

ЕКОЛОГІЧНА БЕЗПЕКА

УДК 532.543

П.С. ВЕНГЕРСЬКИЙ, О.М. ТРОФИМЧУК

КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКІВ РІДИНИ В РІЧКАХ З ВИКОРИСТАННЯМ WEB-АПЛІКАЦІЙ З GIS-КОМПОНЕНТОЮ НА ОСНОВІ ARCGIS SERVER'А

***Анотація.** Розглянуто підхід до моделювання стоку нестисливої рідини у псевдопризматичному руслі з вертикальною площиною симетрії. Описано умови стійкості для встановленого потоку. Введено і проаналізовано значення корективу середньої швидкості для різних видів потоків у річках. Наведено варіаційне формулювання задачі, яка розв'язувалася методом скінченних елементів. Результати протестовано на прикладі, що має аналітичний розв'язок, а також виконано порівняння результатів обчислень із лабораторними дослідженнями інших авторів.*

У даній роботі запропоновано технології, які б дали змогу використовувати ArcGIS-розширення, тобто GIS-компоненти, для Web-застосувань на базі ArcGIS Server'а. Такі технології забезпечують просте та зручне інтегрування та використання GIS-компонент на Web-сайті, де на окремому шарі надаються можливості моделювання та розв'язування прикладних задач руху потоків води у річках.

***Ключові слова:** рівняння руху рідини, швидкість потоку, переріз русла, напірний рух, радіус кривини середньої лінії дна, проєкційні рівняння, схема Гальоркіна, метод скінченних елементів, однокрокова рекурентна схема, лінеаризація.*

Вступ

Сьогодні гідрологічні системи, до яких можна віднести річкові басейни, ріки, озера, зазнають сильного антропогенного впливу. Господарська діяльність на водозборі, використання водних ресурсів та зумовлені перетворенням природного середовища регіональні і глобальні зміни клімату не можуть не спричинити зміни у гідрологічному циклі та в процесах формування річкового стоку. Виникає потреба оцінювати ці зміни і, якщо можливо, передбачити стан гідрологічних систем у майбутньому. Головні перспективи розвитку методів досліджень і передбачень поведінки природних систем на даний час вирішуються за допомогою їх математичного моделювання [1, 5–8, 10].

Рівняння руху потоків рідини у псевдопризматичних руслах

Запишемо систему рівнянь, що характеризують рух рідини:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial ui}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vi}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wi}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial ww}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Рівняння (1) – це рівняння нерозривності для нестисливої рідини, а (2)–(4) – рівняння Нав'є – Стокса.

Прийнемо за координатну лінію x_1 лінію середнього дна, а за координатні лінії x_2 і x_3 – прямі, що лежать у нормальній до лінії дна площині так, що x_2 напрямлене горизонтально. Припущення про малість глибини потоку порівняно з радіусом кривизни лінії середнього дна пов'язане якраз із цим вибором системи координат.

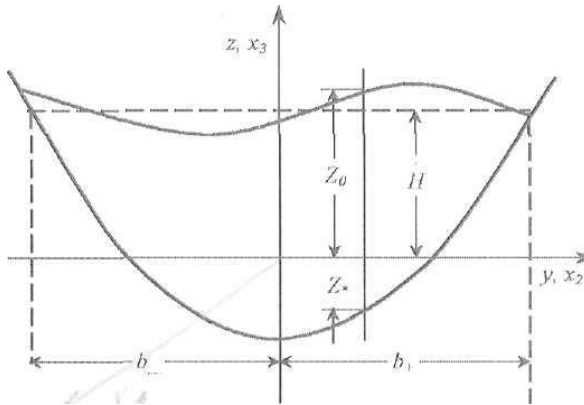


Рис. 1 – Поперечний переріз потоку

Позначимо U – швидкість потоку річки, F – площу живого перерізу потоку річки для заданої ширини B . Проінтегруємо систему рівнянь (1)–(4) за площею поперечного перерізу потоку (рис. 1) і, нехтуючи доданками, що значно не впливають на поведінку розв'язків задачі, після простих математичних перетворень отримаємо систему рівнянь у вигляді [2–4]:

$$\frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0;$$

(5)

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{F} U \frac{\partial F}{\partial t} \right) = i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{U^2}{C^2 R}.$$

Формулювання початково-крайової та варіаційної задач

Виконаємо в другому рівнянні системи (5) заміну $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{1}{B}$, отримаємо

$$\frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0;$$

(6)

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\alpha}{g} U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{g} \frac{U}{F} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{U^2}{C^2 R} = i,$$

де $g = 9,8$ м/с – прискорення сили тяжіння; $c = \text{const}$ – коефіцієнт Шезі; $i = \sin \delta = \text{const}$ – нахил лінії середнього дна; $B = b_- + b_+ = \text{const}$ – ширина вільної поверхні; $R = \text{const}$ – гідравлічний радіус русла; α – відомий у гідравліці коректив середньої швидкості.

