

ПРИМЕНЕНИЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДЛЯ ВЫБОРА СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНОЙ СМЕСИ

Пусть ситуация принятия решений по оптимизации использования ресурсов состоит в выборе таких пропорций ингредиентов смеси, чтобы сама смесь обладала наилучшим качеством. При этом в оценке качества разработанных различных вариантов смеси принимают участие несколько независимых экспертов. Такая ситуация принятия решений может возникнуть, например, в пищевой промышленности в процессе оптимизации вкусовых качеств продукта путем выбора пропорций ингредиентов (исходных материалов и добавок), в частности при купажировании вина, чая, меда и тому подобных случаях, или в парфюмерии при оптимизации аромата парфюма путем изменения пропорций ингредиентов (душистых веществ и материалов), составляющих соответствующую смесь (эфирную композицию).

Таким образом, имеет место следующая ситуация принятия решений: несколько изготовителей создают свои варианты смеси, каждый из которых состоит из одних и тех же ингредиентов, но в разных пропорциях, а несколько дегустаторов оценивают качество разработанных вариантов смеси и упорядочивают (каждый со своей точки зрения) эти варианты смеси по их качественным характеристикам. Таким образом, каждый из экспертов упорядочивает (ранжирует) разработанные варианты смеси при помощи некоторой порядковой переменной. Задача лица, принимающего решения (ЛПР), состоит в формировании оптимального варианта смеси путем изменения и выбора ее структуры. Сразу отметим, что в такой ситуации критерий оптимальности является качественным: требуется улучшить вкус продукта или добиться определенного аромата духов и т.д. и т.п.

Цель данной статьи — разработка метода выбора структуры оптимального варианта смеси, основанного на решении соответствующей антагонистической игры. Применение данного теоретико-игрового метода выбора структуры оптимального варианта смеси позволяет найти искомую структуру оптимального варианта смеси. Такая оптимизация использования ресурсов приводит к достижению наилучшего качества соответствующей смеси, что позволяет стабилизировать спрос на данную продукцию и, как следствие, дает возможность уменьшить уровень экономического риска, которому подвержен производитель данной продукции.

Напомним, что порядковая (ординальная) переменная [1, С. 82] позволяет упорядочивать исследуемые объекты (в данном случае варианты смеси) по их качеству, т.е. по степени проявления в них желаемых свойств. Порядковые переменные применяют в тех случаях, когда шкала, в которой можно было бы количественно измерить степень качества, объективно не существует или не известна. Вообще говоря, общее число градаций (рангов) ординального признака может равняться, а может и не равняться числу исследуемых объектов (вариантов смеси).

Введем следующие обозначения: L — число различных ингредиентов смеси; $x_l^{(j)}$ — доля l -й ингредиента в j -м варианте смеси; $\mathbf{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}; \dots; x_L^{(j)})$ — вектор, характеризующий структуру (распределение долей ингредиентов) j -го варианта смеси; n — количество рассматриваемых вариантов смеси; $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_L^*)$ — вектор, характеризующий искомую структуру оптимального варианта смеси (т.е. такого варианта смеси, составленного из

имеющихся ингредиентов, который обладает всеми желаемыми свойствами в наибольшей степени); k — количество экспертов, оценивающих предложенные варианты смеси; r_{ij} — порядковый номер места (ранг), который i -й эксперт присвоил j -му варианту смеси. Будем считать, что вектор $\mathbf{r}_i = (r_{i1}; \dots; r_{in})$, $i = \overline{1, k}$, представляет собой перестановку первых натуральных чисел $1, 2, \dots, n$, при этом данная перестановка $\mathbf{r}_i = (r_{i1}; \dots; r_{in})$ задает порядковые места рассматриваемых вариантов смеси в ряду всех этих вариантов смеси, упорядоченных i -м экспертом согласно своим собственным субъективным предпочтениям. Очевидно, доли $x_l^{(j)}$ всегда удовлетворяют таким свойствам:

$$\sum_{l=1}^L x_l^{(j)} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$x_l^{(j)} \geq 0, \quad l = \overline{1, L}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Доли x_l^* в оптимальном варианте смеси также должны удовлетворять свойствам (1) и (2).

