УДК 330.322

Н. В. Намлієва,
к. е. н., кафедра міжнародної економіки, Мелітопольський інститут державного та муніципального управління КПУ

РОЗРОБКА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОЦІНЮВАННЯ ПРОЦЕДУР ПРИ ПРИЙНЯТТІ ІНВЕСТИЦІЙНИХ РІШЕНЬ

Удосконалено методичні підходи до отримання, обробки, аналізу й оцінювання експертної інформації, що забезпечують обгрунтований вибір інвестиційних проектів для інвестування.

Improved methodical approaches for the reception, procession, analysation and appraising expert information which provide with generalization changing of investment projects for investigation.

ВСТУП

На основі визначення оцінки інвестиційної привабливості підприємства з позицій інвестора, що є мірою доцільності вкладення коштів у це підприємство; оцінювання здійснюється при виборі кращих з порівнюваних об'єктів вкладення з позиції певної групи інвесторів.

Вкладення може відбуватися після того, як установлені кращі для інвестора галузь і регіон вкладення, і подальші обговорення будуть проводитися за умови, що таке рішення вже прийняте.

При прийнятті рішення в інвестиційному процесі, а саме при організації та проведенні інвестиційних конкурсів з метою визначення найбільш привабливих інвестиційних проектів для фінансування, при порівняльному оцінюванні альтернативних варіантів стратегічних і важливих тактичних рішень, що приймаються при інвестуванні, значну роль відіграють оцінювальні процедури. Оцінювальні процедури перетворюють набори індивідуальних переваг на множину об'єктів порівняння в оцінюванні інвестиційних об'єктів.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

— систематизувати наявні аксіоматичні процедури оцінювання і використовувати їх для формування математичних моделей, що застосовуються при підтримці прийняття рішень в інвестиційному процесі.

РЕЗУЛЬТАТИ

Результати оціночних процедур можуть бути використані самі по собі — як оцінки об'єктів (але при цьому треба уважно поставитись до вимог теорії виміру) або як основа для вибору кращих об'єктів для інвестування чи їх упорядкування.

До оціночних процедур належать також процедури упорядкування, не пов'язані з попереднім обчисленням оцінок, такі як медіана Кемені. Сьогодні тільки для невеликої кількості процедур оцінювання побудовані аксіоматичні характеризації. Водночас є багато інших процедур, уведених і використовуваних у таких галузях, як організаційне управління, прикладна статистика, теорія графів тощо.

Нехай $A=(A^{(1)}, ..., A^{(m)})$ — профіль індивідуальних переваг у множині альтернатив $J=(1, ..., n)$. Тут m — кількість учасників; $A^{(p)}$, $p=1, ..., m$ є переваги p-го учасника. У більшості праць $A^{(p)}$ — лінійні порядки. Для нас важливо включити до розгляду й інші постановки, де є допустимою еквівалентність в індивідуальних перевагах, транзитивність може не виконуватись, і навіть можуть поєднуватись ступені переваг, оскільки в реальних завданнях прийняття рішень в інвестиційному процесі такі ситуації зустрічаються досить часто. А саме: $A^{(p)}=(a_g^p)$ — матриця парних порівнянь, де при $i \neq j\, a_g^p \in [0,1]$, $a_g^p + a_n^p = 1$ і $a_g^p = 0$ (хоча a_g^p і не використовуються в цій роботі).

Якщо допускаються лише строгі переваги, то $a_g^p \in [0,1]$, інакше $a_g^p = a_g^f = 1/2$ означає еквівалентність; у деяких постановках $a_g^p \in [0,1]$ інтерпретується як частина одиночної переваги, що приписується i (тоді $a_g^p = 1 - a_g^f$ приписується j). Транзитивність може передбачатись або не передбачатись. Допускаючи, що деякі спеціальні обмеження накладено на $A^{(p)}$ (чи на A в цілому), позначимо через A множину усіх припустимих профілів переваг з даними n-кількістю альтернатив та m-кількістю учасників.

Оціночний оператор або оціночна процедура — це функція $\varphi : A \to IR^n$, де $\varphi(A) = (s_1, ..., s_n)$, а s_1 є рахунок (чи "вага", оцінка), приписуваний альтернативі i. Рахунок часто асоціюється із сумою балів, що присвоюються кращим альтернативним варіантам. Однак у ряді праць [1] рахунок розуміють як загальну оцінку, що визначається за результатами порівнянь даної альтернативи.