Доповнимо ці рівняння початковими

$$U|_{t=0} = u_0(x), \quad F|_{t=0} = f_0(x) \quad \text{на } [0, L]$$

та крайовими

$$U(t, 0) = 0, \quad F(t, 0) = 0$$

умовами, отримаємо початково-крайову задачу знаходження невідомих U, F .

Уведемо простори допустимих функцій $H := L^2(\Omega)$, $V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = 0\}$.

Для побудови варіаційної задачі домножимо перше рівняння задачі (20) на довільну функцію $\varphi \in V$, друге – на $\psi \in V$ і результати проінтегруємо за областю Ω .

Уведемо такі білінійні форми:

$$a(u, f, \varphi) = \int_{\Omega} u \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx; \quad b(u, \varphi) = \int_{\Omega} u \varphi dx; \quad c(u, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx; \quad d(u, f, \varphi) = \int_{\Omega} u f \varphi dx,$$

а також лінійний оператор

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} i \varphi dx.$$

Тоді варіаційне формулювання початково-крайової задачі (6) запишемо так:

Задано:

$$u_*, f_* \in H$$

Знайти пару:

$$(u, h) \in L^2(0, T; V \times V) \quad \text{таку, що}$$

$$\begin{cases} a(u, f, \varphi) + a(f, u, \varphi) + b(f', \varphi) = 0; \\ \frac{1}{g} b(u', \psi) + \frac{\alpha}{g} a(u, u, \psi) + \frac{1}{B} c(f, \psi) + \frac{1}{C^2 R} d(u, u, \psi) - \frac{\alpha - 1}{g} d(w, f', \psi) = \langle l, \psi \rangle; \\ b(u(0) - u_0, \varphi) = 0, b(f(0) - f_0, \psi) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Дискретизація задачі за просторовою та часовою змінними

Для побудови обчислювальної схеми розв'язку варіаційної задачі виконаємо напівдискретизацію варіаційної задачі в часі [9]. Розділимо відрізок часу $[0, T]$ на $N_T + 1$ однакові (хоча це необов'язково) частини $[t_j, t_{j+1}]$ завдовжки

$$\Delta t = t_{j+1} - t_j, \quad j = 0, \dots, N_T.$$

На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ шукаємо розв'язки задачі (7) $u(x, t), f(x, t) \in L^2(0, T; V)$, які апроксимуємо поліномами вигляду

$$\begin{cases} u_{\Delta t}(x, t) = \{1 - \omega(t)\} u^j(x) + \omega(t) u^{j+1}(x); \\ f_{\Delta t}(x, t) = \{1 - \omega(t)\} f^j(x) + \omega(t) f^{j+1}(x); \\ t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, 1, \dots, N_T - 1, \omega(t_j, t) = \frac{t - t_j}{\Delta t} \end{cases} \quad (8)$$

з невідомими функціями $u^j(x), f^j(x) \in V_h$.

Для функціонала $l(x, t) \in V_h^1$ задачі (7) будемо використовувати апроксимації вигляду

$$l_{\Delta t}(x, t) = l_{j+1/2} = l(t_{j+1/2}, x). \quad (9)$$

Виберемо послідовність скінченновимірних просторів апроксимацій V_h з простору V з властивостями $\dim V_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$.

Тоді (u_h, f_h) – напівдискретна апроксимація розв'язку (u, f) .

Виберемо базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ простору апроксимацій V_h . Апроксимація Гальоркіна u_h та f_h однозначно визначена такими розкладами:

$$u_h^j(x) = \sum_{i=1}^N U_i^j \varphi_i(x), \quad f_h^j(x) = \sum_{i=1}^N F_i^j \varphi_i(x) \quad (10)$$

за функціями базису $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ і невідомими коефіцієнтами $U = \{U_i\}_{i=1}^N, F = \{F_i\}_{i=1}^N$.