По своей сути рассматриваемая ситуация принятия решений сводится к формированию порядковой (ординальной) переменной, характеризующей качество (меру оптимальности) исследуемых объектов (вариантов смеси). За счет выбора структуры варианта смеси, составленного из имеющихся ингредиентов, требуется добиться того, чтобы вариант смеси обладал наилучшим качеством, т.е. обладал бы всеми желаемыми свойствами в наибольшей степени. При этом имеются несколько различных вариантов смеси, составленных из одних и тех же имеющихся ингредиентов. Эти варианты смеси отличаются друг от друга лишь структурой, т.е. соотношением долей этих ингредиентов. Кроме того, несколько экспертов упорядочивают (ранжируют) имеющиеся варианты смеси, присваивая этим вариантам смеси порядковые номера, обозначающие место этих вариантов смеси в ряду всех рассматриваемых вариантов смеси. Каждый эксперт упорядочивает имеющиеся варианты смеси по убыванию степени желаемых свойств: наилучшему (наиболее качественному) с его точки зрения варианту смеси эксперт присваивает порядковый номер 1, а наихудшему (наименее качественному) — номер n .

Итак, в результате ситуацию принятия решений характеризует экспертная информация, представляющая собой матрицу исходных данных следующего вида:

$$\mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij}). \quad (3)$$

В матрице (3) элемент r_{ij} задает порядковое место (ранг), которое i -й эксперт присвоил j -му варианту смеси в ряду всех рассматриваемых вариантов смеси, упорядоченных этим экспертом по убыванию степени желаемых свойств. Для простоты будем считать, что с точки зрения любого эксперта ранги всех рассматриваемых вариантов смеси различимы [1, С. 424]. Это, в частности, означает, что любая строка $\mathbf{r}_i = (r_{i1}; \dots; r_{in})$ матрицы (3) представляет собой перестановку из n элементов, а именно перестановку из чисел $1, 2, \dots, n$. Эта перестановка n первых натуральных чисел определяет порядковые места вариантов смеси согласно собственным субъективным предпочтениям соответствующего эксперта.

В статистической практике (в частности при организации и статистической обработке систем экспертных исследований) для измерения и анализа статистической связи между несколькими ранжировками одного и того же конечного множества исследуемых объектов применяют анализ ранговых корреляций [1, С. 425-441]. Измерить статистическую связь между несколькими порядковыми переменными позволяет значение коэффициента конкордации (согласованности) Кендалла [1, С. 437-438]. При соблюдении указанных требований выборочное значение $\hat{W}(k)$ множественного рангового коэффициента конкордации (согласованности) Кендалла W вычисляют по формуле:

$$\hat{W}(k) = \frac{12}{k^2 \cdot (n^3 - n)} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k r_{ij} - \frac{k \cdot (n+1)}{2} \right)^2, \quad (4)$$

где r_{ij} — мнение i -го эксперта о качестве j -го варианта смеси, k — число экспертов, n — число вариантов смеси. В случае неразличимости рангов, когда имеются так называемые объединенные ранги, формула (4) должна быть модифицирована определенным образом [1, С. 438].

Для проверки статистической значимости выборочного значения коэффициента конкордации [1, С. 439-441] необходимо сравнить фактическое (наблюдаемое) значение «Хи-квадрат»-критерия $\chi_{\phi}^2 = k \cdot (n-1) \cdot \hat{W}(k)$ с табличным значением квантиля $\chi_{\tau}^2 = \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ соответствующего уровня «Хи-квадрат»-распределения с $\nu = n-1$ степенями свободы, где α — заданный уровень значимости. Если справедливо неравенство $\chi_{\phi}^2 > \chi_{\tau}^2$, то степень согласованности мнений экспертов на заданном уровне значимости следует признать высокой.

