УДК 336.71

Володимир КАПУСТЯН
доктор фізико-математичних наук, професор,
НТУУ «КПІ»

Андрій ДРОЗД
аспірант кафедри ММЕС ,
НТУУ «КПІ»

ОПТИМАЛЬНІ КРЕДИТНІ ТА ДЕПОЗИТНІ СТАВКИ ДВОПРОДУКТОВОГО КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ

У статті запропоновано модель для опису діяльності банку, який пропонує на фінансовому ринку два кредитних та два депозитних продукти. Сформульовано задачу пошуку оптимального керування кредитними та депозитними ставками для максимізації прибутку банку та знайдено її розв'язок за умови відсутності запізнення у термінах повернення кредитів та депозитів, а також за умови незалежності попиту між продуктами.

Ключові слова: *комерційний банк, багатопродуктовий банк, кредити, депозити, оптимальне керування, максимізація прибутку, максимізація капіталу, потокова модель банку.*

Банки є специфічним видом фірми, а в сукупності банківська система має значний вплив на функціонування економіки держави. Важливим є глибоке розуміння принципів їх діяльності, а відтак актуальною є задача моделювання банківської діяльності як загалом, так і детального дослідження окремих її аспектів.

Типовим підходом у моделюванні банку є розгляд кредитної та депозитної діяльності через один продукт за умови, що банк надає лише один вид кредиту під певну кредитну ставку та термін та лише один вид депозиту під певну депозитну ставку та термін. Звичайно, на практиці банки мають більше ніж один продукт, тому моделі такого типу не дають опису поведінки багатопродуктових банків.

Одним з підходів до моделювання банків та банківської діяльності є використання потокової моделі банку, де фінансовий потік є певним об'ємом коштів за одиницю часу.

Потокова модель банку має певні особливості. Потоки в моделі неперервні. Кошти, які надійшли одним із вхідних потоків, можуть бути використані для формування вихідного потоку іншого типу. Тобто, увійшовши до банку, гроші уже не прив'язані до відповідного вхідного потоку та змішуються у єдину грошову масу, яка може бути використана для формування кожного із вихідних потоків у довільних пропорціях. Потокова модель банку зручна для розгляду різноманітних задач з точки зору теорії керування.

Однак потокова модель банку також розглядає кредитну та депозитну діяльність банку через один продукт. У цій статті автор пропонує розширення моделі до матричного представлення, що дає змогу описати оптимальне керування кредитною та депозитною діяльністю банку, що має по два кредитних та депозитних продукти за умов незалежності попиту та пропозиції на ці продукти.

Моделюванням банківської діяльності з точки зору теорії керування та за допомогою потокових моделей займалися О. Гришин [1-2; 13], В. Іваненко [1;13], Д. Козак [1], О. Куц [13], Д. Осіпенко [14], А. Умрик [1]. Також цю проблематику досліджували автори в попередніх працях [3-12].

У роботі О. Гришин [1] було запропоновано розглядати банк з точки зору теорії керування, а в праці [2] було описано деякі вхідні та вихідні потоки банку. Д. Осіпенко [14] розглядав потокову модель, яку автор називає динамічною з лінійними функціями кредитів та депозитів та постановкою задачі оптимального керування кредитною та депозитною ставкою за умови, що всі залучені депозити видаються як кредити. У роботі В. Іваненко та ін. [13] було описано потокову модель з лінійними функціями кредитів та депозитів, які враховували невизначеність в обсягах депозитів та кредитів. У дослідженні [3] було запропоновано використовувати програмну реалізацію потокової моделі для навчання працівників банку. Існують також інші підходи, наприклад, до потокової моделі банку були додані рекламні витрати та притік депозитів унаслідок реклами ([4]); за допомогою чисельних методів отримано графіки розподілу обсягів повернених кредитів за умови, що термін повернення виданих кредитів був випадковою величиною ([5]); аналітично визначено оптимальна кредитна ставка банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що банк має вдосталь власного капіталу для здійснення кредитної діяльності навіть без залучення депозитів (функціонує, як кредитна фірма) [6]; встановлено оптимальну кредитну ставку для банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що він не здійснює депозитну діяльність і що його власний капітал може бути будь-яким, у тому числі і недостатнім для видачі обсягу кредитів, на який є попит[7]; отримано оптимальну кредитну та депозитну ставки банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що банк має вдосталь власного капіталу для здійснення кредитної діяльності навіть без залучення депозитів, але при цьому здійснює і депозитну діяльність [9]. У роботі [8] було порівняно результати, отримані в [6] та [9], та зроблено висновок про необхідність модифікації потокової моделі, щоб вона враховувала залежність між активами та пасивами банку. Праця [10] доводить, що оптимальне керування відрізняється залежно від вигляду функції попиту на кредити. Дослідження [11] доводить, що на основі потокової моделі було розглянуто парадокс Бертрана та запропоновано можливе пояснення його виникнення, проведено паралелі із банківською діяльністю. У роботі [12] потокова модель побудована на основі експоненціальних функцій попиту на кредити та пропозиції депозитів.

