

## ПЕРІОДИЧНА VALUE AT RISK

*Стаття присвячена розрахунку та дослідженню властивостей одного з показників ризик-менеджменту — періодичної Value at Risk (VaR). Показано, що «наївна» ануалізація VaR не є коректною. Запропонована формула розрахунку періодичної VaR дозволяє скоротити похибку оцінювання з 25% до 16% для VaR 5% та з 34% до 24% для VaR 1%.*

**Ключові слова:** управління ризиками, Value at Risk, розподіл дохідності активів.

Value at Risk (VaR) є одним з ключових показників при управлінні ризиками. Зазвичай розраховують щоденну VaR або по вибіркових статистиках щоденної дохідності, або за допомогою методу Монте-Карло. Але якщо горизонт інвестування не дорівнює одному дню, то ступені дохідності та ризику слід рахувати за відповідний період, таким чином замість щоденної VaR слід використовувати періодичну. Тому розробка математичного апарату переходу від щоденної VaR до періодичної та вивчення властивостей останньої є актуальною задачею сучасної фінансової теорії.

Серед праць, присвячених визначенню, розрахунку та застосуванню VaR, можна виділити роботи Джоріона [1], Даффі [2], Артцнера [3]. У праці [1] детально розглянуто методи розрахунку щоденної VaR та її застосування у ризик-менеджменті, також автор торкається питання періодизації VaR, хоча, як буде показано нижче, його підхід не є беззаперечним. У роботах [2] та [3] висвітлені різні підходи визначення VaR, дещо відмінні від застосованих у [1]. Автори також розширюють поняття VaR та вводять деякі інші показники, такі, як очікуваний збиток у хвості розподілу (tail VaR), найгірший умовний очікуваний збиток (worst conditional expectation) тощо. Але усі ці дослідження стосуються насамперед щоденної VaR, дослідження періодичної VaR не набули великої популярності. З іншого боку, теорія управління портфелем підкреслює важливість визначення показників дохідності та ризику та горизонті інвестування, як вказано у [4].

Метою дослідження є розробка періодичної міри ризику — періодичної VaR. Завдання дослідження: 1) вивести формули розрахунку періодичної VaR, 2) дослідити властивості періодичної VaR, 3) перевірити відповідність теоретичних значень VaR фактичним значенням, розрахованим за ринковими цінами.

Відповідно до визначення, наведеного Джоріоном, «VaR — це максимальний збиток на визначеному горизонті інвестування, такий, що є лише низька задана наперед ймовірність того, що фактичний збиток перевищить це значення» [1, с. 246]. Як можна побачити з цього визначення, автор не обмежується горизонтом інвестування в один день, а дає загальне визначення VaR, і щоденна VaR є лише окремим його випадком. Закладаючи інший горизонт інвестування, ми отримуємо періодичну VaR, таким чином, необхідності в окремому визначенні цього поняття немає. Відповідно, розраховувати періодичну VaR можна також користуючись цим визначенням. Чому ж виникає проблема переходу від щоденної VaR до

періодичної?

На практиці застосовуються вибірки дохідності, розраховані за цінами закриття кожного торгового дня, тобто вибірки щоденної дохідності. Розраховані за цими вибірками статистики є щоденними, таким чином вони підходять саме для розрахунку щоденної VaR. Саме тому цей показник оцінки ризику і набув такої великої популярності. Хоча банки, відповідно до Базель II, також розраховують VaR за 10 днів, вибірки дохідностей за довші періоди та, відповідно, пряме визначення періодичної VaR зазвичай не використовуються. З іншого боку, практика управління портфелем інвестицій вимагає визначення таких показників ризику, які відповідають горизонту інвестування: «Прикладами абсолютних цілей по ризику є не втратити капітал або не втратити більше, ніж заданий відсоток капіталу протягом будь-якого 12-місячного періоду» [4, с. 452]. Остання ціль відповідає визначенню періодичної VaR за 12 місяців.

Проблема переходу від щоденної VaR до періодичної виникає саме через невідповідність наявних ринкових даних та вибіркових статистик (заданих для коротких періодів, зазвичай щоденних) та довгострокових цілей по ризику при управлінні портфелем (зазвичай, заданих на періоді 12 місяців). Джоріон у [1] пропонує переходити від щоденної до періодичної VaR у такий самий спосіб, як це робиться при ануалізації стандартного відхилення:

$$VAR_p = VAR_d \sqrt{T}, \quad (1)$$

де  $VAR_p$  та  $VAR_d$  — відповідно періодична та щоденна VaR,  $T$  — довжина періоду (у днях).

