

**ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ОТ  
ПОЖАРОВ В РЕГИОНЕ**

Проблема загрязнения окружающей среды – одна из актуальных проблем экологии. В данной работе предложен метод решения задачи о минимизации концентрации загрязнений от пожаров в регионе. При тестировании метода привлекались данные за лето 2010 года в Московском регионе. Рассматриваемая задача является некорректной, поэтому в настоящей работе применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова. В основу решения задачи положен метод «двойственного» представления квадратичного функционала невязки. Это представление использовалось для дальнейшего исследования и построения алгоритмов решения задачи.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *регуляризация Тихонова, локальный источник, интегральное наблюдение, численное моделирование загрязнений.*

**1. Постановка задачи о минимизации концентрации загрязнений Московского региона.**

В этой части работы приводится постановка задачи о минимизации концентрации загрязнений Московского региона на основе уравнения турбулентной диффузии при «локальных» граничных источниках и интегральном наблюдении, а также обсуждается вопрос ее однозначной и плотной разрешимости. При рассмотрении задачи вводится лишь один набор граничных условий (а значит и соответствующие им граничные условия для сопряженных задач). Отмечаем также, что эта задача рассматривается без ограничений на управления («дополнительные неизвестные»).

**1.1.** В области моделирования распространения загрязнений в атмосфере множество результатов получено на основе уравнения турбулентной диффузии, которое имеет вид (см. [1]):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \\ & = f + \frac{\partial}{\partial x} \left( a_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \text{ в } Q_T \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega \in R^3$  – цилиндр, нижняя граница которого, при  $z = 0$ , обозначается  $\Gamma_2$ , а верхняя, при  $z = H$ , обозначается  $\Gamma_4$ . Функция  $\phi$  – концентрация загрязнения,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – проекции вектора скорости ветра на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , причем выполняется условие (до высоты 3 км)

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0, \quad b_1 = u, \quad b_2 = v, \quad b_3 = w \quad (1.2)$$

$a_{xx} \equiv a_{11}$ ,  $a_{yy} \equiv a_{22}$ ,  $a_{zz} \equiv a_{33}$  – коэффициенты диффузии, являющиеся строго положительными ограниченными функциями,  $f$  – функция источников. Через  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  обозначается единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ . Предполагается, что все функции, с которыми авторы оперируют в настоящей работе, являются вещественными.

Скорость гравитационного осаждения примеси  $w_g$  оценивается по формуле Стокса:

$$w_g = \frac{2\rho_n g r_n^2}{9\rho\nu}$$

где  $\rho_n$  – плотность частиц взвеси,  $g$  – ускорение свободного падения,  $r_n$  – радиус частиц взвеси,  $\rho$  – плотность воздуха,  $\nu$  – вязкость воздуха. Формула Стокса применима, когда длина свободного пробега молекул воздуха много меньше радиуса частицы примеси, т.е.  $l \ll r_n$  (см. [2]). В данном случае  $l \cong 10^{-8}$  м, а  $r_n \cong 5 \cdot 10^{-7}$  м.

В качестве граничных условий принимаем (см., например, [3]):

$$\frac{\partial\phi}{\partial N} = 0 \text{ на всех границах, кроме } \Gamma_2, \quad (1.3)$$

$$-w_g\phi - a_{zz} \frac{\partial\phi}{\partial z} = -\beta\phi + g_{(\Gamma_2)} + \sum_{i=1}^3 m_i(x, y, 0)u_i(t) \text{ на } \Gamma_2 \quad (1.4)$$

где  $\beta$  – величина, которая характеризует взаимодействие примесей с подстилающей поверхностью,  $g_{(\Gamma_2)}$  – концентрация загрязнения на  $\Gamma_2$ ,  $m_i(x, y, 0)$  – характеристические функции на  $\Gamma_2$ ,  $u_i \equiv u_i(t)$  – функции интенсивности «локальных» граничных источников («дополнительные неизвестные», «управления»). Также предполагается, что  $b_3 = w = 0$  на нижней границе.

Начальное условие – «обычное»:

$$\phi = \phi_{(0)} \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega. \quad (1.5)$$

Для замыкания задачи введем дополнительное условие вида («интегральное наблюдение»):

$$(\phi, g) = \varphi_{obs} \quad (1.6)$$

где  $\varphi_{obs} = \text{const}$  – допустимый уровень «средней концентрации» в области  $\Omega$ , а также:

$$(\phi, g) \equiv (\phi, g)_{L_2(Q_T)} = \int_0^T \int_{\Omega} \phi g d\Omega dt$$

где  $g = g(x, t)$  – заданная функция такая, что определен функционал  $(\phi, g)$ .  
Пусть далее

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{mes\Omega} \frac{1}{t_2 - t_1}, \{x \in \Omega\} \cap \{t \in (t_1, t_2)\}, \\ 0, \{x \notin \Omega\} \cup \{t \notin (t_1, t_2)\} \end{cases}$$

где  $t_1$  – начальный момент наблюдения,  $t_2$  – конечный момент наблюдения.

Теперь ставится задача: найти  $\phi$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , такие, что выполняются соотношения (1.1), (1.3)-(1.6).

**1.2.** В данном пункте подробно опишем области, временные интервалы и коэффициенты, при которых проводились исследования и численные эксперименты.

В качестве области наблюдения  $\Omega$  выбирался Московский регион, а областями контроля  $\Omega_{c,i}$ ,  $i = \overline{1,3}$  были регионы с наиболее интенсивными пожарами, зафиксированными в летний период 2010 г. Область наблюдений есть:

$$\Omega = (54^\circ 00' 11'' \text{ с.ш.}, 57^\circ 03' 17'' \text{ с.ш.}) \times (33^\circ 58' 50'' \text{ в.д.}, 41^\circ 58' 50'' \text{ в.д.}) \times (0 \text{ км}, 3 \text{ км}).$$

Обозначим:

$$Ax_1 = 54^\circ 00' 11'' \text{ с.ш.}, Ax_2 = 57^\circ 03' 17'' \text{ с.ш.}, By_1 = 33^\circ 58' 50'' \text{ в.д.}, \\ By_2 = 41^\circ 58' 50'' \text{ в.д.}, Cz_1 = 0 \text{ км}, Cz_2 = 3 \text{ км}.$$

Регионы, в которых наблюдались самые интенсивные пожары, изображены на рис. 1.