З використанням матричних позначень рекурентна схема (10) допускає еквівалентне зображення:

Задано:

$$\Delta t, \omega(t) = \text{const} > 0,$$

$$u^j, f^j \in R^n.$$

Знайти:

$$u^{j+1}, f^{j+1} \in R^n.$$

такі, що:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[B1 + \Delta t \gamma A1(u^j) + \Delta t \gamma A2(u^j) \right] f^{j+1/2} + \left[\Delta t \gamma A3(f^j) + \Delta t \gamma A4(f^j) \right] u^{j+1/2} = \\ & = -AP1(u^j, f^j) - AP2(f^j, u^j); \\ & \left[\frac{1}{B} \Delta t \beta C + \frac{\alpha - 1}{g} D2(w^j) \right] f^{j+1/2} + \left[\frac{1}{g} B2 + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta (A5(u^j) + A6(u^j)) + \frac{1}{C^2 R} 2 \Delta t \beta D1(u^j) \right] u^{j+1/2} = \\ & = L_{j+1/2} - \frac{\alpha}{g} AP3(u^j, u^j) - \frac{1}{B} CP(f^j) - \frac{1}{C^2 R} DP(u^j, u^j); \\ & u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Для розв'язування задачі напівдискретизації Гальоркіна було використано кусково-лінійні апроксимації методу скінченних елементів.

Тестові приклади

Приклад 1. Розглянемо приклад з відомим аналітичним розв'язком:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \\ & \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{u}{g} \frac{\partial \alpha u}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{(\alpha - 1)}{f} u \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{u^2}{C^2 R} = i + G(x, t); \\ & u|_{t=0} = -x, f|_{t=0} = x; \end{aligned}$$

$$u(t, 0) = 0, f(t, 0) = 0,$$

де

$$G(x, t) = \frac{1}{(1+t)^2} \left(\frac{x}{g} + \frac{\alpha x}{g} + \frac{2(\alpha - 1)}{g} + \frac{(1+t)^4}{B} + \frac{x^2}{C^2 R} \right) - i.$$

Точний аналітичний розв'язок цієї задачі запишемо у вигляді

$$\begin{cases} u^*(x, t) = -\frac{x}{(1+t)}; \\ f^*(x, t) = x(1+t)^2. \end{cases}$$

Обчислення проведені для розбиттів відрізка $x \in [0,1]$ на 20, 40, 80 скінченних елементів і з кроком $\Delta t = 0.01$.

Нижче подаються графіки зміни площі поперечного перерізу та швидкості в часі.

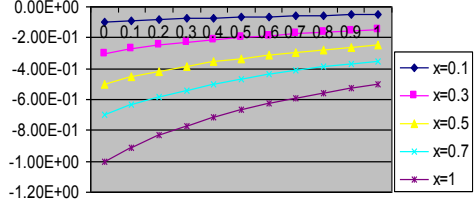
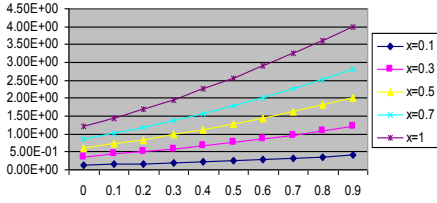


Рис. 2 – Площа для різного розбиття по X Рис. 3 – Швидкість для різного розбиття по X

Норму похибки для функції F , як і для U , обчислювали за такою формулою:

$$\|e_{\Delta t h}\|^2 = \int_0^T \int_0^1 (f_{h\Delta t} - f)^2 dx dt = \sum_{i=0}^{i_{i+1}-1} \int_0^1 \int_0^1 (f_{h\Delta t} - f)^2 dx dt = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 \left(f_{h\Delta t} \left(x, t_{i+\frac{1}{2}} \right) - f \left(x, t_{i+\frac{1}{2}} \right) \right)^2 dx$$

Порядок збіжності за просторовою змінною знаходили зі співвідношення:

$$K = \text{Log}_2 \frac{\|e_{\Delta t h}\|^2 - \|e_{\Delta t \frac{h}{2}}\|^2}{\|e_{\Delta t \frac{h}{2}}\|^2 - \|e_{\Delta t \frac{h}{4}}\|^2}$$

Отримано порядок збіжності для функції F , який дорівнює 1.925635, аналогічно для функції U – 2.40379. Подібно обчислювали порядки збіжності за часом, для функції F : $K = 5.007565$; для функції U : $K = 4.996095$.