Існує ряд праць, присвячених аксіоматиці методів оцінювання, упорядкування і вибору (табл. 1). Вони розташовані в таблиці хронологічно, і кожен стовпчик може бути використаний для отримання класифікації результатів цих робіт.

Структури підсумкових переваг. Почнемо з третього стовпчика табл. 1. Бали, набрані інвестиційними проектами, можуть бути або альтернативними варіантами інвестиційних рішень або використовуватись самі по собі, а також як основа для їх вибору чи упорядкування за перевагами.

Тому результати можуть бути класифіковані на такі, що характеризують:

— процедури ранжування, засновані на набраних ними балах. Результатом може бути:

а) слабкий порядок;

б) частковий порядок;

в) слабкий порядок на всіляких підсумкових упорядкуваннях [5];

— процедури вибору, засновані на набраних ними балах (вибирають альтернативи з максимальним рахунком). У табл. 1 є процедури, що породжують: а) множину, яку обирають; б) декілька варіантів k-елементної множини, яку обирають (k фіксоване); в) функцію вибору, що визначає вибір з будь-якої множини j;

— процедури, результатом яких є набрані об'єктами бали [5].

Форма вихідних переваг також різноманітна в різних працях:

— частіше за все це профіль класичних індивідуальних переваг: а) лінійних порядків; б) слабких порядків;

— переваги у профілі можуть мати більш узагальнену форму: а) турнірів; б) довільних бінарних рівнянь; в) зважених (нечітких) рівнянь; г) неповних кососиметричних матриць парних порівнянь (іншими словами, кососиметричних зважених відносин з порівнянністю, що відрізняється від нульових значень); д) довільних бюлетенів учасників.

— у деяких працях вихідні переваги подаються одним рівнянням (яке може розглядатися як рівняння більшості або інша функція групового профілю): а) турніром; б) пов'язаним рівнянням; в) зваженим рівнянням.

О.І. Ларичев агрегує серію парних порівнянь без урахування рівно-

Таблиця 1. Аксіоматичні характеристики оціночних методів

Праця	Вихідні переваги	Підсумкова структура	Важливі аксіоми	Результати методу
Гудман Марковіт с	m слабких порядків	слабкий порядок у всіх можливих ранжируваннях	послаблена СА	оптимальне ранжирування за "нижніми" балами Борда
Моркелю нас	m слабких порядків	слабкий порядок	послаблена СА, слабка версія підкріплення	а) ранжирування за "нижніми" балами Борда; б) узагальнене ранжирування Борда
Сміт	m лінійних порядків	слабкий порядок	а) підкріплення; б) значна більшість + "а"	а) композиція позиційних ранжирувань; б) позиційне ранжирування
Янг	m лінійних порядків	вибір	підкріплення	вибір Борда
Янг	m лінійних порядків	вибір	а) підкріплення; б) значна більшість + "а"	а) композиція позиційних виборів; б) позиційний вибір
Хенсон Сахлопус т	m лінійних порядків	вибір	підкріплення	вибір Борда
Янг, Левенглік	m лінійних порядків	набір лінійних порядків	підкріплення, локальна	медіани Кемені
Барбера	m лінійних порядків	бали	неманіпульо-ваність	а) опукла комбінація позиційних балів та лобі-балів; б) позиційні бали; в) лобі-бали; г) узагальнені бали Борда з точністю до афінного перетворення

цінності об'єктів, де всі альтернативи входять до однакової кількості порівнянь [2; 3].

Поняття "важливі аксіоми" (четвертий стовпчик табл. 1) суб'єктивне, не кажучи вже про те, що в наведених характеристиках усі аксіоми необхідні, значить, з формального погляду, вони однаково важливі.

"Послаблена СА" означає різні послаблення незалежно від сторонніх альтернатив Ерроу.

Підкріплення для процедури вибору вимагає: для будь-яких двох профілів переваг A і B, якщо A+B означає об'єднаний профіль, а C(A) є вибір за профілем A, то C(A+B)= C(A)+C(B) завжди, коли $C(A)\cap C(B)\neq 0$. Для процедур ранжирування підкріплення вимагає, щоб у випадку, коли i ранжовано не нижче ніж j та і для A і для B, це виконувалось і для (A+B) (зі звичайним у таких умовах додаванням для суворого випадку). Підкріплення для оціночних процедур означає, що рахунок кожної альтернативи за A+B є сума її балів за A і за B, тобто зводиться до адитивності.