Постановка задачі.

Оптимальне керування основною діяльністю комерційного банку (у формі встановлення оптимальних кредитної та депозитної ставок) з метою максимізації його власного капіталу на кінець періоду керування. Необхідно розглянути і врахувати диференціацію кредитних та депозитних продуктів для двох кредитних та двох депозитних продуктів.

Методика.

Для вирішення задачі було використано двоконтурну потокову модель банку, описану в [5].

Відповідно до цієї потокової моделі, банк описують як певний об’єкт, у який входять і з якого виходять певні потоки грошей. Враховуючи лише кредитно-депозитні потоки, надамо рівнянню капіталу банку наступного вигляду:

$$x_1(t)=x_1(t_0)+\int_{t_0}^{t}(-K(t)+K(t-T_k)\cdot u_k(t-T_k)+D(t)-D(t-T_d)\cdot u_d(t-T_d))\mathrm{d}t \tag{1}$$

де

$K(t)$ - об’єм виданих кредитів на момент часу t;

T_k - інтервал часу на який видаються кредити;

$u_k(t)$ - процентна ставка по кредиту на момент часу t;

$D(t)$ - об’єм залучених депозитів на момент часу t;

T_d - інтервал часу, на який залучаються депозити;

$u_d(t)$ - процентна ставка по депозиту на момент часу t;

Автори зазначають, що з загальних міркувань цілком очевидно, що зі збільшенням кредитної процентної ставки кредитний потік зменшиться. Аналогічно, зі збільшенням депозитної процентної ставки депозитний потік збільшується.

З огляду на це ми пропонуємо такий вигляд функції попиту для кредитів:

$$K(t)=K_0-b\cdot u_k(t)+\xi_k(t), \tag{2}$$

де K_0 – попит на кредит при нульовій ставці проценту; K_0 характеризує загальний потенціал ринку щодо цієї послуги ($K_0>0$); b – коефіцієнт, який показує, на скільки грошових одиниць зменшиться кредитний попит при збільшенні ставки відсотка на 1 % ($b\geq 0$); $\xi_k(t)$ – деяка випадкова величина;

Аналогічно функція пропозиції для депозитів:

$$D(t)=D_0+a\cdot u_d(t)+\xi_d(t) \tag{3}$$

де D_0 – попит на депозит при нульовій ставці проценту; коефіцієнт a показує, на скільки грошових одиниць збільшиться депозитний попит при збільшенні ставки відсотка на 1% ($a\geq 0$ □). $\xi_d(t)$ – деяка випадкова величина.

$\xi_k(t),\xi_d(t),-c\leq\xi_i\leq c, i=(k,d)$ - випадкові величини, які відображають невизначеність залежності попиту від процентної ставки.

Враховуючи вищеописане, отримаємо рівняння стану комерційного банку в такому вигляді:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t)=-(K_0-b\cdot u_k(t)+\xi_k(t))+(K_0-b\cdot u_k(t-T_k)+\xi_k(t-T_k))\cdot(1+u_k(t-T_k))\\+(D_0+a\cdot u_d(t)+\xi_d(t))-(D_0+a\cdot u_d(t-T_d)+\xi_d(t-T_d))\cdot(1+u_d(t-T_d))\\x_1(t_0)=x_0\end{gathered} \tag{4}$$

Процентний дохід як різниця отриманих процентів від кредитів і виплачених процентів за депозити отримаємо в наступному вигляді:

$$\begin{gathered}x_2(t)=\int_{t_0}^{t}(K_0-b\cdot u_k(\tau-T_k)+\xi_k(\tau-T_k))\cdot u_k(\tau-T_k)-\\-(D_0+a\cdot u_d(\tau-T_d)+\xi_d(\tau-T_d))\cdot u_d(\tau-T_d)\mathrm{d}\tau\end{gathered} \tag{5}$$

На основі цієї моделі будемо проводити наше дослідження.

