significantly reduces the cost of finding a solution and increases the chances of finding the best route for the delivery of goods.

Keywords: transport logistics; route on the map; graph; Hamiltonian cycle; complexity; NP-completeness; Dijkstra's algorithm; reducibility; search scheme with returns.