Значна більшість для процедур вибору вимагає, щоб у випадку, коли C(A)=(i), для будь-якого B існувало ціле k', таке, що C(kA+B)=(i) для всіх $k\geq k'$. Тут kA — профіль, що складається з k-копій профілю A. Значну більшість для процедур ранжування отримаємо, якщо в цьому формулюванні замінити вибір на парну перевагу в підсумковому рівнянні.

Незалежність від циклів вимагає, щоб множина (відповідно, підсумкове ранжування), яка обирається, не змінювалась при зміні напряму будь-якого циклу у вихідному рівнянні переваг. Незалежність від контурів і незалежність від змінних циклів — варіанти цієї аксіоми.

Скорочення для процедур, що працюють на профілях зважених рівнянь, вимагає, щоб при умові, що для будь-яких i та j сума значень рівняння на парі (i, j) дорівнює сумі на парі (j, i), результативне рівняння зрівнювало всі альтернативи.

Неманіпульованість у даному випадку означає, що якщо підсумкові бали використовують як частоти в лотереї, а кожен учасник має функцію корисності, що визначає упорядкування альтернатив, то жодний учасник не може збільшити свою очікувану корисність перекручуванням свого дійсного ранжування.

Таким чином, ми можемо виділити три основні групи результатів, а саме заснованих на [6; 7; 9]: підкріпленні (інколи доповненому значною більшістю); різних послабленнях СА. В аксіоматиках медіани Кемені вони комбінуються з підкріпленням; незалежності від циклів і його варіантах.

Серед інших аксіом виділимо: неманіпульованість; аксіому неявної форми балів; скорочення, що є доволі сильною аксіомою у застосуванні до зважених рівнянь [12].

Останній стовпчик таблиці 1 потребує додаткових визначень. Для надання індивідуальних переваг (як звичайних, так і у зважених бінарних рівняннях) ми використовуємо матриці парних рівнянь $A^{(p)} = a_{ij}^{p}, p = 1,...,n$.

Коли вихідне значення переваги єдине, замість матриці $A^{(p)}$ використовується одна матриця $A^{(p)} = (a_{ij})$. На відміну від інших, ми не передбачаємо $a_{ij}^p + a_{ji}^p = 1$ при всіх $j \neq i$. Для чітких співвідношень Rp:

$$a_{ij}^p = \begin{cases} 1, \text{коли } (i,j) \in R^p \text{ і } (j,i) \notin R^p, \\ 0, \text{в інших випадках} \end{cases}.$$

Перш за все, ми вводимо доволі узагальнену форму балів, що використовується в методах табл. 1. Узагальнені бали Борда визначають таким чином:

$$s_i = \sum_{j\neq i}\sum_{p=1}^{m}(a_{ij}^p - a_{ji}^p),\ i=1, ..., n. \quad (1),$$

Ідея сумування різниці належить Копленду, але його ім'я, як правило, згадується лише при використанні таких балів, отриманих об'єктами за єдиним рівнянням переваг, особливо щодо простої більшості.

Узагальнене ранжирування Борда та узагальнений вибір Борда позначають у табл. 1 різні прояви ранжирування і вибору, що визначаються узагальненими балами Борда у випадку, якщо вони не мають власної назви. Зокрема, терміни "вибір Борда" та "ранжування Борда" використовують, коли вихідні профілі складаються з лінійних порядків. При розгляді функцій вибору вибір Борда (або Копленда) може мати абсолютну або відносну форму залежно від того, чи рахуються бали за всією множиною об'єктів або за її пропонованою підмножиною.

Бали:

$$s_i = \sum_{j\neq i}\sum_{p=1}^{m} a_{ij}^p,\ i=1, ..., n \qquad і,$$

$$s_i = \sum_{j\neq i}\sum_{p=1}^{m}(-a_{ji}^p),\ i=1, ..., n,$$

називаються тут нижніми та верхніми балами Борда, відповідно. Для профілів з лінійних порядків вони еквівалентні узагальненим балам Борда з точністю до зростаючого афінного перетворення. У цьому випадку вони називаються просто балами Борда.

Для профілів з лінійних порядків нижні бали Борда узагальнюються двома способами. Бали:

$$s_i = \sum_{p=1}^{m} a(\sum_{j\neq i} a^p),\ i=1, ..., n,$$

де a (-) — невід'ємна неспадана дійсна функція, є позиційними. Функція a (-) визначає часткові бали, що даються альтернативі i за кожне місце в індивідуальних упорядкуваннях.