Исследования проводились на следующем временном интервале: с 0 ч. 15.07.2010 г. по 0 ч. 22.07.2010 г. (одна неделя июля). Столь небольшой интервал брался по той причине, что методика решения задачи требует прогноза скоростей ветра вплоть до конца управления по времени, а такой прогноз точно можно сделать лишь на период в несколько дней. Данные по направлению и скорости ветра брались с сайта: [moskvameteo.ru/archive.php](http://moskvameteo.ru/archive.php) (архив погоды в Москве с 1999 г.). Предполагается, что они зависят лишь от времени и меняются один раз в двенадцать часов. Коэффициенты диффузии полагались следующими:  $a_{xx} = a_{yy} = 2000 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $a_{zz} = 2 \text{ м}^2/\text{с}$  (см. [3]). Скорость гравитационного оседания примесей  $w_g$  вычислялась по формуле Стокса и получилась равной  $7 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$ . Наконец, величина, характеризующая взаимодействие примесей с подстилающей поверхностью  $\beta$ , согласно [1], полагалась равной  $5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$  (такой она бывает в городах, сельской местности и в бору).

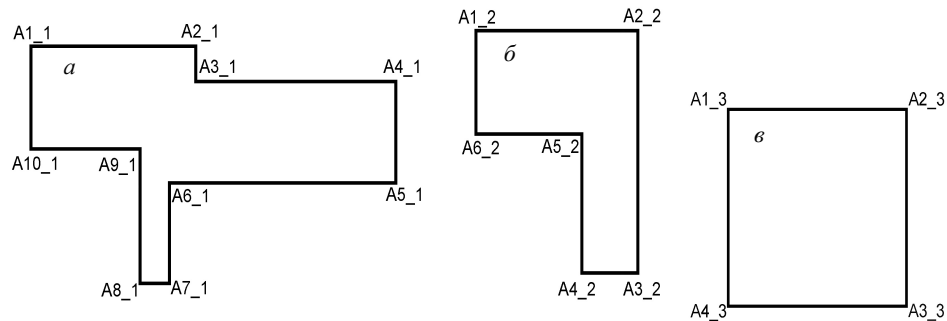


Рис. 1. Регионы, с наиболее интенсивными пожарами:  $a$  – регион  $\Omega_{c,1}$  ;  
 $\bar{b}$  – регион  $\Omega_{c,2}$  ;  $\bar{в}$  – регион  $\Omega_{c,3}$ .

Географические координаты регионов:

$A_{1\_1} = (55^\circ 07' 55'' \text{ с.ш.}, 39^\circ 26' 24'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{2\_1} = (55^\circ 07' 55'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 10' 48'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{3\_1} = (55^\circ 01' 33'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 10' 48'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{4\_1} = (55^\circ 01' 33'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 41' 45'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{5\_1} = (54^\circ 47' 13'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 41' 45'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{6\_1} = (54^\circ 47' 13'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 02' 42'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{7\_1} = (54^\circ 41' 02'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 02' 42'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{8\_1} = (54^\circ 41' 02'' \text{ с.ш.}, 39^\circ 51' 46'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{9\_1} = (54^\circ 52' 01'' \text{ с.ш.}, 39^\circ 51' 46'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{10\_1} = (54^\circ 52' 01'' \text{ с.ш.}, 39^\circ 26' 24'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{1\_2} = (55^\circ 42' 46'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 15' 28'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{2\_2} = (55^\circ 42' 46'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 32' 56'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{3\_2} = (55^\circ 27' 25'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 32' 56'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{4\_2} = (55^\circ 27' 25'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 22' 04'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{5\_2} = (55^\circ 37' 26'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 22' 04'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{6\_2} = (55^\circ 37' 26'' \text{ с.ш.}, 40^\circ 15' 28'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{1\_3} = (57^\circ 02' 09'' \text{ с.ш.}, 36^\circ 10' 40'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{2\_3} = (57^\circ 02' 09'' \text{ с.ш.}, 36^\circ 31' 08'' \text{ в.д.})$ ,  
 $A_{3\_3} = (56^\circ 52' 33'' \text{ с.ш.}, 36^\circ 31' 08'' \text{ в.д.})$ ,  $A_{4\_3} = (56^\circ 52' 33'' \text{ с.ш.}, 36^\circ 10' 40'' \text{ в.д.})$ .

Отметим, что информацией по функции источников  $f$ , а также по реальной концентрации загрязнения авторы не располагают. Поэтому в настоящей работе эти параметры полагались равными некоторым функциям, которые строились исходя из некоторых априорных предположений, а также в соответствии с граничными и начальными условиями. Подробнее на этом вопросе остановимся в третьей части настоящей работы.

## 2. Алгоритмы решения задачи о минимизации концентрации загрязнений Московского региона.

В предыдущей части была сформулирована задача о минимизации концентрации загрязнений Московского региона при «локальных» граничных источниках и интегральном наблюдении. В данной части будут сформулированы несколько алгоритмов ее решения.

**2.1.** Перейдем от рассмотрения (1.1), (1.3) – (1.6) к обобщенной постановке (более подробно методику см. в [4, 5]):

Найти  $\phi, \{u_i(t)\}$ , такие, что выполняются (1.1), (1.3) – (1.5)

$$\text{и } \inf_{\{u_i\}} J_\alpha(\phi, \vec{u}) \quad (2.1)$$

где

$$J_\alpha(\phi, \vec{u}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^T u_i^2(t) dt + \frac{1}{2} ((\phi, g) - \varphi_{obs})^2, \quad \alpha = const \geq 0. \quad (2.2)$$

Введем сопряженную «вспомогательную» задачу вида:

$$\begin{aligned} L^* q_0 &\equiv g \text{ в } Q_T, \\ b_n q_0 + \frac{\partial q_0}{\partial N} &= 0 \text{ на боковых границах,} \\ \beta q_0 - a_{zz} \frac{\partial q_0}{\partial z} &= 0 \text{ на нижней границе } \Gamma_2, \\ (b_3 - w_g) q_0 + a_{zz} \frac{\partial q_0}{\partial z} &= 0 \text{ на верхней границе } \Gamma_4, \\ q_0 &= 0 \text{ при } t = T \text{ в } \Omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} L^* q_0 &\equiv -\frac{\partial q_0}{\partial t} - u \frac{\partial q_0}{\partial x} - v \frac{\partial q_0}{\partial y} - (w - w_g) \frac{\partial q_0}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} (a_{xx} \frac{\partial q_0}{\partial x}) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} (a_{yy} \frac{\partial q_0}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z} (a_{zz} \frac{\partial q_0}{\partial z}). \end{aligned}$$