Для різних типів річок вибрано такі значення параметра α :

- $\alpha = 1$ – рівнинні;
- $1 < \alpha \leq 1.07$ – напівгірські;
- $1.07 < \alpha < 6$ – гірські річки.

Задано такі значення параметра α : $\alpha = 1; \alpha = 1.05; \alpha = 2$.

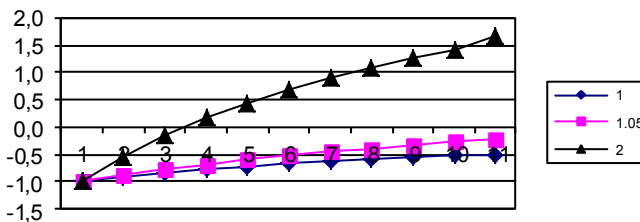


Рис. 4 – Значення швидкості при різних параметрах α

Приклад 2. Покажемо використання цієї моделі на складному дні русла ріки.

$$\frac{\partial(u\hat{f})}{\partial x} + \frac{\partial\hat{f}}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{u}{g} \frac{\partial \alpha u}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{(\alpha - 1)}{f} u \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{u^2}{C^2 R} = i;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad f|_{t=0} = x^2;$$

$$u(t, 0) = 0, \quad f(t, 0) = 0,$$

де параметри: $\alpha = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1, \Delta t = 0.0001, B = 8, g = 9.8, C = 60, R = 1.$