Композиція позиційних ранжирувань реалізується, якщо ми маємо декілька векторів позиційних балів та застосовуємо їх послідовно для руйнування останніх еквівалентностей між альтернативами в підсумковому упорядкуванні. При композиції позиційних виборів ці вектори оцінок використовуються для послідовного звуження вибору.

Бали:

$$s_i = \sum_{p=1}^{m} a\left(\sum_{j=i} a_{ij}^p\right),\ i=1, ..., n,$$

$$s_i = \sum_{j\neq i} \beta(\sum_{p=1}^{m} a_{ij}^p),\ i=1, ..., n,$$

де (-) — не невід'ємна неспадна дійсна функція, назвемо їх лоббі-балами. Функція (-) визначає часткові бали, що приписуються альтернативі i за кожний розмір "лобі" (коаліції, яка підтримує i порівняно з j).

Найбільш загальною формою балів типу Борда для профілів з лінійних порядків є опукла комбінація позиційних балів та лоббі-балів:

$$s_1 = v\sum_{p=1}^{m} a\left(\sum_{j\neq i} a_{ij}^{p}\right) + (1-v)\sum_{j\neq i}\beta\left(\sum_{p=1}^{m} a_{ij}^{p}\right),$$

i=1, ..., n,

де $0 \le v \ge 1$. Той самий підхід може бути застосований і до узагальнених балів. Узагальнені рядкові суми утворюють однопараметричну групу балів, що збігаються з узагальненими балами Борда на повних структурах переваг і задовольняють визначеним системам лінійних рівнянь.

Нарешті, медіана Кемені — це множина усіх підсумкових ранжувань, найближчих до вихідних переваг за метрикою "сума абсолютних різниць на всіх парах альтернатив". Цей метод ранжування не визначається балами, але ми включаємо його до розгляду, оскільки його характеристики тісно пов'язані з характеристиками бальних методів. Цей медіанний підхід був уперше запропонований у не зовсім ясній формі ще Кондорсе.

Отже, останній стовпчик табл. 1 дає можливість дати таку класифікацію аксіоматичних характеризацій. Методи оцінювання, ранжування та вибору з табл. 1 засновані на [7; 8; 9; 10]:

— різних проявах узагальнених балів Борда;

— узагальнених рядкових сумах;

— нижніх та верхніх балах Борда для профілів зі слабких порядків і зважених рівнянь, а саме на:

а) нижніх балах Борда;

б) перетині нижніх і верхніх ранжирувань Борда;

— позиційних балах і лоббі-балах:

а) їх опуклій комбінації;

б) інтегрованих позиційних балах;

в) позиційних балах;

— сумі довільних індивідуальних балів;

— використанні медіани Кемені.

Огляд деяких статистичних, оптимізаційних та інших моделей, що приводять до балів типу Борда, дано в [11].

При аналізі й обробці експертної інформації виникає порівняно новий об'єкт дослідження — оцінки експерта. Основні види експертної інформації — це відношення на множині альтернатив. Якщо оцінки експерта мають якісний характер — це відношення лінійного чи часткового порядку, еквівалентності, толерантності, а іноді довільні відношення, що не мають таких властивостей, як пов'язаність, транзитивність тощо. Якщо експертна інформація містить кількісні оцінки — це метризовані відношення відповідного типу. Одним з основних інструментів, використовуваних при аналізі й обробці експертної інформації, є міри близькості. Міри близькості дають змогу визначити, наскільки близькі чи далекі точки зору експертів. Оскільки експерти вказують на множину розглянутих альтернатив відношень різного типу, міри близькості повинні бути введені на основних типах відношень.

Характерною ознакою мір близькості є аксіоматичний спосіб їх введення. Міра близькості повністю визначається сукупністю вимог, які вона повинна задовольняти. Тому при конкретних дослідженнях необхідно вибрати серед мір близькості ту, котра найбільше відповідає характеру експертної інформації.

Міри близькості дають змогу вирішувати ряд важливих завдань, що виникають при аналізі й обробці експертної інформації. Так, за допомогою мір близькості можна вирішити завдання визначення результативного відношення заданого типу за відношеннями, вказаними експертами, і в тому числі завдання визначення результативного ранжування за ранжуванням, вказаним експертами. Як результативні відношення доцільно вибирати відношення, що найбільш близькі до відношень, вказаних усіма експертами.

За допомогою мір близькості можна визначити відношення заданого типу найближче до отриманого в експерименті. Це завдання досить часто виникає при використанні методу парних порівнянь.