Простейшим и на первый взгляд естественным методом выбора структуры оптимальной смеси является определение поиска среди разработанных вариантов смеси такого варианта, который обладает наилучшей суммой рангов:

$$\bar{r}_i = \min_j \bar{r}_j, \quad (5)$$

где $\bar{r}_j = \sum_{i=1}^k r_{ij}$, $j = \overline{1, n}$.

В этом случае структуру $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_L^*)$ оптимальной смеси будет задавать вектор $\mathbf{x}^{(t)} = (x_1^{(t)}; \dots; x_L^{(t)})$, характеризующий t -й разработанный вариант смеси: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(t)}$, т.е. $x_l^* = x_l^{(t)}$, $l = \overline{1, L}$. Однако такой метод выбора структуры оптимальной смеси слишком, так сказать, прямолинеен. Гораздо более целесообразным и восприимчивым к латентным преимуществам исследуемых объектов представляется теоретико-игровой метод выбора структуры оптимальной смеси.

Опишем теоретико-игровой метод выбора вектора $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_L^*)$, характеризующего структуру оптимального варианта смеси. Матрица (3) задает модель теории принятия статистических решений, которую будем называть статистической игрой. Основная заслуга в создании теории принятия статистических решений принадлежит А. Вальду [2].

Статистическая игра (статистическая модель принятия решений) представляет собой систему $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где $\mathbf{I} = \{1; \dots; i; \dots; k\}$ — множество всех решений статистика, т.е. ЛПР, которые он может применить при одноразовом принятии решения, $\mathbf{J} = \{1; \dots; j; \dots; n\}$ — множество всех возможных состояний «природы»; $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ — платежная матрица, еще называемая функционалом оценивания статистической игры.

Сразу отметим, что чистые стратегии ЛПР могут быть его взаимоисключающими возможными решениями, а могут быть в определенном смысле совместимыми. Состояния «природы», как правило, являются взаимоисключающими, при этом наперед неизвестно, в каком именно своем возможном состоянии будет находиться «природа» в момент реализации принятого ЛПР решения. В отличие от ЛПР, «природа» пассивно выбирает свои чистые стратегии, т.е. случайным образом (неосознанно) оказывается в одном из своих возможных состояний.

Без ограничения общности можно считать, что платежная матрица статистической игры обладает положительным ингредиентом [3, с. 12]: $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}_{k \times n}^+ = (r_{ij}^+)$, т.е. r_{ij} характеризует выигрыш ЛПР в случае реализации им своего i -го решения в условиях, когда «природа» оказалась в своем j -м возможном состоянии.

Статистическую игру, характеризующую ситуацию принятия решений, можно решать как в чистых стратегиях игроков, так и в их смешанных стратегиях. Для поиска оптимальных смешанных стратегий можно решать антагонистическую игру, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ заданной статистической игры. Антагонистической игрой (АИ) будем называть матричную игру, т.е. конечную игру двух лиц (игроков) с нулевой суммой.

АИ представляет собой систему $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$, где $\mathbf{I} = \{1; \dots; i; \dots; k\}$ — множество всех чистых стратегий первого игрока; $\mathbf{J} = \{1; \dots; j; \dots; n\}$ — множество всех чистых стратегий второго игрока; $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ — платежная матрица АИ. Значение элемента r_{ij} платежной матрицы задает выигрыш первого игрока в ситуации $(i; j)$, когда в партии игры он применил свою чистую стратегию i , а второй игрок — свою чистую стратегию j . В каждой партии АИ значение проигрыша второго игрока совпадает со значением выигрыша первого игрока.