Используя  $q_0$ , выпишем «двойственное представление»  $J_\alpha$ . Поскольку

$$\begin{aligned} (\phi, g) &= (\phi, L^* q_0) = (f, q_0) + (\phi_{(0)}, q_0(0))_{L_2(\Omega)} + \\ &\quad + (g_{(\Gamma_2)}, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} + \left( \sum_{i=1}^3 m_i(x, y, 0) u_i(t), q_0 \right)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))}, \end{aligned}$$

функционал  $J_\alpha$  можно переписать в виде («двойственное» представление функционала):

$$J_\alpha = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^T u_i^2(t) dt + \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^3 m_i(x, y, 0) u_i(t), q_0 \right)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{\varphi_{obs}} \right)^2 \quad (2.4)$$

где

$$\overline{\varphi_{obs}} \equiv \varphi_{obs} - (\phi_{(0)}, q_0(0))_{L_2(\Omega)} - (g_{(\Gamma_2)}, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - (f, q_0).$$

**2.2.** Рассмотрим теперь алгоритмы решения задачи (2.1).

**Алгоритм 1.** После получения вида (2.4) сразу же находим  $u_i$ . Варьируем функционал (2.4):

$$\delta J_\alpha = \alpha \sum_{i=1}^3 \int_0^T u_i(t) \delta u_i dt + \left( \sum_{i=1}^3 (m_i u_i, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \bar{\varphi}_{obs} \right) \cdot \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right) \delta u_i dt, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Так как  $\delta J_\alpha = 0 \quad \forall \delta u_i$ , то

$$0 = \alpha u_i(t) + \left( \sum_{j=1}^3 (m_j u_j, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \bar{\varphi}_{obs} \right) \cdot \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Умножаем последнее равенство на  $\int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2$ , затем интегрируем по времени и суммируем результат:

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_i u_i(t) q_0 d\Gamma_2 dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 \cdot \\ & \cdot \left( \sum_{i=1}^3 (m_i u_i, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \bar{\varphi}_{obs} \right) dt = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \alpha \sum_{i=1}^3 (m_i u_i, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} + \sum_{i=1}^3 (m_i u_i, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} \cdot \\ & \cdot \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt = \bar{\varphi}_{obs} \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sum_{i=1}^3 (m_i u_i, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} = \frac{\bar{\varphi}_{obs} \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt}{\alpha + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt}. \end{aligned}$$

Значит:

$$\begin{aligned} \alpha u_i(t) &= \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right) \left( \frac{\bar{\varphi}_{obs} \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt}{\alpha + \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt} \right) = \\ &= \frac{\alpha \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right) \bar{\varphi}_{obs}}{\alpha + \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt}. \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$u_i(t) = \frac{\bar{\varphi}_{obs} \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)}{\alpha + \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt}. \quad (2.5)$$

При таких  $\{u_i\}$  функционал имеет вид:

$$J_\alpha(\vec{u}) = \frac{\alpha(\bar{\varphi}_{obs})^2}{2 \left( \alpha + \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.$$

Итак, для решения задачи находим  $q_0$  из (2.3), затем  $\{u_i\}$  по формуле (2.5), наконец решаем прямую задачу (1.1), (1.3) – (1.5).

Отметим, что для задачи (1.1), (1.3) – (1.6) справедлива следующая

**Теорема.** При выполнении условия:

$$(a) \quad \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt = \text{const} \neq 0,$$

задача (1.1), (1.3) – (1.6) является плотно разрешимой и не является однозначно разрешимой.

*Доказательство.* Рассмотрим приведенный выше функционал:

$$J_\alpha(\vec{u}) = \frac{\alpha(\bar{\varphi}_{obs})^2}{2 \left( \alpha + \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.$$

При выполнении условия (а) имеем:  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\bar{u}) = 0$ . Следовательно, задача (1.1), (1.3)-(1.6) является плотно разрешимой (см. [4]).  
Для доказательства отсутствия однозначной разрешимости рассмотрим функционал:

$$J_0 = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i=1}^3 m_i(x, y, 0) u_i(t), q_0 \right)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \bar{\varphi}_{obs} \right)^2.$$

Проварьировав его, найдём  $\delta J_0$  и из уравнения  $\delta J_0 = 0 \forall \delta u_i$  получим:

$$\sum_{i=1}^3 (m_i(x, y, 0) u_i(t), q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} = \bar{\varphi}_{obs}.$$

Для однозначной разрешимости:

$$\sum_{i=1}^3 (m_i(x, y, 0) u_i(t), q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} = 0 \Leftrightarrow \{u_i(t)\} = \{0\}.$$

Покажем, что это не так. Обозначим  $\varphi_i(t) \equiv \left( \int_{\Gamma_2} m_i q_0 d\Gamma_2 \right)(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  и зафиксируем эти функции. Тогда из равенства

$$\sum_{i=1}^3 \int_0^T u_i(t) \varphi_i(t) dt = 0$$

следует, что существуют нетривиальные  $\{u_i(t)\}$ , ортогональные  $\{\varphi_i(t)\}$ , а значит, рассматриваемая задача не является однозначно разрешимой.

