

# ДИНАМІКА ВИРОБНИЧОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ФІРМИ. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

*Н. В. Семенченко,  
доцент кафедри ТПЕ, НТУУ "КПІ"*

*Для опису функціонування фірми пропонується динамічна модель у формі системи чотирьох звичайних диференціальних неоднорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами.*

*A dynamic model in the form of the system of four ordinary differential equations with permanent coefficients is offered for description of firm functioning.*

## ВСТУП

Математичні моделі в сучасній економіці застосовуються або у вигляді відомого рівняння динамічного балансу Леонтьєва [1] з його численними модифікаціями (зокрема, [2, 3]) для опису міжгалузевої залежності "витрати — виробництво" в макроекономіці, або у формі системи алгебраїчних рівнянь і нерівностей (здебільшого, нелінійних) [4], що зводяться до задач умовної стохастичної оптимізації [5] і використовуються у мікроекономіці для моделювання діяльності підприємства чи фірми.

Тому створення досить простих математичних моделей, які б у зрозумілих термінах інтерпретували виробничу діяльність певної фірми і дозволяли оперативно керувати її процесом "виробництво — реалізація", є актуальним і вимагає свого вирішення.

Диференціальні рівняння виробничої діяльності фірми. Як засвідчує аналіз виробничої діяльності фірми, збільшення оперативності (у певних межах) її адекватного реагування на поточні зміни умов функціонування приводить до збільшення доходів і прибутків. Очікується, що застосування добового аналізу і контролю виробничої діяльності фірми забезпечать ще кращі результати.

Будемо описувати динаміку виробничої діяльності будь-якої фірми на інтервалі часу, що відповідає одному року, математичною моделлю у вигляді неоднорідної системи чотирьох звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами і нестационарною правою частиною:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_1 \left( \frac{u}{\alpha} - x_2 \right) + k_2 [q - (x_1 - x_3)], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= k_3 (x_2 - x_4) - k_4 [q - (x_1 - x_3)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $x_2, x_4$  — відповідно кількості товару чи послуг, що виробляються (пропонуються) і реалізуються щодоби. Вони описуються другим і четвертим рівняннями системи (1); точкою позначена операція диференціювання. Якщо ці кількості додатні, то обсяги виробництва і реалізації зростають. Якщо дорівнюють нулю, то і виробництво, і реалізація стабільні. Наярешті, якщо вони від'ємні, то виробництво і реалізація товару спадають.

Очевидно, що їх знаки визначаються правими частинами відповідних рівнянь, в яких:

$$k_j = \text{const} > 0, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (2)$$

постійні додатні коефіцієнти, що характеризують оперативність реагування (швидкодію) фірми на коливання зовнішніх і внутрішніх умов у процесі виробництва і реалізації товару або послуг.

Змінні  $x_2, x_4$  першим і третім рівняннями системи (1) пов'язані із загальною кількістю виробленого  $x_1$  і реалізованого  $x_3$  товару на момент часу  $t$  очевидними інтегральними співвідношеннями:

$$x_1(t) = \int x_2(\tau) d\tau, \quad x_3(t) = \int x_4(\tau) d\tau \quad (3)$$

Різниця  $x_1 - x_3$  у системі (1) ніколи не може стати від'ємною, бо обсяг реалізації  $x_3$  не перевищуватиме обсяг виробництва  $x_1$  (фірма реалізує лише свій товар), тому знак виразу  $q - (x_1 - x_3)$  (тут  $q$  — кількість товару, що постійно знаходиться на складі) визначає ступінь накопичення резервного товару фірми. І доки

$$x_1(t) < q + x_1(t), \quad (4)$$

доти вираз  $q - (x_1 - x_3)$  буде додатним і сприятиме збільшенню добового виробництва товару  $x_2$  і, навпаки, зменшенню добової реалізації товару  $x_4$  аж до деякого моменту  $t = t_*$ , коли

$$x_1(t) = q + x_1(t). \quad (5)$$

Після цього весь товар  $x_1(t)$ , що виробляється, повинен постійно реалізовуватися згідно з умовою:

$$x_1(t) = x_3(t), \quad t > t_*, \quad (6)$$

інакше надлишок товару

$$\Delta q(t) = x_1(t) - x_3(t) > q, \quad t > t_*, \quad (7)$$

перетворить вираз

$$q - \Delta q < 0, \quad t > t_*, \quad (8)$$

на від'ємний, і це викличе згортання виробництва з одночасним намаганням збільшити реалізацію товару  $x_4$  (згідно з четвертим рівнянням системи (1)).