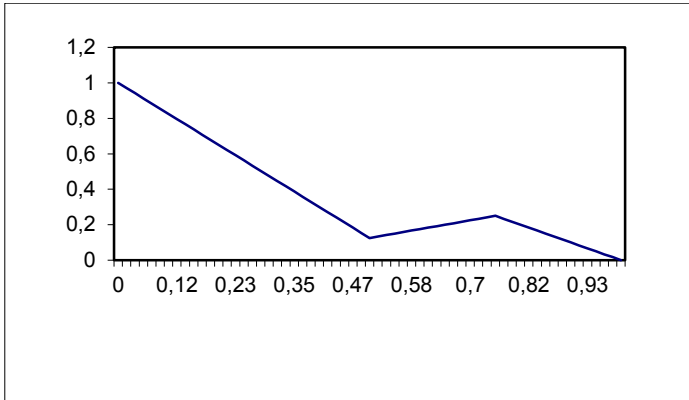


Рис. 5 – Зображення рельєфу дна ріки

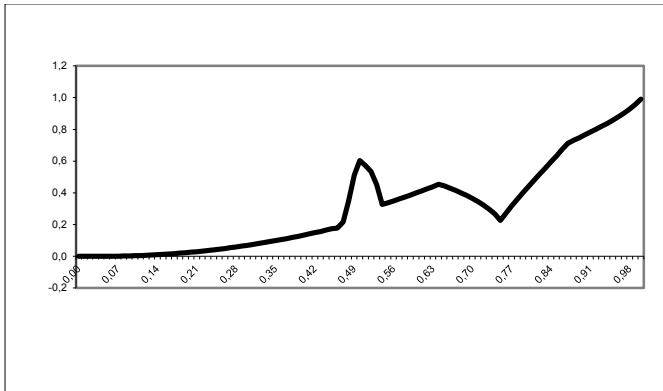


Рис. 6 – Зміни площі поперечного перерізу F

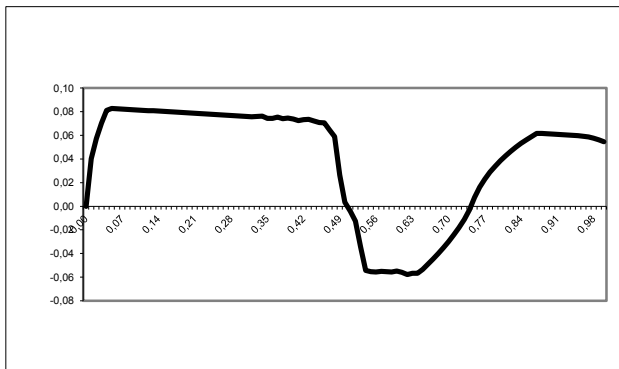


Рис. 7 – Зміни швидкості руслового потоку для постійної ширини русла $B = 8$

З аналізу графіків з рис. 6 і рис. 7 видно, що площа поперечного перерізу приймає найбільше і найменше значення в точках екстремуму рельєфу дна річки. Швидкість потоку з рис. 7 приймає від'ємні значення, коли вода перетікає вершини рельєфу дна потоку. Слід зауважити, що складність рельєфу дна породжує осциляції розв'язку задачі, що приводить до апроксимацій шуканої функції базисними функціями вищих порядків або до застосування адаптивних схем побудови сіток у вибраній області.

Використання аплікації з GIS-компонентою, побудованої на основі ArcGIS Server'a

Завданням даного проекту є розробка технології, яка б дала змогу використовувати ArcGIS-розширення, тобто GIS-компоненти, для Web-застосувань на базі ArcGIS Server'a без внесення значних змін у сайт. Такі технології забезпечують просте та зручне інтегрування та використання GIS-компонент на Web-сайті.

Програмне забезпечення повинно володіти наступними можливостями:

- динамічне додавання та видалення шарів карт;
- підтримка основних операцій з об'єктами на шарах;
- організація різних запитів про характеристики об'єктів на шарах.

Також додатково типовому шару надаються можливості моделювання та розв'язування прикладних задач з даними характеристиками об'єктів шару.

Дана технологія буде суттєво зменшувати вартість програмного забезпечення, яке б мало бути на комп'ютері кінцевого користувача (клієнта), тому що на ньому не потрібно встановлювати програмне забезпечення сімейства ArcGIS і, відповідно, не витрачаються кошти на придбання ArcGIS-ліцензії для роботи з ним.

Вимоги, які забезпечує дана технологія:

- дизайн GIS-компонент повинен бути аналогічний до дизайну Windows-компонент;
- на стороні клієнта не потрібно встановлювати програмного забезпечення ArcGIS, а лише операційні системи сімейства Windows, Web-browser Internet Explorer 5 та .NET Framework 2.0;
- безпека:
 - HTTPS (HTTP Security protocol);
 - система логування;
- інтеграція у вже існуючі Web-сайти, створені на основі ArcGIS Server Web ADF та ArcGIS Server Manager;
- мінімальне використання ArcObjects на стороні сервера та робота компонент на стороні клієнта без використання ArcObjects.

Покажемо використання такої технології для створення GIS-компоненти web-сайту гідрологічної системи вибраної території.

Технологія складається з наступних трьох головних частин:

1. Core;
2. Implementation Framework для ArcMap;
3. Implementation Framework для ArcGIS Server Web ADF.

На рис. 8 зображено графічне розташування частин та взаємозв'язки між ними даної технології.