**Алгоритм 2.** Рассматриваем задачу (2.1) и варьируем функционал (2.2):

$$\delta J_\alpha = \alpha \sum_{i=1}^3 \int_0^T u_i \delta u_i dt + ((\phi, g) - \varphi_{obs}) \cdot \int_0^T \int_\Omega g \delta \phi d\Omega dt = 0 \forall \delta u_i,$$

где  $\delta \phi$  – решение задачи

$$L\delta\phi = 0 \text{ в } Q_T, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \delta\phi}{\partial N} = 0 \text{ на всех границах, кроме } \Gamma_2, \quad (2.7)$$

$$-w_g \delta\phi - a_{zz} \frac{\partial \delta\phi}{\partial z} = -\beta \delta\phi + \sum_{i=1}^3 m_i \delta u_i \text{ на } \Gamma_2, \quad (2.8)$$

$$\delta\phi = 0 \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega. \quad (2.9)$$

Введем сопряженную задачу:

$$L^* q \equiv ((\phi, g) - \varphi_{obs}) g \text{ в } Q_T, \quad (2.10)$$

$$b_n q + \frac{\partial q}{\partial N} = 0 \text{ на боковых границах,} \quad (2.11)$$



$$\beta q - a_{zz} \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \text{ на нижней границе } \Gamma_2, \quad (2.12)$$

$$(b_3 - w_g)q + a_{zz} \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \text{ на верхней границе } \Gamma_4, \quad (2.13)$$

$$q = 0 \text{ при } t = T \text{ в } \Omega. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.10) в вариацию функционала и используя граничные и начальные условия задач (2.6)-(2.9) и (2.10)-(2.14), приводим вариацию функционала к виду:

$$\delta J_\alpha = \alpha \sum_{i=1}^3 \int_0^T u_i \delta u_i dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left( \int_{\Gamma_2} q m_i d\Gamma_2 \right) \delta u_i dt = 0 \quad \forall \delta u_i.$$

Из последнего тождества получим:

$$\alpha u_i + \int_{\Gamma_2} q m_i d\Gamma_2 = 0 \text{ на } (0, T), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Теперь рассматриваемую задачу можно решать итерационным алгоритмом вида (см. [4]):

$$L\phi^k = f \text{ в } Q_T, \quad \frac{\partial \phi^k}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma / \Gamma_2) \times (0, T),$$

$$\phi^k|_{t=0} = \phi_{(0)}^k \text{ в } \Omega, \quad (2.15)$$

$$-w_g \phi^k - a_{zz} \frac{\partial \phi^k}{\partial z} = -\beta \phi^{k-1} + g_{(\Gamma_2)}^k + \sum_{i=1}^3 m_i u_i^k \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$L^* q^k \equiv ((\phi^k, g) - \varphi_{obs})g \text{ в } Q_T,$$

$$b_n q^k + \frac{\partial q^k}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma / (\Gamma_2 \cup \Gamma_4)) \times (0, T), \quad q^k|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.16)$$

$$\beta q^k - a_{zz} \frac{\partial q^k}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (b_3 - w_g)q^k + a_{zz} \frac{\partial q^k}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_4 \times (0, T),$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \gamma_k (\alpha u_i^k + \int_{\Gamma_2} q^k m_i d\Gamma_2) \text{ на } (0, T), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.17)$$

Отметим, что при реализации (2.15) – (2.17) на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать прямую и сопряженную задачи. В данном случае имеется сразу три области контроля и три интенсивности источников. Приведем также модификацию итерационного алгоритма 1.

**Алгоритм 3.** Вновь рассмотрим (1.1)–(1.6), итерационный алгоритм (2.15) – (2.17), задачу (2.3), которая является «вспомогательной». Тогда решение  $q^k$  задачи (2.16) есть  $L^* q^k = ((\phi^k, g) - \varphi_{obs})g = ((\phi^k, g) - \varphi_{obs})L^* q_0$ , т. е.:

$$q^k = ((\phi^k, g) - \varphi_{obs})q_0 = \left( \sum_{i=1}^3 (m_i u_i^k, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{\varphi_{obs}} \right) q_0.$$

Тогда (2.17) принимает вид:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \gamma_k \left( \alpha u_i^k + \left( \sum_{i=1}^3 (m_i u_i^k, q_0)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{\varphi_{obs}} \right) \left( \int_{\Gamma_2} q_0 m_i d\Gamma_2 \right) \right) \quad (2.18)$$

на  $(0, T)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Таким образом, алгоритм является итерационным и заключается в следующем:

- решается сопряженная задача (2.3);
- при заданных  $u_i^k$ ,  $i = \overline{1, 3}$  реализуется (2.18).

Алгоритм 3 может быть использован, как и ранее, если получение  $u_i(t)$  в явном виде затруднительно.

Итак, выше предложено три алгоритма решения задачи минимизации концентрации загрязнений Московского региона. Непосредственно для решения задачи применялся алгоритм 1. Численные эксперименты и их результаты описаны в следующей части работы.

### 3. Численное решение задачи о минимизации концентрации загрязнений Московского региона.

В этой части приводятся результаты численных экспериментов по решению задачи о минимизации концентрации загрязнений Московского региона на основе уравнения турбулентной диффузии при локальных «граничных» источниках и интегральном наблюдении.

**3.1.** Ранее (см. пункт 1.2) нами описаны области, временные отрезки и коэффициенты при которых проводились численные эксперименты, поэтому здесь авторы этого не касаются. Перед описанием численных экспериментов осталось обсудить вопрос о функции источников  $f$  и концентрации загрязнения, которая минимизировалась.

Функция концентрации загрязнения  $\phi_{real}$  строилась из следующих соображений. Во-первых, она должна быть максимальной в начальный момент времени и близкой к нулю – в конечный. Во-вторых, концентрация равняется нулю на всех границах, кроме  $\Gamma_2$ . Наконец,  $\phi_{real}$  не может быть зависима от размера области и величины временного отрезка, поэтому  $\phi_{real}$  – нормированная функция. Таким образом, концентрация загрязнений имеет вид:

$$\phi_{real} = 10^5 \frac{Tf - t + 1}{Tf} \left( \frac{x - Ax_1}{Ax_2 - Ax_1} \right)^2 \left( \frac{x - Ax_2}{Ax_2 - Ax_1} \right)^2 \left( \frac{y - By_1}{By_2 - By_1} \right)^2 \times \\ \times \left( \frac{y - By_2}{By_2 - By_1} \right)^2 \left( \frac{z - Cz_2}{Cz_2 - Cz_1} \right)^2.$$

Эта концентрация является количеством загрязнения, которое получалось бы без управления (без решения задачи минимизации загрязнения). Она же будет выступать в роли «тестовой»: по ней, используя уравнения (1.1) – (1.6) находим функцию источников  $f$ , а также концентрацию загрязнения на нижней границе  $g_{(\Gamma_2)}$  и в начальный момент времени  $\phi_{(0)}$ . Кроме этого, в областях контроля  $\Omega_{c,i}$ ,  $i = \overline{1,3}$  (на нижней границе) вводим интенсивности источников загрязнения, которые имеют следующий вид:

$$u_{real\_1} = 50 \frac{Tf - t}{Tf}, \quad u_{real\_2} = 25 \frac{Tf - t}{Tf}, \quad u_{real\_3} = 5 \frac{Tf - t}{Tf}.$$