Формула (1) впливає з того визначення VaR, яке застосовує Джоріон, а саме - з визначення збитку як різниці між початковою вартістю портфеля та математичним очікуванням його кінцевої вартості. Тоді VaR дорівнює стандартному відхиленню дохідності, помноженому на квантіль розподілу. Але для більшості інвесторів природним є визначення збитку як різниці між початковою та кінцевою вартістю портфеля, саме це визначення використовується у стандартах фінансової звітності, при оподаткуванні, воно також наведено у [3, с. 215]:

$$VAR(\alpha) = -\mu - \sigma \Phi^{-1}(\alpha), \quad (2)$$

де  $\mu$  — математичне очікування дохідності,  $\sigma$  — стандартне відхилення дохідності,  $\Phi$  — кумулятивна функція стандартного розподілу (зазвичай використовується нормальний розподіл),  $\alpha$  — задана

ймовірність. У подальшому позначимо  $\alpha$ -квантілі через  $\phi = \Phi^{-1}(\alpha)$ .

Якщо прийняти незалежність щоденних дохідностей (а таке припущення є типовим як при управлінні портфелем, так і у ризик-менеджменті), то періодична очікувана дохідність та її стандартне відхилення розраховуються з щоденних як

$$\begin{aligned} \mu_p &= \mu_d T, \sigma_p = \sigma_p \sqrt{T} \\ \text{VAR}_p &= -\mu_p - \phi \sigma_p = -\mu_d T - \phi \sigma_d \sqrt{T} = -\sqrt{T}(\mu_d + \phi \sigma_d) - \mu_d(T - \sqrt{T}) = \\ &= \text{VAR}_d \sqrt{T} - \mu_d(T - \sqrt{T}) \end{aligned} \quad (2)$$

Зазначимо наступні властивості періодичної VaR, які впливають з цієї формули:

«наївна» ануалізація VaR у такий самий спосіб, як стандартного відхилення, не є коректною;

при наявності зростаючого тренду на ринку ( $\mu > 0$ ) періодична VaR буде меншою за «наївну» ануалізацію, а при падінні ринку — більшою;

різниця між коректною та «наївною» ануалізацією VaR буде тим більшою, чим довший період часу, на якому робиться ануалізація.

Але наведені вище міркування не є цілком коректними з двох причин. По-перше, вказаному розподілу відповідає не сама дохідність, а її логарифм (тобто, якщо ми говоримо про логнормальний розподіл дохідності, то ми працюємо з нормально розподіленим логарифмом дохідності). По-друге, нормальний розподіл не є адекватним фактичному навіть для логарифму дохідності через проблему «великих хвостів». Для більш точного моделювання дохідності та оцінки ризиків у хвостах розподілу потрібно використовувати розподіли з більш «великими хвостами», як показано у [5].

Якщо перейти від розподілу дохідності до розподілу логарифму дохідності, то (2) зміниться на

$$\text{VAR}(\alpha) = 1 - \exp(\mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)) = 1 - e^{\mu + \sigma \phi} \quad (4)$$

а відповідна формула ануалізації (переходу від щоденної до періодичної) VaR виглядатиме так:

$$1 - \text{VAR}_p = e^{\mu_p + \sigma_p \phi} = e^{\mu_p T + \sigma_p \sqrt{T} \phi} = e^{(\mu_d + \phi \sigma_d) \sqrt{T}} e^{\mu_d(T - \sqrt{T})} = (1 - \text{VAR}_d) \sqrt{T} e^{\mu_d(T - \sqrt{T})} \quad (5)$$

Хоча вигляд формули ануалізації VaR при переході від розподілу дохідності до розподілу логарифму дохідності ускладнився, зроблені раніше висновки залишаються справедливими — на зростаючому ринку періодична VaR буде меншою, а на падаючому — більшою при тій самій щоденній VaR, і різниця буде тим більшою, чим більшим є період. Ще однією особливістю формул ануалізації є те, що в них не присутній квантілі розподілу, тобто за умови незалежності щоденних дохідностей ці формули справедливі для будь-якого розподілу, що описується двома параметрами.

Введемо поняття відносної похибки оцінки періодичної VaR як різницю між оцінюваним значенням VaR, яке розраховано за формулою (1), (3) або (5), та фактичним значенням VaR, яке розраховано по вибірці періодичних дохідностей для  $i$ -го активу, поділену на фактичну VaR:

$$\tilde{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{\text{VaR}_i} - \text{VaR}_i}{\text{VaR}_i}$$

де  $\tilde{\epsilon}_i$  — відносна похибка оцінки VaR  $i$ -го активу,  $\sqrt{\text{VaR}_i}$  — оцінюване значення VaR,  $\text{VaR}_i$  — фактичне значення VaR.