Результати дослідження

Розширимо модель до матричного представлення. Припустимо, що наявна диференціація строків видачі кредитів та залучення депозитів двох термінів.

Вхідний депозитний потік у потоковій моделі банку мав вигляд:

$$D_{in}(t)=D+a\cdot u_D(t) \tag{6}$$

Припустімо, існують два вхідних потоки, що відрізняються терміном, на який банком залучається депозит, депозитною ставкою та різними коефіцієнтами функцій пропозиції таких депозитів. При цьому вважатимемо, що вони між собою незалежні. Аналогічно до вищенаведеної формули запишемо їх так:

$$\begin{gathered}D_{in1}(t)=D_1+a_1\cdot u_{D1}(t)\\D_{in2}(t)=D_2+a_2\cdot u_{D2}(t)\end{gathered} \tag{7}$$

Або, враховуючи депозитну ставку (керування) іншого продукту:

$$\begin{gathered}D_{in1}(t)=D_1+a_1\cdot u_{D1}(t)+0\cdot u_{D2}(t)\\D_{in2}(t)=D_2+0\cdot u_{D1}(t)+a_2\cdot u_{D2}(t)\end{gathered} \tag{8}$$

Побудуємо матрицю вхідного потоку від депозитів — обсяги залучених депозитів для двох депозитних продуктів:

$$D_{in}(t)=\begin{pmatrix}D_{in1}(t) & 0\\ 0 & D_{in2}(t)\end{pmatrix} \tag{9}$$

Матриця попиту на депозити при нульовій ставці процента:

$$D=\begin{pmatrix}D_1 & 0\\ 0 & D_2\end{pmatrix} \tag{10}$$

Матриця еластичностей пропозиції депозитів для двох депозитних продуктів:

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix} \tag{11}$$

Матриця керуючих впливів — депозитних ставок для двох депозитних продуктів:

$$u_D(t)=\begin{pmatrix}u_{D1}(t) & 0\\ 0 & u_{D2}(t)\end{pmatrix} \tag{12}$$

Таким чином, формула обсягу залежності обсягів залучених депозитів за допомогою двох депозитних продуктів від відповідних депозитних ставок у матричному вигляді:

$$D_{in}(t)=D+a\cdot u_D(t) \tag{13}$$

Підставимо у неї відповідні матриці:

$$\begin{pmatrix} D_{in1}(t) & 0 \\ 0 & D_{in2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{D1}(t) & 0 \\ 0 & u_{D2}(t) \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} D_{in1}(t) & 0 \\ 0 & D_{in2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \cdot u_{D1}(t) + 0 \cdot 0 & a_1 \cdot 0 + 0 \cdot u_{D2}(t) \\ 0 \cdot u_{D1}(t) + a_2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + a_2 \cdot u_{D2}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_{in1}(t) & 0 \\ 0 & D_{in2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \cdot u_{D1}(t) & 0 \\ 0 & a_2 \cdot u_{D2}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_{in1}(t) & 0 \\ 0 & D_{in2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 + a_1 \cdot u_{D1}(t) & 0 + 0 \\ 0 + 0 & D_2 + a_2 \cdot u_{D2}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_{in1}(t) & 0 \\ 0 & D_{in2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 + a_1 \cdot u_{D1}(t) & 0 \\ 0 & D_2 + a_2 \cdot u_{D2}(t) \end{pmatrix}$$

Аналогічно для вихідних депозитних потоків із фіксованим запізненням формула залежності вихідного депозитного потоку від депозитної ставки виглядала так:

$$D_{out}(t) = D_{in}(t - t_D) \cdot (1 + u_D(t - t_D))$$
$$D_{out}(t) = (D + a \cdot u_D(t - t_D)) \cdot (1 + u_D(t - t_D)) \quad (15)$$