Таким образом, получаем задачу (1.1) – (1.6) с известными функциями  $f$ ,  $g_{(\Gamma_2)}$  и  $\phi_{(0)}$ . Для ее решения, как оговаривалось ранее, используем первый алгоритм (см. пункт 2.2). Для дискретизации прямой задачи (1.1) – (1.6) по времени использовалась неявная схема первого порядка точности, а для дискретизации «вспомогательной» сопряженной задачи (2.3) – схема Кранка-Николсон с шагом по времени  $ht = T / N_T$ ,  $N_T = 168$ ,  $T = 604\,800,0$  с  $ht = 3\,600,0$  с (более подробно методику см. в [6]). Для обеих задач для дискретизации по пространству использовался метод конечных объемов. Шаги по направлениям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  выбирались соответственно:

$$hx = (Ax_2 - Ax_1) / N_x, \quad N_x = 113, \quad hx = 3,0 \text{ км}, \quad hy = (By_2 - By_1) / N_y, \\ N_y = 141, \quad hy = 3,5 \text{ км}, \quad hz = Cz_2 / N_z, \quad N_z = 30, \quad hz = 0,1 \text{ км}.$$

**3.2. Эксперимент 1.** В данном эксперименте положим  $t_1 = Tf / 7$ ,  $t_2 = 4 \cdot Tf / 7$ , т.е. отрезок осреднения начинается в 0 ч. 2 дня (16 июля) и заканчивается в 0 ч. 5 дня (19 июля). Средняя концентрация, которая получилась бы без управления  $\bar{\phi} = (\phi, g) \approx 22,7$ . Требуем, чтобы  $\phi_{obs} = 0$  (т. е., чтобы на отрезке осреднения концентрация загрязнения равнялась нулю во всей области  $\Omega$ ) и при  $\alpha = 10^{-8}$  решаем задачу о нахождении  $\phi$ ,  $\bar{u}$ , таких, что выполняются (1.1) – (1.6).

Сначала приведем графики решения  $q$  «вспомогательной» сопряженной задачи (2.3) в момент времени  $t = 5 \cdot Tf / 14$  (на середине отрезка осреднения) и в точке с координатами  $(c_x, c_y) = (55^\circ 31' 44'' \text{ с.ш.}, 37^\circ 58' 50'' \text{ в.д.})$  (в центре области  $\Omega$ ) на нижнем уровне.

Решение  $q = q_0 \cdot par$ ,  $par = (Ax_2 - Ax_1)(By_2 - By_1)(Cz_2 - Cz_1)(t_2 - t_1)$  приведено на рис. 2.

Решение сопряженной задачи играет важную роль, так как оно, фактически, является функцией ценности, поскольку из него определяются величины управлений  $u_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , т. е. то, с какой интенсивностью надо устранять источник загрязнения в конкретной области  $\Omega_{c,i}$ , чтобы минимизировать загрязнение на определенном временном отрезке.

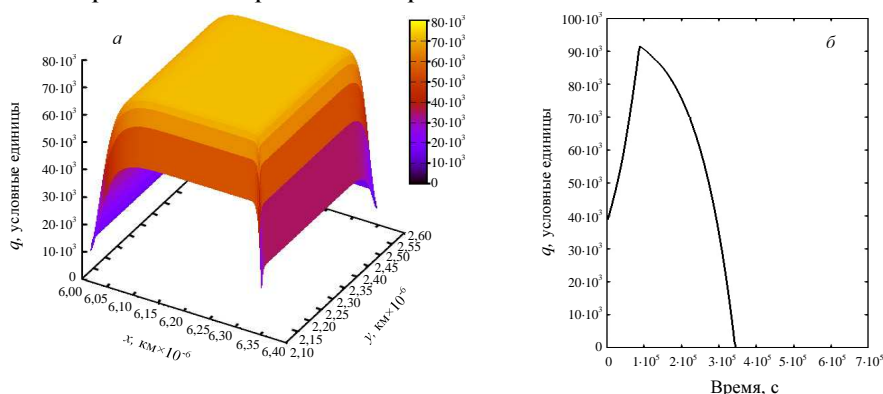


Рис. 2. Решения задачи:  $a - q(y \cdot 10^{-6}, x \cdot 10^{-6}, 0,5 \cdot \frac{Tf}{14})$ ;  $b - q(c_x, c_y, 0, t)$ .

Далее на рис. 3 приведем графики управлений  $u_i$ ,  $i = \overline{1,3}$  в трех областях, которые являются законами, по которым нужно управлять, чтобы минимизировать концентрацию загрязнения на вышеуказанном отрезке.

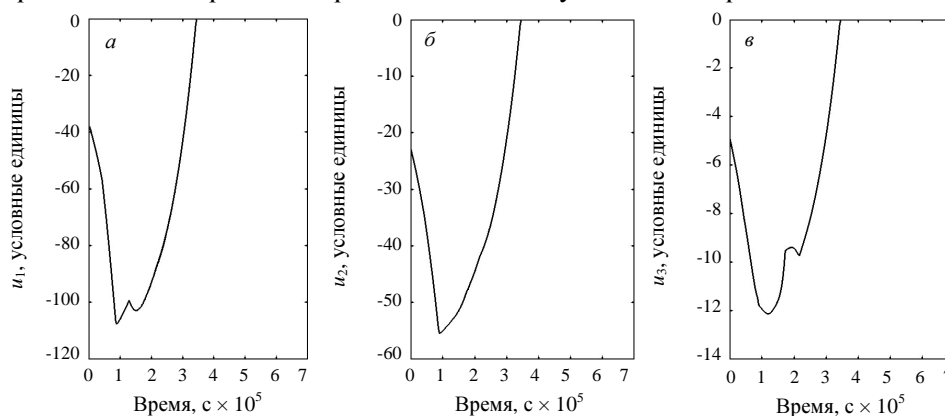


Рис. 3. Графики управления для трех областей:  $a - u_1(t)$ ;  $b - u_2(t)$ ;  $в - u_3(t)$ .