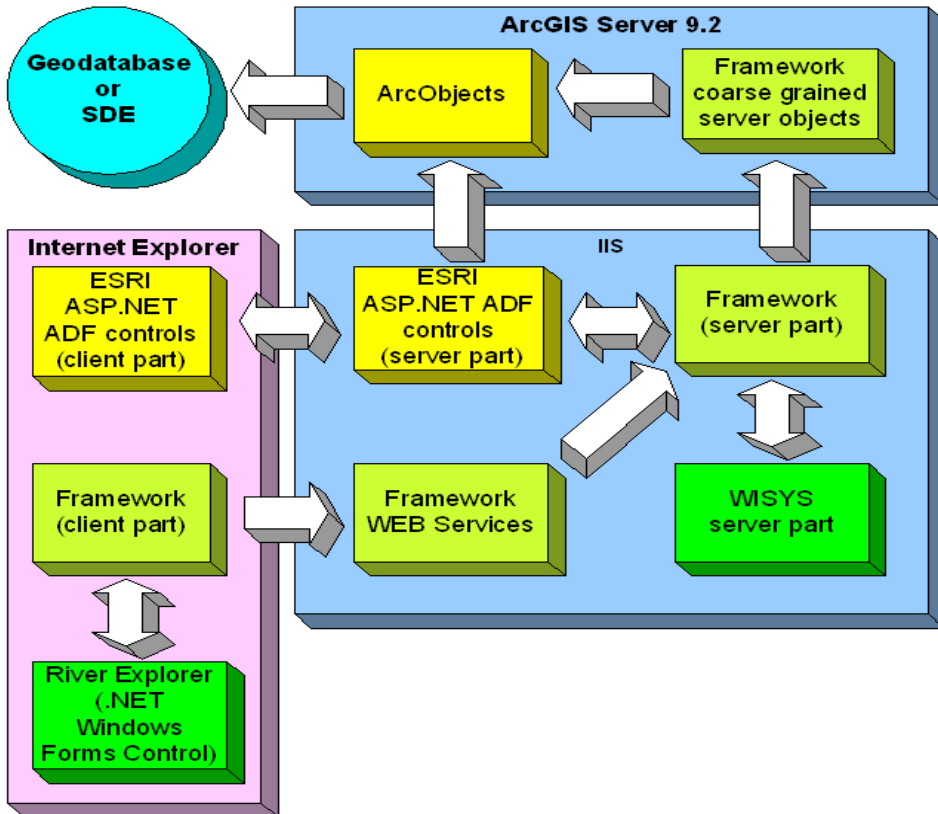


Рис. 8 – Архітектура розміщення об'єктів системи

Як бачимо на рис. 8, GIS-компоненти знаходяться на клієнтській стороні і через певний набір методів (Framework(client part)) зв'язуються з Веб-сервісом, який знаходиться на Веб-сервері. Веб-сервіс служить для зв'язку з ArcGIS Server-ом, де через ArcObject обмінюється даними з базою даних, та збереження даних в сесії. Також на серверній стороні використовуються компоненти ESRI ASP.NET ADF, які тісно пов'язані з відповідними компонентами на Веб-сервері. На Веб-сервері ці компоненти зв'язані з Веб-сервісом через набір методів з Framework(server part), а також передають дані в базу даних через ArcObjects. Такий механізм забезпечує надійну роботу серверів та зв'язків між певними їхніми частинами. За таким механізмом і повинно працювати розширення сайтів на основі ArcGIS Server.

У даній роботі створено Web-застосування геоінформаційної системи водних ресурсів України, яка використовує технологію універсального розширення. В ній створено та вбудовано GIS-компоненту, яка використовує наступні можливості розширення Web-сайту:

- виділення річки;
- збільшення зображення річки;
- інформація про річку;
- розв'язування задачі моделювання водних потоків у річках.

Вигляд Web-сторінки сайту з GIS-компонентою показано на рис. 9.

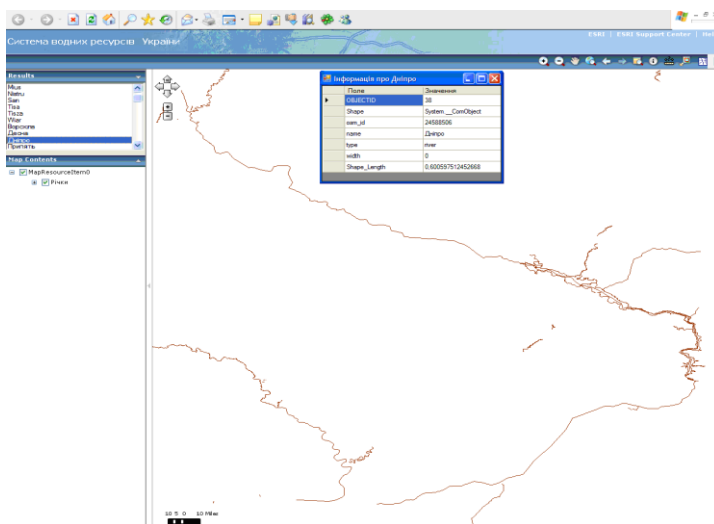


Рис. 9 – Інформація про річку

Далі показано виклик меню для вводу даних та отримання результатів розв'язку задачі.