Побудуємо матрицю вихідного потоку від депозитів — обсяги повернених депозитів для двох депозитних продуктів:

$$D_{out}(t) = \begin{pmatrix} D_{out1}(t) & 0 \\ 0 & D_{out2}(t) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Підставимо у рівняння для вихідного депозитного потоку відповідні матриці:

$$D_{out}(t) = D_{in}(t - t_D) \cdot (1 + u_D(t - t_D)) \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} D_{out1}(t) & 0 \\ 0 & D_{out2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 + a_1 \cdot u_{D1}(t - t_{D1}) & 0 \\ 0 & D_2 + a_2 \cdot u_{D2}(t - t_{D2}) \end{pmatrix} \cdot \left(1 + \begin{pmatrix} u_{D1}(t - t_{D1}) & 0 \\ 0 & u_{D2}(t - t_{D2}) \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} D_{out1}(t) & 0 \\ 0 & D_{out2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 + a_1 \cdot u_{D1}(t - t_{D1}) & 0 \\ 0 & D_2 + a_2 \cdot u_{D2}(t - t_{D2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + u_{D1}(t - t_{D1}) & 0 \\ 0 & 1 + u_{D2}(t - t_{D2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_{out1}(t) & 0 \\ 0 & D_{out2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_1 + a_1 \cdot u_{D1}(t - t_{D1})) \cdot (1 + u_{D1}(t - t_{D1})) & 0 \\ 0 & (D_2 + a_2 \cdot u_{D2}(t - t_{D2})) \cdot (1 + u_{D2}(t - t_{D2})) \end{pmatrix}$$

Звідси отримуємо залежності обсягів повернених депозитів по кожному з депозитних продуктів залежно від їх депозитних ставок.

$$D_{out1}(t) = (D_1 + a_1 \cdot u_{D1}(t - t_{D1})) \cdot (1 + u_{D1}(t - t_{D1}))$$
$$D_{out2}(t) = (D_2 + a_2 \cdot u_{D2}(t - t_{D2})) \cdot (1 + u_{D2}(t - t_{D2})) \quad (18)$$

Аналогічні операції проведемо і для вихідних кредитних потоків. Вихідна формула для одного потоку:

$$K_{out}(t) = K - b \cdot u_K(t) \quad (19)$$

Аналогічні формули для двох потоків:

$$K_{out1}(t) = K_1 - b_1 \cdot u_{K1}(t)$$
$$K_{out2}(t) = K_2 - b_2 \cdot u_{K2}(t) \quad (20)$$

Матриця вихідних кредитних потоків:

$$K_{out}(t) = \begin{pmatrix} K_{out1}(t) & 0 \\ 0 & K_{out2}(t) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Матриця пропозиції кредитів при нульовій ставці процента:

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Матриця коефіцієнтів:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Матриця керуючих впливів:

$$u_K(t)=\begin{pmatrix} u_{K1}(t) & 0 \\ 0 & u_{K2}(t) \end{pmatrix} \quad (24)$$

Вихідні кредитні потоки в матричному вигляді:

$$K_{out}(t)=K-b\cdot u_K(t) \quad (25)$$

Підставимо у рівняння для вихідного кредитного потоку відповідні матриці:

$$\begin{pmatrix} K_{out1}(t) & 0 \\ 0 & K_{out2}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_{K1}(t) & 0 \\ 0 & u_{K2}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{out1}(t) & 0 \\ 0 & K_{out2}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K_1-b_1\cdot u_{K1}(t) & 0 \\ 0 & K_2-b_2\cdot u_{K2}(t) \end{pmatrix} \quad (26)$$