Отрицательность управлений означает, что источник загрязнения надо устранять (пожар надо тушить) по трем вышеприведенным законам. Наиболее интенсивный пожар в первом регионе ( $u_{real\_1} > u_{real\_2}$ ,  $u_{real\_1} > u_{real\_3}$ ), а также площадь первого региона наибольшая ( $mes(\Omega_{c,1}) > mes(\Omega_{c,2})$ ,  $mes(\Omega_{c,1}) > mes(\Omega_{c,3})$ ), поэтому тушить пожар в  $\Omega_{c,1}$  надо наиболее интен-

сивно и основные силы бросать именно в эту область. Второй по значимости является область  $\Omega_{c,2}$ , наименее «опасен» третий регион.

Наконец, на рис. 4 приведем несколько графиков решений  $\phi$  (концентрации загрязнения) на нижнем уровне, а также вертикальные профили  $\phi$  на рис. 5. Оси  $Ox, Oy$  изображены в масштабе  $x \cdot 10^{-6}$ ,  $y \cdot 10^{-6}$ .

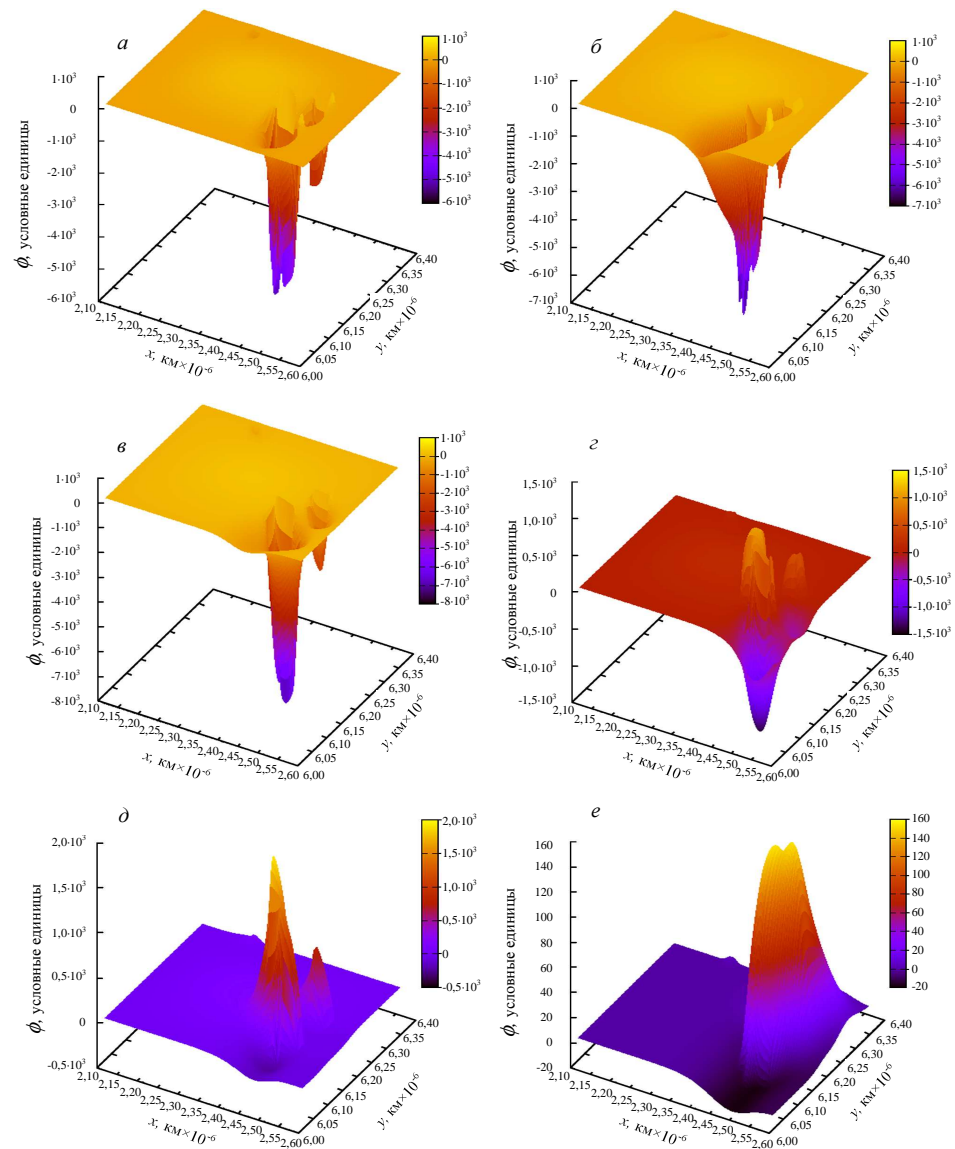


Рис. 4. Графики решений  $\phi$  (концентрации загрязнения) на нижнем уровне:  $a - \phi(x, y, 0,24 \cdot ht)$ ;  $b - \phi(x, y, 0,48 \cdot ht)$ ;  $c - \phi(x, y, 0,72 \cdot ht)$ ;  $d - \phi(x, y, 0,96 \cdot ht)$ ;  $e - \phi(x, y, 1,20 \cdot ht)$ ;  $f - \phi(x, y, 1,60 \cdot ht)$ .

Из результатов, представленных на рис. 4, можно сделать следующие выводы. Тушение пожаров происходит до конца момента осреднения (момент времени  $96 \cdot ht$ ), а далее его почти не происходит. Этого и следовало ожидать, поскольку концентрацию загрязнений нужно минимизировать лишь на определенном временном отрезке. Отметим, что после управления средняя концентрация загрязнения  $\bar{\phi} \approx 2,5$ , т.е. минимизировать ее до  $\phi_{obs} = 0$  не удалось, но произошло ее уменьшение приблизительно в десять раз по сравнению с той, что была бы без управления  $\bar{\phi} \approx 22,7$ .

На серии рис. 5 изображены вертикальные профили концентрации загрязнения, причем на рис. 5, *a* и *б* – в точке, где управления не происходит (вне областей  $\Omega_{c,i}$ ), а на рис. 5, *в* и *г* – в одной из областей  $\Omega_{c,i}$ .