Форма вводу даних про річки, в якій задаються додаткові характеристики потоку, викликається наступним чином:

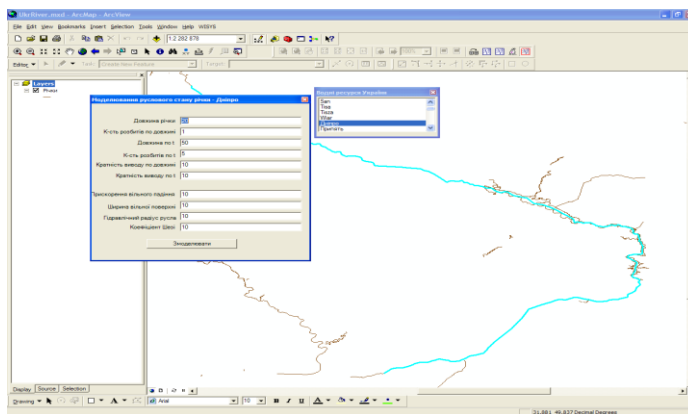


Рис. 10 – Форма вводу даних для розв'язування задачі моделювання руслового потоку

У результаті розв'язування задачі створюється новий шар, в якому шириною кривої русла річки і динамічним насиченням її кольору показано рівень наповненості ріки і швидкість руху води по руслу.

Підсумки та перспективи застосування

У даній роботі розглянуто задачу математичного моделювання руслового стоку рідини з поверхні водозбору. Виведено із загальних рівнянь Нав'є – Стокса систему рівнянь, що описують русловий стік. Сформульовано умови зміни параметра для різних видів потоків у річках. Досліджено умови стійкості

встановленого потоку. Сформульовано початково-крайову задачу руху нестисливої рідини в руслі з вертикальною площиною симетрії та варіаційну задачу, яка розв'язується методом скінченних елементів. Виконано напівдискретизацію варіаційної задачі в часі та дискретизацію Гальоркіна за просторовою змінною. Обчислено абсолютні та відносні похибки швидкості та глибини руслового потоку, проаналізовано норму похибки результуючих даних.

Знайдено порядок збіжності числової схеми апроксимації розв'язку за просторовою змінною і часом. Виконано порівняння числових результатів з точним аналітичним розв'язком задачі. Апробовано поведінку розв'язків задачі для різних типів рельєфу дна русла. Зроблено аналіз достовірності результатів програми та порівняння їх з результатами лабораторних досліджень російських вчених [11].

Для формування даних і візуалізації розв'язку задачі запропоновано технології, які б дали змогу використовувати Web-застосування на базі ArcGIS Server'a, де на окремому шарі надаються можливості моделювання та розв'язування прикладних задач, а саме моделювання потоків води у річках вибраної території.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бураков Д.А. Математическое моделирование стока: теоретические основы, современное состояние, перспективы / Д.А. Бураков, Е.Д. Карелова, В.В. Шайдуров // Вестн. КрасГУ. – 2006. – 19 с.
2. Венгерський П.С. Математичне моделювання руслового стоку вологи / П.С. Венгерський, Я.В. Коковська // Dynamical System Modeling and Stability Investigation: – «DSMSI-2007»: Intertational Conferece: Theses of conference reports. May 22–25. Kyiv, 2007. – P. 174.
3. Венгерський П.С. Моделювання потоків рідини на території водозбору з використанням WEB-аплікацій з GIS-компонентою на основі ArcGIS Server'a / П.С. Венгерський, І. Кіщак, Я.В. Коковська // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Том 23. – 2010 – № 1. – С. 36–48.
4. Венгерський П.С. Один з підходів моделювання процесів руслового стоку рідини / П.С. Венгерський, Я.В. Коковська // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. Вип. 15 – 2010.
5. Виноградов Ю.Б. Математическое моделирование процессов формирования стока / Ю.Б. Виноградов – Л.: Гидрометеоздат, 1988. – 312 с.
6. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков / К.В. Гришанин – Л.: Гидрометеоздат, 1979. 311 с.
7. Картвелишвили Н.А. Неустановившиеся открытые потоки / Н.А. Картвелишвили – Л.: Гидрометеоздат, 1968. – 126 с.
8. Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока / Л.С. Кучмент– Л.: Гидрометеоздат, 1980. – 142 с.
9. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів / Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко – Львів, 1999. – 80 с.
10. Трофимчук А.Н. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред / А.Н. Трофимчук, А.М. Гомилко, О.А. Савицкий – К.: Наукова думка – 2003. – 232 с.
11. <http://bedload.boom.ru/index.html>: Теплов В.И. Расчет водопропускной способности призматического прямоугольного русла с отрицательным уклоном дна. Государственный гидрологический институт СПб. – Россия. – 13 с.

Стаття надійшла до редакції 29.03.2016