Не менш важливим завданням є класифікація експертів на підставі висловлених ними суджень. Оскільки висловлене експертом судження є, як правило, відношенням того або іншого типу, для класифікації експертів можна скористатися мірами близькості на відношеннях. В один клас будуть потрапляти експерти, для яких відстані між вказаними ними відношеннями порівняно малі.

За допомогою мір близькості можуть розв'язуватися задачі формування вербально-числових шкал, формування узагальнених лінійних критеріїв тощо.

Міра близькості між Кемені і довільними ранжуваннями P1 і P2, що задовольняє аксіомам 1—7 [4], визначається за формулою:

$$d(P_1, P_2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j}^{(1)} - p_{i,j}^{(2)} \quad (2).$$

Наведемо приклад розрахунку значень мір близькості між ранжуваннями. Ранжуванням

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_5 \\ a_1 - a_4 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_2 - a_3 \\ a_1 - a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

відповідають матриці відношень

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Між ранжуваннями P_1 і P_2 значення мір близькості $d(P_1, P_2)=7$.

Зазначимо, що відстань між довільними ранжируваннями P_1 і P_2 можна розраховувати лише за допомогою елементів матриць $M(P_1)$ та $M(P_2)$, розташованих над головною діагоналлю. Тому зручніше користуватися формулою:

$$d(P_1, P_2) = \sum_{i=1} \left| p_{ij}^{(1)} - p_{ij}^{(2)} \right| \quad (3),$$

Розрахунок мір близькості на відношень часткового порядку еквівалентності, толерантності, на довільних співвідношеннях відбувається за формулою [4]:

$$d(P_1, P_2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left| p_{i,j}^{(1)} - p_{i,j}^{(2)} \right| \quad (4),$$

Нехай експертами зазначені дві еквівалентності

$P_1 = \{(a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_3, a_4), (a_2, a5)\}$ і $P_2 = \{(a_1, a_5), (a_2, a_3)\}$

(Усі пари альтернатив (a, ai), і {1, ..., n} належать P_1 і P_2). Їм відповідають матриці відношень:

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значення міри близькості між еквівалентностями P_1 і P_2 .

Нехай експертами вказані два рівняння часткового порядку $P_1 = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_5), (a_2, a_4), (a_2, a_5)\}$ і $P_2 = \{(a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_4), (a_3, a_5)$. Їм відповідають матриці відношень:

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значення міри близькості між відношеннями часткового порядку P_1 і P_2 $d(P_1, P_2) = 10$.

Нехай експертами зазначені дві толерантності P_1 і P_2, яким відповідають матриці відношень:

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(P_2)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&1&1&0\\0&1&1&0&1\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Значення міри близькості між толерантностями P_1 і P_2 $d(P_1,P_2)=5$.

Нехай експертами вказані довільні відношення P_1 і P_2, що характеризують можливість зарахування різних пар альтернатив до одного класу, який відповідає матриці відношень:

$$M(P_1)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\1&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix},$$

$$M(P_2)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що при різному порядку пред'явлення пари альтернатив судження експертів про належність альтернатив до одного класу в деяких випадках змінювалися.

Значення міри близькості між відношеннями P_1 і P_2 $d(P_1,P_2)=7$.

Нехай експертами зазначені довільні відношення P_1 і P_2, що характеризують порівняльну прийнятність пар альтернатив, яким відповідають матриці відношень:

$$M(P_1)=\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\-1&0&1&-1&1\\0&-1&0&0&1\\-1&1&0&0&0\\1&-1&-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$M(P_2)=\begin{pmatrix}0&0&1&-1&0\\0&0&-1&1&1\\1&1&0&0&-1\\1&-1&0&0&1\\0&-1&1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Значення міри близькості між відношеннями P_1 і P_2 $d(P_1,P_2)=12$.

Наведемо приклад подання експертної інформації за допомогою векторів переваг результатів парних порівнянь.

Нехай експертами при парних порівняннях зазначені відношення P_1 і P_2 з матрицями відношень:

$$M(P_1)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix},$$

$$M(P_2)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Їм відповідають вектори переваг $\pi^{(1)}=(0,1,2)$ і $\pi^{(2)}=(1,1,1)$.

Пояснимо отримання вектора $\pi^{(1)}$. Дійсно, при відношенні P_1 альтернативу a_1 перевершує одна альтернатива a_2, а альтернативу a_2 — жодна, а a_3 — дві альтернативи a_1 і a_2. Відношення P_1 є відношенням лінійного порядку, а для відношення P_2 властивість транзитності не виконана.