Не важко дослідити вплив на процедуру виробництва та реалізації товару перших доданків відповідно у другому та четвертому рівняннях системи (1). Так, у четвертому рівнянні доки добовий обсяг реалізації товару  $x_4$  не перевищуватиме з реальних причин добовий обсяг виробництва  $x_2$ , а буде лише наблизатись до нього, доти різниця  $x_2 - x_4$  буде додатною і сприятиме збільшенню обсягу реалізації товару ( $x_4 > 0$ ) до положення  $x_2 = x_4$ , коли весь вироблений за добу товар буде повністю реалізовуватися.

У другому рівнянні системи (1) обсяг добового виробництва  $x_2$  визначається добовими витратами  $u$ , які забезпечують при питомих витратах

$\alpha$  виготовлення щодоби товару в обсязі  $\hat{q}=u/\alpha$ , і доки  $x_2 < \hat{q}$ , похідна  $x_2$  буде додатною, і добове виробництво товару  $x_2$  буде зростати; при  $x_2 = \hat{q}$  воно залишиться стабільним, а якщо  $x_2 > \hat{q}$ , то почне спадати. Тому у можна розглядати як механізм управління процесом виробництва товару, а рівняння (1) — як систему керування [6].

Добові витрати  $u$  можна задати формулою:

$$u(x, t) = m(t) - b(t) + \xi c x_4, \quad (9)$$

де  $m$  — заплановані добові витрати,  $b$  — добові непродуктивні (накладні) витрати,  $c$  — ринкова ціна товару (тобто  $c x_4$  — це надходження від добового продажу товару),

$$0 < \xi(t) \leq 1 \quad (10)$$

— деякий коефіцієнт, що дозволяє моделювати ситуацію, коли надходження від добового продажу товару не повністю використовуються на його виробництво.

Практично коефіцієнт  $\xi$  можна визначити з нерівності

$$m(t) - b(t) + \xi(t) c x_4 \leq \beta_j g(t) \alpha \quad (11)$$

у вигляді

$$\xi(t) \leq \frac{\beta_j g(t) \alpha - m(t) + b(t)}{c x_4}, \quad \beta_j \leq 1, \quad (12)$$

де  $\beta_j = const > 0$  — коефіцієнт, що характеризує долю компанії на  $j$ -му ринку,  $g(t)$  — добовий ринковий попит на товар, що виробляє фірма.

Надалі будемо вважати, що товари, які випускаються фірмою, характеризуються незначними коливаннями попиту, тому на досить великих проміжках часу величини  $g$ ,  $m$ ,  $b$  та  $c$  можна вважати постійними, і тоді коефіцієнт  $\xi$  буде визначатися традиційним співвідношенням між попитом і пропозицією [7]: якщо попит перевищує пропозицію, то треба покласти  $\xi=1$  і всі кошти, що надходять від продажу товару, направляти у його виробництво; в протилежному випадку надлишок коштів згідно з умовою (11) відправляється в банк (ця процедура не відображається в рівняннях (1)) і може використовуватися як власна інвестиція.

Аналіз диференціальних рівнянь функціонування фірми. Перепишемо систему (1) у більш зручній формі. Будемо мати:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_2 x_1 - k_1 x_2 + k_3 x_3 + k_4 \frac{\xi c}{\alpha} x_4 + k_1 \frac{m-b}{\alpha} + k_2 g, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= k_4 x_1 + k_3 x_2 - k_4 x_3 - k_1 x_4 - k_1 g, \end{aligned}$$

або з урахуванням позначень

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & k_3 & k_4 \xi c / \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_4 & k_3 & -k_4 & -k_1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \frac{m-b}{\alpha} + k_2 g \\ 0 \\ -k_1 g \end{bmatrix} \quad (14)$$

відповідно:

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(t) = x(0). \quad (15)$$

Коефіцієнти  $k_j, j = \overline{1,4}$ , в (13), (14), як вже зазначалось, характеризують швидкодію (швидкість реакції, відгуків) фірми на зміни в умовах її діяльності. Так, коефіцієнт  $k_1$  визначає, головним чином, проміжок часу, необхідний фірмі, щоб привести виробництво товару  $x_2$  у відповідність зі зміною обсягу фінансування. Коефіцієнти  $k_2$  і  $k_4$  визначають проміжки часу, необхідні фірмі, щоб адекватно відреагувати процесами виробництва товару  $x_2$  (коефіцієнт  $k_2$ ) і його реалізації  $x_4$  (коефіцієнт  $k_4$ ) на зміну ситуації на складі (якщо, наприклад, кількість товару на складі зростає понад нормативний резерв  $q$ , то його виробництво  $x_2$  повинно протягом певної кількості днів поступово зменшуватися, а реалізація  $x_4$  навпаки, збільшуватися, щоб цей надлишок звести до нуля: коефіцієнти  $k_2$  і  $k_4$  саме і визначають необхідні для цього кількості днів — окремо для виробництва і для реалізації). Нарешті, коефіцієнт  $k_3$  задає кількість днів, яка необхідна фірмі, щоб поставити добову реалізацію товару  $x_4$  у відповідність з його добовим виробництвом  $x_2$ , якщо останнє збільшилось чи зменшилось.

З прикладної теорії диференціальних рівнянь відомо, що ці коефіцієнти знаходяться у зворотній залежності від відповідних проміжків часу, тобто, якщо фірма через свою інертність спроможна відреагувати на зміну, наприклад, фінансування за 5 днів, то коефіцієнт  $k_1$  буде дорівнювати  $1/5$ . Тому, виходячи з реальних можливостей фірм і враховуючи певні нюанси їх діяльності, можна припустити, що всі коефіцієнти  $k_j, j = \overline{1,4}$ , будуть менші за одиницю.

Можна розглянути декілька частинних випадків.

У першому з них можна вважати, що процеси виробництва і реалізації товару однаково реагують на ситуацію зі складом, тоді:

$$k_1 = k_4 \quad (16)$$

У другому варіанті, маючи на увазі порівняно невелику фірму з незначною інертністю, можна зада-

ти коефіцієнти  $k_j, j = \overline{1,4}$ , такими значеннями:

$$k_1 = 0.2, \quad k_2 = 0.03, \quad k_3 = 0.5, \quad k_4 = 0.3 \quad (17),$$

що відповідають строкам реагування фірми у сфері виробництва товару на зміну фінансування — 5 днів і на зміну ситуації зі складом — 30 днів та в сфері реалізації товару на зміну обсягів виробництва — 2 дні і на зміну ситуації зі складом — 3 дні.

Для кількісного аналізу рівнянь (1) чи (13) та їх розв'язків зручно виділити з-поміж коефіцієнтів (17) найбільший

$$k_{\max} = k_1 = 0.2 \quad (18)$$

і виразити всі інші через нього. В результаті отримаємо залежності

$$k_2 = 0.4k_1, \quad k_3 = 0.1k_1, \quad k_4 = 0.6k_1, \quad (19)$$

які дозволяють дещо спростити форму розв'язків системи рівнянь (13).

## ВИСНОВКИ

Математична модель, що пропонується, спроможна адекватно описувати багато нюансів поведінки окремої фірми-виробника продукції або послуг в її виробничій діяльності. Дослідженню і аналізу цієї моделі будуть присвячені наступні роботи автора.

### Література:

1. Леонтьев В. и др. Исследование структуры американской экономики: теоретический и эмпирический анализ по схеме затраты — выпуск. — М.: Гос. статистическое изд-во, 1958. — 640 с.
2. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ). — М.: Наука, 1972. — 280 с.
3. Леонтьев В., Форд Д. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду // Экономика и математические методы. — 1972. — VIII, вып. 3. — С. 370—399.
4. Яновский Л.П. Контролирование хаоса в моделях экономического роста // Экономика и математические методы. — 2002. — 38, № 1. — С. 16—23.
5. Стасюк В.П. Модели адаптивного управления предприятием. — Донецк: Дон НУ, ООО "Юго-Восток, Лтд", 2003. — 224 с.
6. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высш. шк., 1989. — 447 с.
7. Котлер Ф. Маркетинг и менеджмент. — СПб: Питер Ком, 1999. — 896 с.