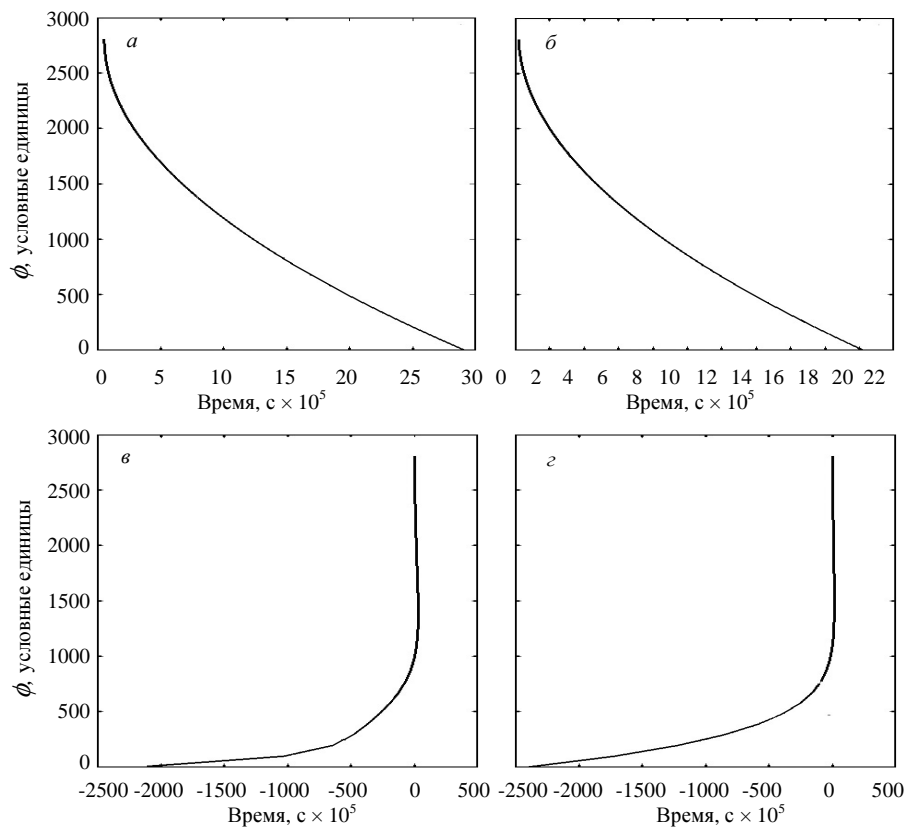


Рис. 5. Вертикальные профили концентрации загрязнений:

$$a - \phi(15 \cdot hx, 35 \cdot hy, z, 48 \cdot ht); \quad б - \phi(15 \cdot hx, 35 \cdot hy, z, 84 \cdot ht);$$

$$в - \phi(40 \cdot hx, 100 \cdot hy, z, 48 \cdot ht); \quad г - \phi(40 \cdot hx, 100 \cdot hy, z, 84 \cdot ht).$$

Как и следовало ожидать, в точке вне области контроля профиль имеет «обычный» вид: концентрация загрязнения максимальна на нижних уровнях и приблизительно равна нулю на верхних. А вот в области контроля на нижних уровнях профиль отрицателен (т.е., там надо тушить пожар), а на

верхних так и остается приблизительно равной нулю. Опять же, такого эффекта следовало ожидать.

Эксперимент 2. Положим  $t_1 = 2 \cdot Tf / 7$ ,  $t_2 = Tf$ , т.е. отрезок осреднения начинается в 0 ч. 3 дня (17 июля) и заканчивается в 0 ч. 8 дня (22 июля). Средняя концентрация, которая получилась бы без управления  $\bar{\phi} \approx 12,9$ , т.е. чем больше отрезок осреднения, тем меньше средняя концентрация, поэтому были все основания предполагать, что в этом эксперименте получится  $\bar{\phi}$  приблизить к желаемому  $\phi_{obs} = 0$  более точно.

Приведем графики решения  $q$  «вспомогательной» сопряженной задачи (3) в момент времени  $t = 9 \cdot Tf / 14$  (на середине отрезка осреднения) и в точке с координатами  $(c_x, c_y) = (55^\circ 31' 44'' \text{ с.ш.}, 37^\circ 58' 50'' \text{ в.д.})$  на нижнем уровне. Решение  $q = q_0 \cdot par$ ,  $par = (Ax_2 - Ax_1)(By_2 - By_1)(Cz_2 - Cz_1)(t_2 - t_1)$  приведено на рис. б.

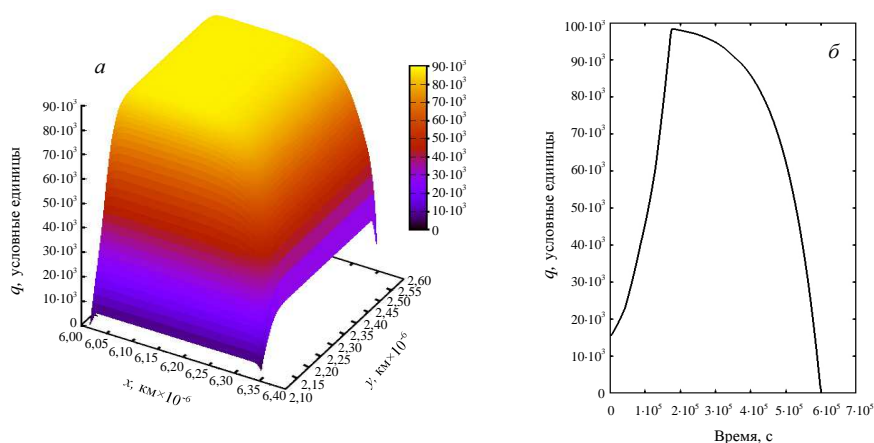


Рис. 6. Решения задачи: а –  $q(y \cdot 10^{-6}, x \cdot 10^{-6}, 0,9 \cdot \frac{Tf}{14})$ ; б –  $q(c_x, c_y, 0, t)$ .

В отличие от первого эксперимента, поскольку осреднение происходит вплоть до момента времени  $Tf$ , то решение сопряженной задачи положительно во все моменты времени (нигде не обращается в нуль на всем временном отрезке, кроме конечного момента).

Еще приведем графики управлений  $u_i$ ,  $i = \overline{1,3}$  (см. рис. 7) в областях  $\Omega_{c,i}$ , поскольку они являются наиболее важными, а решения  $\phi$  здесь приводить не будем.