Аналогічні операції проведемо для вхідних потоків. Формула кредитного вхідного потоку при одній ставці процента за кредитами:

$$K_{in}(t)=K_{out}(t-t_K)\cdot(1+u_K(t-t_K)) \quad (27)$$

Побудуємо матрицю вхідного потоку від кредитів — обсяги повернених кредитів від двох кредитних продуктів:

$$K_{in}(t)=\begin{pmatrix} K_{in1}(t) & 0 \\ 0 & K_{in2}(t) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Підставимо у рівняння для вхідного кредитного потоку відповідні матриці:

$$K_{in}(t)=K_{out}(t-t_K)\cdot(1+u_K(t-t_K)) \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} K_{in1}(t) & 0 \\ 0 & K_{in2}(t) \end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_{K1}(t-t_{K1}) & 0 \\ 0 & u_{K2}(t-t_{K2}) \end{pmatrix}\right]\cdot\left(1+\begin{pmatrix} u_{K1}(t-t_{K1}) & 0 \\ 0 & u_{K2}(t-t_{K2}) \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} K_{in1}(t) & 0 \\ 0 & K_{in2}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K_1-b_1\cdot u_{K1}(t-t_{K1}) & 0 \\ 0 & K_2-b_2\cdot u_{K2}(t-t_{K2}) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+u_{K1}(t-t_{K1}) & 0 \\ 0 & 1+u_{K2}(t-t_{K2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{in1}(t) & 0 \\ 0 & K_{in2}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (K_1-b_1\cdot u_{K1}(t-t_{K1}))\cdot(1+u_{K1}(t-t_{K1})) & 0 \\ 0 & (K_2-b_2\cdot u_{K2}(t-t_{K2}))\cdot(1+u_{K2}(t-t_{K2})) \end{pmatrix}$$

Звідси отримуємо залежності обсягів повернених депозитів по кожному з депозитних продуктів залежно від їх депозитних ставок:

$$\begin{aligned} K_{in1}(t)&=(K_1-b_1\cdot u_{K1}(t-t_{K1}))\cdot(1+u_K(t-t_{K1})) \\ K_{in2}(t)&=(K_2-b_2\cdot u_{K2}(t-t_{K2}))\cdot(1+u_K(t-t_{K2})) \end{aligned} \quad (30)$$

Виведемо рівняння приросту капіталу банку:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)&=K_{in}(t)—K_{out}(t)+D_{in}(t)-D_{out}(t)= \quad (31) \\ &=(K-b\cdot u_K(t-t_K))\cdot(1+u_K(t-t_K))-(K-b\cdot u_K(t))+(D+a\cdot u_D(t))- \\ &-(D+a\cdot u_D(t-t_D))\cdot(1+u_D(t-t_D))= \\ &=K+K\cdot u_K(t-t_K)-b\cdot u_K(t-t_K)-b\cdot u_K^2(t-t_K)-K+b\cdot u_K(t)+ \\ &+D+a\cdot u_D(t)-D-D\cdot u_D(t-t_D)-a\cdot u_D(t-t_D)-a\cdot u_D^2(t-t_D)= \\ &=(K-b)\cdot u_K(t-t_K)-b\cdot u_K^2(t-t_K)+b\cdot u_K(t)+a\cdot u_D(t)-(a+D)\cdot u_D(t-t_D)-a\cdot u_D^2(t-t_D) \end{aligned}$$

Рівняння приросту капіталу банку матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)&=(K-b)\cdot u_K(t-t_K)-b\cdot u_K^2(t-t_K)+b\cdot u_K(t)+ \\ &+a\cdot u_D(t)-(a+D)\cdot u_D(t-t_D)-a\cdot u_D^2(t-t_D) \end{aligned} \quad (32)$$

Таким чином, задача оптимального керування кредитною та депозитною ставками комерційного банку з метою максимізації його капіталу на кінець періоду керування формулюється так:

$$\begin{gathered} x(T)\to\max_{u_K(t),u_D(t)}, \\ \dot{x}(t)=(K-b)\cdot u_K(t-t_K)-b\cdot u_K^2(t-t_K)+b\cdot u_K(t)+ \\ +a\cdot u_D(t)-(a+D)\cdot u_D(t-t_D)-a\cdot u_D^2(t-t_D), \\ x(0)=x_0, \\ u_K(t)\geq 0, \\ u_K(t)=u_{K0}(t) \quad при \quad -t_K\leq t\leq 0 \end{gathered} \quad (33)$$

$$u_D(t) \geq max\left(0;-\frac{D}{a}\right),$$

$$u_D(t) = u_{D0}(t) \quad при \quad -t_D \leq t \leq 0$$

$$0 \leq t \leq T \ .$$

Ця задача розв’язується за допомогою імітаційного моделювання або шляхом комп’ютерних обчислень за допомогою чисельних методів.