Исходную статистическую игру, характеризующую ситуацию принятия решений, можно отождествлять с соответствующей АИ, т.е. с АИ, заданной той же самой платежной матрицей. Подчеркнем, что такое отождествление не подразумевает изменения характерных свойств «природы»: она остается случайным выбором. Образно говоря, в случае такого отождествления исходной статистической игры с соответствующей АИ, сама АИ используется лишь как высокотехнологический инструмент поиска оптимального решения. При этом экономические интерпретации компонент оптимальных стратегий игроков, цены соответствующей АИ и их найденных числовых значений зависят от экономического содержания исходной ситуации принятия решений.

С одной стороны, отождествление исходной статистической игры с соответствующей АИ дает ряд преимуществ и, в частности, позволяет расширить возможности применения статистических игр. С другой стороны, такое отождествление требует от ЛПР определенной осторожности и корректности. Применяя АИ для принятия решений в экономике, следует уделять внимание вопросам математической корректности, экономической корректности, экономической целесообразности и экономической эффективности.

Итак, рассмотрим АИ, заданную матрицей (3). Сначала предположим, что АИ, заданная матрицей (3), не содержит седловой точки: $\alpha < \beta$, где $\alpha = \max_i \alpha_i$, $\alpha_i = \min_j r_{ij}$, $\beta = \min_j \beta_j$, $\beta_j = \max_i r_{ij}$. Как известно, в этом случае АИ не имеет решения в чистых стратегиях игроков. Если $\mathbf{q}^* = (q_1^*; \dots; q_n^*)$ — оптимальная смешанная стратегия второго игрока, то $\sum_{j=1}^n q_j^* = 1$, $q_j^* \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, а значения долей x_l^* ингредиентов в оптимальном варианте смеси можно найти по формулам:

$$x_l^* = \sum_{j=1}^n q_j^* \cdot x_l^{(j)}, l = \overline{1, L}. \quad (6)$$

Формулы (6) можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^n q_j^* \cdot \mathbf{x}^{(j)}. \quad (7)$$

Очевидно, применение формулы (7) означает, что вектор $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_L^*)$, характеризующий оптимальный вариант смеси, представляет собой выпуклую линейную комбинацию всех векторов $\mathbf{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}; \dots; x_L^{(j)})$, характеризующих структуры разработанных вариантов смеси. При этом коэффициентами этой выпуклой линейной комбинации служат значения q_j^* соответствующих компонент оптимальной смешанной стратегии второго игрока АИ, заданной матрицей (3).

Рассмотрим теперь случай, когда АИ, заданная матрицей (3), содержит седловую точку: $\alpha = \beta$, где $\alpha = \max_i \alpha_i$, $\alpha_i = \min_j r_{ij}$, $\beta = \min_j \beta_j$, $\beta_j = \max_i r_{ij}$. Как известно, в этом случае АИ имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях игроков. С учетом того, что любая строка матрицы (3) представляет собой перестановку из n первых натуральных чисел $1, 2, \dots, n$, наличие седлового элемента в матрице (3) означает, что в этой матрице имеется вектор-столбец t , все элементы которого равны числу 1 : $r_{it} = 1$, $i = \overline{1, k}$, при этом $\alpha = \beta = 1$, t — номер единственной оптимальной чистой стратегии второго игрока. Следовательно, с точки зрения всех экспертов t -й разработанный вариант смеси и обладает наилучшим качеством, т.е. является искомым оптимальным вариантом смеси. Этот случай является частным случаем применения формулы (7), когда $q_t^* = 1$, $q_j^* = 0$, $j = \overline{1, n}$

и $j \neq t$. Кроме того, этот случай полностью совпадает с применением формулы (5). Поэтому можно утверждать, что метод, основанный на применении формулы (5) — это частный случай теоретико-игрового метода выбора структуры оптимальной смеси.