Тоді якість оцінювання можна розрахувати як середню похибку (ME, mean error), але це не зовсім коректно, бо додатні та від'ємні похибки компенсують один одну. Зазвичай для оцінки якості моделей оцінювання економічних показників використовують середньоквадратичну похибку (RMSE, root mean squared error) [6, с. 460]:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sqrt{\text{VaR}_i} - \text{VaR}_i}{\text{VaR}_i} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^2}$$

Розглянемо вибірку дохідностей 40 активів на фондовому ринку США, серед яких є по 10 компаній великої, середньої та малої капіталізації, фонди цінних металів, облігації та індексні фонди. Для кожного активу розглянемо вибірку щоденних дохідностей за 5 років (1260 спостережень), по цих вибірках визначимо фактичні щоденні VaR та математичні очікування дохідності для кожного активу, а далі розрахуємо щомісячну VaR за формулами (1), (3) та (5), поклавши по 21 торговельному дню у місяць ( $T = 21$ ). Таким чином отримуємо значення  $\sqrt{\text{VaR}_i}$ . Фактичні значення  $\text{VaR}_i$  розрахуємо по фактичних вибірках дохідності на інтервалах 21 торговий день. Порівняння похибок оцінки VaR з ймовірністю 5% для вибраних активів та RMSE для всієї вибірки наведено у таблиці 1.

Як можна побачити з таблиці 1, використання формули (5) для ануалізації VaR дає найменше значення RMSE, тобто за сукупністю оцінок є найкращим. Також для обраних активів воно дає найбільшу кількість точних оцінок, значно випередивши формули (3) та (1). Формула (1) є найменш точною, різниця між нею та двома іншими формулами є суттєвою.

Порівняння похибок оцінки VaR з ймовірністю 1% для вибраних активів та RMSE для всієї вибірки наведено у таблиці 2.

З таблиці 2 також випливає, що формула (5) є найкращою за RMSE, при цьому різниця між нею та формулами (3) та (1) стає значно більшою. Цікаво, що формула (3), хоча і є кращою за формулу (1) за показником RMSE, але на обраних активах вона не показала найменшу похибку за жодною акцією. Також варто зазначити, що при оцінці VaR 1% порівняно з оцінкою VaR 5% точність оцінювання є гіршою за сукупністю активів (хоча по окремих активах вона може бути кращою). Це може бути пов'язано з тим, що ми відходимо далі у хвіст розподілу дохідності, а будь-які оцінки ризику у хвостах розподілу завжди є менш точними, ніж у його середині.

Розрахунок періодичної VaR за даними вибірок щоденних дохідностей суттєво відрізняється від розрахунку періодичного стандартного відхилення. «Наївна» ануалізація VaR, яку наводять деякі джерела за аналогією із стандартним відхиленням, має наслідком суттєві похибки. У нашому дослідженні було виведено формули розрахунку періодичної VaR (3) та (5), за припущення про розподіл дохідності чи її логарифму відповідно. Показано, що саме формула (5) є найбільш коректною теоретично та дає найменшу похибку на реальних цінових даних фондового ринку США.

Таблиця 1. Значення та відносні похибки оцінки періодичної VaR @ 5%

Актив	Фактична $VaR_i$	Формула (1)		Формула (3)		Формула (5)	
		$\sqrt{VaR_i}$	$\tilde{\epsilon}_i$	$\sqrt{VaR_i}$	$\tilde{\epsilon}_i$	$\sqrt{VaR_i}$	$\tilde{\epsilon}_i$
Apple	14.1008%	18.1074%	28.41%	15.5846%	10.52%	15.1582%	<b>7.50%</b>
Boeing	15.5916%	17.0974%	9.66%	16.7855%	7.66%	16.0641%	<b>3.03%</b>
Citygroup	31.0100%	28.9977%	-6.49%	30.6207%	<b>-1.26%</b>	28.6813%	-7.51%
Ford	24.4114%	21.9262%	<b>-10.18%</b>	20.2523%	-17.04%	19.7475%	-19.11%
General Electric	18.8817%	18.6687%	-1.13%	18.8288%	<b>-0.28%</b>	17.9296%	-5.04%
Coca-Cola	6.7826%	9.8905%	45.82%	9.0514%	33.45%	8.9009%	<b>31.23%</b>
Nike	12.1655%	14.1209%	16.07%	12.7829%	5.08%	12.5180%	<b>2.90%</b>
Oracle	12.8749%	14.6099%	13.48%	13.6597%	6.10%	13.3188%	<b>3.45%</b>
Procter & Gamble	8.4857%	9.1680%	8.04%	8.8008%	3.71%	8.6373%	<b>1.79%</b>
Southern Company	6.8570%	8.3953%	22.43%	7.6535%	11.62%	7.5589%	<b>10.24%</b>
Exxon Mobil	9.7732%	12.9039%	32.03%	12.3150%	26.01%	12.0284%	<b>23.07%</b>
<b>RMSE</b>			<b>24.52%</b>		<b>17.40%</b>		<b>16.11%</b>

Примітка. Найменші значення похибки виділені напівжирним шрифтом.