Покажемо її аналітичний розв’язок для часткового випадку, що не враховує запізнення ($t_D = t_K = 0$).

Вважатимемо, що строк вкладання депозитів рівний нулю $t_D = 0$ та строк, на який видаються кредити, рівний нулю $t_K = 0$, при цьому диференціація двох продуктів полягатиме лише в різних розмірах кредитної та депозитної ставок та різних коефіцієнтах функцій попиту на кредити та пропозиції депозитів.

Тоді задача набуде вигляду:

$$
\begin{gathered}
x(T) \to \max_{u_K(t), u_D(t)} , \\
\dot{x}(t) = K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2 \ , \\
x(0) = x_0 \ , \\
u_K(t) \geq 0 \ , \\
u_D(t) \geq max\left(0;-\frac{D}{a}\right), \\
0 \leq t \leq T \ .
\end{gathered}
\tag{34}
$$

За припущення, що кредитні та депозитні продукти незалежні, можемо знайти оптимальні кредитні та депозитні ставки кожного з продуктів незалежно один від одного. Для такої задачі в [9] були отримані оптимальна кредитна та депозитна ставки, із урахуванням двох кредитних та депозитних продуктів вони мають вигляд:

$$
\begin{gathered}
u_{Ki}(t) = \frac{K_i}{2 \cdot b_i}, \quad i = \overline{1,2} \\
u_{Di}(t) = max\left(0;-\frac{D_i}{a_i}\right), \quad i = \overline{1,2}
\end{gathered}
\tag{35}
$$

За таких оптимальних кредитних та депозитних ставок оптимальні обсяги залучених депозитів та виданих кредитів становитимуть:

$$
\begin{gathered}
K_{outi}(t) = \frac{K_i}{2,} \quad i = \overline{1,2} \\
D_{in \ i}(t) = max(0, D_i), \quad i = \overline{1,2}
\end{gathered}
\tag{36}
$$

А максимальний процентний дохід, що перевкладається у капітал:

$$\dot{x}_i(t) = \frac{K_i^2}{4 \cdot b_i}, \quad i = \overline{1,2} \tag{37}$$

Тоді максимальний капітал банку на кінець періоду керування становитиме:

$$x(T) = x_0 + \frac{K_1^2}{4 \cdot b_1} \cdot T + \frac{K_2^2}{4 \cdot b_2} \cdot T \tag{38}$$

або

$$x(T) = x_0 + \sum_{i=1}^{2} \frac{K_i^2}{4 \cdot b_i} \cdot T \ . \tag{39}$$

Було запропоновано потокову модель комерційного банку, що враховує наявність диференціації депозитних та кредитних продуктів, а саме - двох кредитних та двох депозитних продуктів. Для випадку відсутності запізнення у термінах повернення кредитів та депозитів було отримано оптимальні кредитну та депозитну ставки, максимальний прибуток банку та максимальний капітал на кінець періоду керування. Ця модель може використовуватись для невеликих банків, що мають лише два продукти та для подальшого дослідження, наприклад оптимального керування кредитною та депозитною ставкою для довільного числа продуктів, для дослідження випадку, коли попит та пропозиція на два чи більше банківські продукти впливає на інший продукт.

Список літератури

1. *Постановка задачи оптимизации управления коммерческим банком [Текст] / А. Г. Гришин, Д. В. Козак, А. В. Умрик, В. И. Иваненко // Вестник Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”. – Х.: 2001. – Ч. 2. – С. 154-157.*
2. *Гришин, О. Г. Стратегічне планування та керування діяльністю банківської установи на основі математичної моделі комерційного банку [Текст] / О. Г. Гришин // Економіка та підприємництво. – К.: КНЕУ, 2004. – Випуск 12. – С. 261-266.*
3. *Дрозд, А. О. Моделювання кредитного ризику в потоковій моделі банку [Текст] / А. О. Дрозд, В. О. Капустян // Сучасні проблеми економіки і підприємництва : збірник наукових праць. – Київ.: ВПК «Політехніка», 2010. – Випуск 5. – Ч. 2. – С. 103-105.*
4. *Дрозд, А. О. Ефективне керування рекламними витратами банку [Текст] / А. О. Дрозд, В. О. Капустян // Економіка та держава. – 2010. – № 6. – С. 65-67.*
5. *Дрозд, А. О. До впливу невизначеності у термінах повернених кредитів на грошовий потік банку [Текст] / А. О. Дрозд,*