Рассмотрим ситуацию принятия решений, заданную следующей матрицей:

$$\mathbf{R}_{k \times n} = \mathbf{R}_{3 \times 5} = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Итак, имеем $k = 3$, $n = 5$, $\chi^2 = \chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{1-0,1}(5-1) = \chi^2_{0,9}(4) = 7,78$, где $\alpha = 0,1$ — заданный уровень значимости, $\frac{k \cdot (n+1)}{2} = 9$, $k^2 \cdot (n^3 - n) = 1080$. Согласно формуле (4) получаем $\widehat{W}(k) = \frac{12}{1080} \cdot 60 = \frac{2}{3}$, откуда $\chi^2_{\Phi} = 3 \cdot (5-1) \cdot \frac{2}{3} = 8 > 7,78 = \chi^2$. Следовательно, степень согласованности мнений экспертов на заданном уровне значимости $\alpha = 0,1$ следует признать высокой.

Рассмотрим АИ, заданную матрицей (8). Оценим чистые стратегии первого игрока:

$$\alpha_1 = \min_j r_{1j} = \min\{5; 1; 2; 4; 3\} = 1, \quad \alpha_2 = \min_j r_{2j} = \min\{5; 2; 1; 3; 4\} = 1,$$

$$\alpha_3 = \min_j r_{3j} = \min\{4; 3; 2; 5; 1\} = 1.$$

Оценим чистые стратегии второго игрока:

$$\beta_1 = \max_i r_{i1} = \max\{5; 5; 4\} = 5, \quad \beta_2 = \max_i r_{i2} = \max\{1; 2; 3\} = 3, \quad \beta_3 = \max_i r_{i3} = \max\{2; 1; 2\} = 2,$$

$$\beta_4 = \max_i r_{i4} = \max\{4; 3; 5\} = 5, \quad \beta_5 = \max_i r_{i5} = \max\{3; 4; 1\} = 4.$$

Нижняя чистая цена данной игры равна $\alpha = \max_i \alpha_i = \max\{1; 1; 1\} = 1$, а ее верхняя чистая цена равна $\beta = \min_j \beta_j = \min\{5; 3; 2; 5; 4\} = 2$. Очевидно, для чистых цен игры справедливы соотношения $\alpha = 1 < 2 = \beta$. Следовательно, данная АИ не имеет седловой точки и, следовательно, решения в чистых стратегиях игроков. Для поиска оптимальных смешанных стратегий игроков введем следующие обозначения: $V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (r_{ij} \cdot p_i \cdot q_j)$ — платежная функция

данной АИ, $t_j = \frac{q_j}{V}$, где $j = \overline{1, n}$, $y_i = \frac{p_i}{V}$, где $i = \overline{1, k}$. Для новых переменных решим симметричную пару взаимно-двойственных задач вида:

исходная задача:

$$z = \sum_{j=1}^n t_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot t_j \leq 1, \quad i = \overline{1, k},$$

$$t_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n};$$

двойственная задача:

$$f = \sum_{i=1}^k y_i \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^k r_{ij} \cdot y_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Оптимальные решения приведенных взаимно-двойственных задач имеют следующий вид: $\mathbf{t}^* = (0; 0,125; 0,25; 0; 0,125)$, $z_{\max} = z^* = 0,5$ — для исходной задачи, $\mathbf{y}^* = (0,25; 0; 0,25)$, $f_{\min} = f^* = 0,5$ — для двойственной задачи. Применяя соотношения $V^* = \frac{1}{z^*} = \frac{1}{f^*}$, $p_i^* = y_i^* \cdot V^*$, $q_j^* = t_j^* \cdot V^*$, находим оптимальное решение АИ, заданной матрицей (8): $V^* = \frac{1}{0,5} = 2$ — цена данной игры, $\mathbf{p}^* = (0,5; 0; 0,5)$ — оптимальная смешанная стратегия первого игрока, $\mathbf{q}^* = (0; 0,25; 0,5; 0; 0,25)$ — оптимальная стратегия второго игрока.