Таблиця 2. Значення та відносні похибки оцінки періодичної VaR @ 1%

Актив	Фактична $VaR_i$	Формула (1)		Формула (3)		Формула (5)	
		$\sqrt{VaR_i}$	$\tilde{\epsilon}_i$	$\sqrt{VaR_i}$	$\tilde{\epsilon}_i$	$\sqrt{VaR_i}$	$\tilde{\epsilon}_i$
Apple	33.7564%	30.1087%	<b>-10.81%</b>	27.5859%	-18.28%	25.2534%	-25.19%
Boeing	25.8480%	28.9229%	11.90%	28.6109%	10.69%	25.8908%	<b>0.17%</b>
Citygroup	57.4686%	75.2793%	30.99%	76.9023%	33.82%	57.7181%	<b>0.43%</b>
Ford	51.3292%	43.9225%	<b>-14.43%</b>	42.2485%	-17.69%	36.6841%	-28.53%
General Electric	31.0895%	36.8031%	18.38%	36.9632%	18.89%	32.3381%	<b>4.02%</b>
Coca-Cola	13.2900%	16.9300%	27.39%	16.0910%	21.08%	15.2735%	<b>14.92%</b>
Nike	17.6897%	26.2963%	48.65%	24.9583%	41.09%	22.9809%	<b>29.91%</b>
Oracle	18.1905%	27.3298%	50.24%	26.3796%	45.02%	24.1370%	<b>32.69%</b>
Procter & Gamble	14.1424%	16.3589%	15.67%	15.9917%	13.08%	15.1515%	<b>7.14%</b>
Southern Company	13.9441%	15.9059%	14.07%	15.1641%	8.75%	14.4228%	<b>3.43%</b>
Exxon Mobil	15.4292%	22.9312%	48.62%	22.3423%	44.81%	20.7461%	<b>34.46%</b>
<b>RMSE</b>			<b>34.43%</b>		<b>31.10%</b>		<b>23.75%</b>

Періодична VaR, як показано у дослідженні, залежить не тільки від щоденної VaR та довжини періоду, але й від очікуваної щоденної доходності, тобто від тренду на ринку. Чим довшим буде період, тим більший внесок у періодичну VaR буде мати саме цей множник. Врахування цього факту та

використання відповідної формули аналізації (5) дозволило скоротити відносну середньоквадратичну похибку оцінювання з 25% до 16% для VaR 5% та з 34% до 24% для VaR 1% на вибірці з 40 активів на ринку США.

## Список літератури

1. Jorion, Ph. *Financial Risk Manager Handbook [Text]* / Ph. Jorion. — Wiley, 2003. — 832 p.
2. Duffie, D. *An Overview of Value at Risk [Text]* / D. Duffie, J. Pan // *Journal of Derivatives*. — 1997. — No. 4. — P. 7–49.
3. Artzner, Ph. *Coherent Measures of Risk [Text]* / Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath // *Mathematical Finance*. — 1999. — No. 9 (3). — P. 203–228.
4. Byrne, A. *Basics of Portfolio Planning and Construction [Text]* / Adrian Byrne, Frank E. Smudde // *CFA Program Curriculum 2011, Level I, Volume 4*. — CFA Institute, 2011. — P. 449–489.
5. Хохлов, В. Ю. VaR и проблема «больших хвостов» распределения доходности [Text] / В. Ю. Хохлов // *Риск-менеджмент в кредитной организации*. — 2012. — № 2. — С. 35–49.
6. DeFusco, R. A. *Time-Series Analysis [Text]* / Richard A. DeFusco, Dennis W. McLeavey, Jerald E. Pinto, David E. Runkle // *CFA Program Curriculum 2012, Level II, Volume 1*. — CFA Institute, 2012. — P. 437–515.

## РЕЗЮМЕ

**Хохлов Валентин**

### Периодическая Value at Risk

Статья посвящена расчету и исследованию свойств одного из показателей риск-менеджмента - периодической Value at Risk (VaR). Показано, что «наивная» аннуализация VaR не является корректной. Предложенная формула расчета периодической VaR позволяет сократить ошибку оценки с 25% до 16% для VaR 5% и с 34% до 24% для VaR 1%.

---

## РЕЗЮМЕ

*Khokhlov Valentyn*

### **Periodic Value at Risk**

This article is dedicated to one of the key risk management indicators — periodic Value at Risk (VaR). The author has derived its formula and studied its properties. There has been shown that a “naïve” annualizing is not appropriate for VaR. The formula that has been derived allows to reduce the periodic VaR estimation error from 25% to 16% for VaR 5% and from 34% to 24% for VaR 1%.

*Стаття надійшла до редакції 09.09.2012 р.*