В. О. Капустян // Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці : матеріали II міжнародної науково-методичної конференції. – Чернівці: «ДрукАрт», 2011. – С. 109-110.
6. Дрозд, А. О. До питання керування кредитною діяльністю банку [Текст] / А. О. Дрозд, В. О. Капустян // Проблеми економічної кібернетики : матеріали XVI всеукраїнської науково-методичної конференції. Том 2. – Одеса: ОНПУ, 2011. – С. 105-106.
7. Дрозд, А. О. Керування кредитною ставкою комерційного банку з метою максимізації прибутку [Текст] / А. О. Дрозд // Економіко-соціальні аспекти реформування та розвитку України : збірник матеріалів міжнародної науково-практичної конференції. – Київ: КЕНЦ, 2011. – С. 80-82.
8. Дрозд, А. О. Порівняння керування кредитною та кредитно-депозитною діяльністю банку з капіталом, достатнім для задоволення максимального попиту на кредити [Текст] / А. О. Дрозд // Теорія і практика економічного аналізу: сучасний стан, актуальні проблеми та перспективи розвитку : збірник тез V міжнародної науково-практичної конференції. – Тернопіль: СМП «Тайп», 2011. – С. 96-98.
9. Дрозд, А. О. Керування основною діяльністю банку із власним капіталом, достатнім для задоволення максимального попиту на кредити [Текст] / А. О. Дрозд // Матеріали II Міжнародної конференції молодих вчених ЕМ-2011. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. – С. 244-245.
10. Дрозд, А. О. До аналізу оптимального керування кредитною ставкою комерційного банку за різних функцій попиту на кредити [Текст] / А. О. Дрозд // Збірник тез доповідей XIV Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2011. – С. 111-112.
11. Дрозд, А. О. Парадокс Бертрана в потоковій моделі банку [Текст] / А. О. Дрозд // Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції «Моделювання та прогнозування економічних процесів». – Київ: НТУУ «КПІ», 2011. – С. 7.
12. Дрозд, А. О. Огляд питання невизначеності в термінах погашення кредитів [Текст] / А. О. Дрозд // Матеріали VII Міжнародної конференції «Науково-технічний розвиток: економіка, технології, управління». – Київ: НТУУ «КПІ», 2008. – С. 238.
13. Іваненко, В. І. До управління фінансами в комерційних банках [Текст] / В. І. Іваненко, О. В. Куц, О. Г. Гришин // Моделювання та інформаційні системи в економіці. Випуск 84. – К.: КНЕУ, 2011. – С. 220-229.
14. Осипенко, Д. В. Динамічна модель комерційного банку [Текст] / Д. В. Осипенко // Фінанси України. – 2005. – №11. – С. 87-92.
15. Про банки і банківську діяльність [Текст] : закон України за станом на 7 груд. 2000 р. / Верховна Рада України. — Офіц. вид. — К. : Відомості Верховної Ради України, 2009. – №15. – 190 с. – (Бібліотека офіційних видань).

РЕЗЮМЕ

Капустян Владимир, Дрозд Андрей

Оптимальные кредитные и депозитные ставки двопродуктового коммерческого банка

В статье предложена модель для описания деятельности банка, который предлагает на финансовом рынке два кредитных и два депозитных продукты. Сформулирована задача поиска оптимального управления кредитными и депозитными ставками для максимизации прибыли банка и найдено ее решение при отсутствии опоздание сроках возврата кредитов и депозитов, а также при условии независимости спроса между продуктами.

RESUME

Kapustyan Volodymyr, Drozd Andriy

Best credit and deposit rates of two product commercial bank

The paper proposes a model for the description of the bank that offers financial market of two credit and two deposit products. The problem of finding the optimal management of credit and deposit rates to maximize profits of the bank is formulated. There has been found out solution of the problem in the absence of delay in repayment terms of loans and deposits. .

Стаття надійшла до редакції 29.11.2012 р.