Таким образом, зная векторы $\mathbf{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}; \dots; x_L^{(j)})$, $j = \overline{1, n}$, характеризующие структуры $n = 5$ разработанных вариантов смеси, по формулам (6) можно найти значения компонент x_l^* , $l = \overline{1, L}$, вектора $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_L^*)$, характеризующего искомую структуру оптимального варианта смеси: $x_l^* = \sum_{j=1}^n q_j^* \cdot x_l^{(j)} = 0,25 \cdot x_l^{(2)} + 0,5 \cdot x_l^{(3)} + 0,25 \cdot x_l^{(5)}$, $l = \overline{1, L}$.

Проведенное исследование позволяет прийти к следующим выводам.

В ситуации принятия решений по оптимизации использования ресурсов, когда требуется выбрать такие пропорции исходных ингредиентов смеси, чтобы сама смесь обладала наилучшим качеством, часто задача лица, принимающего решения, состоит в формировании оптимального варианта смеси путем изменения и выбора ее структуры. По своей сути рассматриваемая ситуация принятия решений сводится к формированию порядковой (ординальной) переменной, характеризующей качество (меру оптимальности) исследуемых объектов (разработанных вариантов смеси).

Если несколько экспертов упорядочивают (ранжируют) разработанные варианты смеси при помощи некоторой порядковой переменной, то данную ситуацию принятия решений характеризует экспертная информация, представляющая собой матрицу исходных данных следующего вида $\mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$. Значение элемента r_{ij} этой матрицы задает порядковое место (ранг), которое i -й эксперт присвоил j -му варианту смеси в ряду всех рассматриваемых вариантов смеси, упорядоченных этим экспертом согласно своим предпочтениям по убыванию степени желаемых свойств.

Исходную статистическую игру, характеризующую ситуацию принятия решений, можно отождествлять с соответствующей антагонистической игрой (АИ), т.е. с конечной игрой двух лиц с нулевой суммой, заданной той же самой платежной матрицей. Подчеркнем, что такое отождествление не подразумевает изменения характерных свойств «природы»: она остается случайным выбором. Образно говоря, в случае такого отождествления исходной статистической игры с соответствующей АИ, сама АИ используется лишь как высокотехнологический инструмент поиска оптимального решения. При этом экономические интерпретации компонент оптимальных стратегий игроков, цены соответствующей АИ и их найденных числовых значений зависят от экономического содержания исходной ситуации принятия решений.

С одной стороны, отождествление исходной статистической игры с соответствующей АИ дает ряд преимуществ и, в частности, позволяет расширить возможности применения статистических игр. С другой стороны, такое отождествление требует от ЛПР определенной осторожности и корректности. Применяя АИ для принятия решений в экономике, следует уделять внимание вопросам математической корректности, экономической корректности, экономической целесообразности и экономической эффективности.

Вектор, характеризующий оптимальный вариант смеси, представляет собой выпуклую линейную комбинацию векторов, характеризующих структуру разработанных вариантов смеси. При этом как значения коэффициентов этой выпуклой линейной комбинации можно использовать соответствующие компоненты оптимальной смешанной стратегии второго игрока антагонистической игры, заданной матрицей $\mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$, если эта игра не имеет седловой точки. Если же эта игра имеет седловую точку, то один из разработанных вариантов смеси является оптимальным согласно мнению всех экспертов. Применение такой оптимизации использования ресурсов приводит к достижению наилучшего качества соответствующей смеси, что позволяет стабилизировать спрос на данную продукцию и, как следствие, дает возможность уменьшить уровень экономического риска, которому подвержен производитель данной продукции.

Литература

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 1006 с.
2. Вальд А. Последовательный анализ / А. Вальд; пер. с англ. П. А. Бакута. — М.: Физматгиз, 1960. — 328 с.
3. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. — М.: Наука, 1981. — 258 с.

1. Aivazyan, S.A., Mhityryan V.S. (1998), Applied Statistics and Econometrics basics, Moscow, UNITY.
2. Wald, A. (1960), Sequential Analysis, Moscow, Fizmatgiz.
3. Truhaev, R.I. (1981), Models of decision making under uncertainty, Moscow, Nauka.