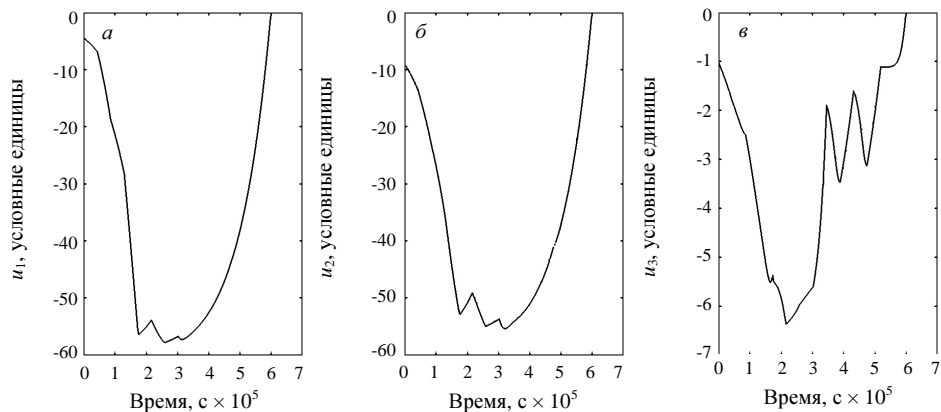


Рис. 7. Графики управления для трех областей: а –  $u_1(t)$ ; б –  $u_2(t)$ ; в –  $u_3(t)$ .

Отметим, что в отличие от предыдущего эксперимента здесь управление по модулю меньше приблизительно в два раза, т.е. тушить пожар нужно с меньшей интенсивностью. Это связано с тем, что отрезок осреднения был взят больший, чем в предыдущем случае. Следовательно, можно сделать предположение: чем больше времени нужно на уменьшение концентрации, тем менее интенсивно надо тушить пожар (что также является ожидаемым и логичным результатом). Средняя концентрация загрязнения после управления стала равной  $\bar{\phi} \approx 1,5$ . Как и предполагалось, уменьшить ее до  $\phi_{obs} = 0$  не удалось, но она стала меньше по сравнению с той, что была получена в результате первого эксперимента.

Эксперимент 3. Берем тот же отрезок осреднения, что и в первом эксперименте. Средняя концентрация загрязнения без управления по-прежнему  $\bar{\phi} \approx 22,7$ . Но в этом эксперименте, в отличие от первых двух,  $\bar{\phi}$  приближалась к различным  $\phi_{obs}$ . Результаты приведены ниже в таблице на рис. 8.

Таблица. Зависимость  $\bar{\phi}$  после управления и  $J_\alpha$  от  $\phi_{obs}$ .

$\phi_{obs}$	0,00	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00
$\bar{\phi}$	2,50	4,06	5,77	7,47	9,18	10,89
$J_\alpha$	3,13	2,12	1,57	1,08	0,69	0,39

Из данных, приведенных в таблице, и рис. 8 делаем следующий вывод: чем больше желаемое  $\phi_{obs}$  (т. е., чем больше допустимая норма загрязнений), тем меньше функционал. Иными словами, чем менее чистый воздух допускается в нижних слоях исследуемой области, тем проще решить задачу минимизации концентрации загрязнений.



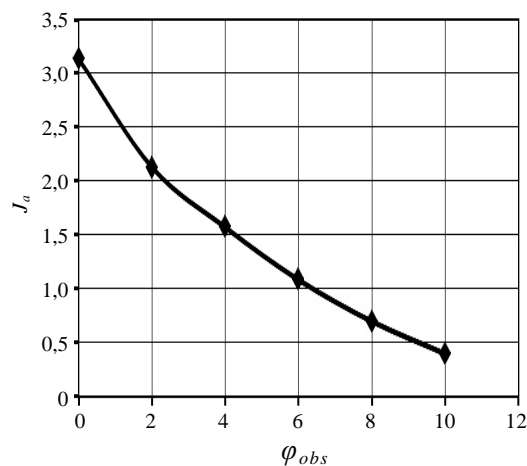


Рис. 8. Зависимость  $J_\alpha$  от  $\varphi_{obs}$ .

Итак, в данной части работы приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующие возможность применения алгоритма 1 для решения некоторого класса задач, а также подтверждены основные теоретические положения, полученные при исследовании задачи. Отметим также, что наличие такого свойства как «плотная разрешимость» задачи не должно здесь переоцениваться. Присутствие этого свойства позволяет подобрать управления, при которых  $J_0 = 0$ . Однако

необходимо помнить, что при этом получаемые управления могут быть, вообще говоря, «нефизичными». Результаты настоящей работы направлены, прежде всего, на выявление тех подобластей, в которых необходимо устранять источники загрязнений в первую очередь. Поэтому, при решении практических задач может оказаться целесообразным вводить ограничения на управления или привлекать другого типа управления, определенные в рассматриваемой области распространения загрязнений, на боковых границах области и др.

Можно предположить, что результаты работы могут быть использованы для расчета ресурсов МЧС (Министерство чрезвычайных ситуаций), необходимых для уменьшения концентрации загрязнения в охраняемой части рассматриваемого региона.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алоян А.Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере / Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2002. – 201 с.
2. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Л.: Гидрометеоздат, 1975. – 448 с.
3. Аргучинцев В.К., Аргучинцева А.В. Моделирование мезомасштабных гидротермодинамических процессов и переноса антропогенных примесей в атмосфере и гидросфере региона оз. Байкал. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2007. – 255 с.
4. Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. – М.: Институт вычислительной математики РАН, 2003. – 256 с.
5. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1981. – 456 с.

Материал поступил в редакцию 25.10.2012 г.

*АНОТАЦІЯ* Проблема забруднення навколишнього середовища є однією з актуальних проблем екології. В роботі запропоновано метод розв'язку задачі мінімізації концентрації забруднення від пожеж в регіоні. При тестуванні метода, використовувались дані на літо 2010, в Московській області. Через ефект місцевості джерел забруднення, ця задача є некоректною, тому використовувалася регуляризація Тихонова. Основою для прийняття рішення є метод «двоїстого» представлення квадратичного функціонала відхилю. Це уявлення використовується для подальшого дослідження і побудови алгоритмів.

*ABSTRACT* Environment pollution is one of actual ecological problems. A method of solving the problem of minimization pollutants concentration from fires into a region is proposed in this paper. When testing the method the data over summer 2010 into Moscow region were used. The problem is incorrect by local sources, so Tikhonov regularization was applied. The method of solving the problem is based on quadratic functional dual representation. This representation is then used for further researches and solving algorithms construction.