Аксіоматично введемо міри близькості на векторах переваг. Насамперед визначимо вектор переваг $\pi^{(y)}=(\pi_1^{(y)},...,\pi_n^{(y)})$, що лежить між двома заданими $\pi^{(v)}=(\pi_1^{(v)},...,\pi_n^{(y)})$ і $\pi^{(p)}=(\pi_1^{(p)},...,\pi_n^{(p)})$. Будемо говорити, що лежить між векторами переваг $\pi^{(v)}$ і $\pi^{(p)}$, і позначати $[\pi^{(v)},\pi^{(y)},\pi^{(p)}]$, якщо $\min\{\pi_i^{(v)},\pi_i^{(p)}\}\le\pi_i^{(y)}\le\max\{\pi_i^{(v)},\pi_i^{(p)}\}, i\in\{1,...,n\}$.

Наведемо систему аксіом, що визначає вимоги до мір близькості на векторах переваг, без додаткових обговорень.

Аксіома 1.

$d(\pi^{(v)},\pi^{(p)})\ge 0, d(\pi^{(v)},\pi^{(p)})=0$ тоді і тільки тоді, коли $\pi^{(v)}=\pi^{(p)}$.

Аксіома 2.

$d(\pi^{(v)},\pi^{(p)})=d(\pi^{(p)},\pi^{(v)})$.

Аксіома 3.

$d(\pi^{(v)},\pi^{(p)})\le d(\pi^{(v)},\pi^{(y)})+d(\pi^{(y)},\pi^{(p)})$.

Аксіома 4.

Якщо $[\pi^{(v)},\pi^{(y)},\pi^{(p)}]$, то

$d(\pi^{(v)},\pi^{(p)})=d(\pi^{(v)},\pi^{(y)})+d(\pi^{(y)},\pi^{(p)})$.

Аксіома 5. Якщо вектори переваг і розрізняються тільки i-ю компонентою, то $d(\pi^{(v)},\pi^{(p)})=\left|\pi_i^{(v)}-\pi_i^{(p)}\right|$. Доведемо одиничність міри близькості, що задовольняє аксіоми 1—5.

Теорема 1. Аксіоми 1—5 однозначно визначають міру близькості на множині векторів переваг.

Доведення теореми. Проведемо індукцію за числом n компонентів довільних векторів $\pi^{(v)}$ і $\pi^{(p)}$, які не збігаються. Якщо n=1, відстань між $\pi^{(v)}$ і $\pi^{(p)}$ однозначно визначиться за аксіомою 5. Нехай твердження теореми справедливе при n≤k. Покажемо тоді, що воно виявиться справедливим і при n=k+1. Нехай $\pi^{(v)}$ і $\pi^{(p)}$ — вектори, що розрізняються на k+1-й компоненті, в тому числі на i-й.

Введемо вектор переваг $\pi^{(y)}$, що відрізняється від $\pi^{(v)}$ лише i-ю компонентою, що у $\pi^{(y)}$ збігається з i-ю компонентою вектора переваг $\pi^{(p)}$. Легко переконатися, що $[\pi^{(v)},\pi^{(y)},\pi^{(p)}]$. Тоді за аксіомою 4 $d(\pi^{(v)},\pi^{(p)})=d(\pi^{(v)},\pi^{(y)})+d(\pi^{(y)},\pi^{(p)})$. Вектори переваг $\pi^{(v)}$ і $\pi^{(p)}$ відрізняються лише за однією компонентою, а $\pi^{(v)}$ і $\pi^{(y)}$ не більше, ніж на k компонентах. Отже, відстані $d=(\pi^{(v)},\pi^{(y)})$ і $d=(\pi^{(y)},\pi^{(p)})$ визначаються однозначно, а отже, однозначно визначиться і $d=(\pi^{(v)},\pi^{(p)})$.

Теорема 2. Міра близькості між довільними векторами переваг і визначається за формулою:

$$d(\pi^{(v)},\pi^{(p)})=\sum_{i=1}^{n}\left|\pi^{(v)}-\pi_i^{(p)}\right| \quad (5).$$

Для доведення теореми досить переконатися, що міра близькості $d=(\pi^{(v)},\pi^{(p)})$, обумовлена формулою, задовольняє аксіоми 1—5.

З введенням мір близькості [4] отримано можливість визначати відстань між довільною парою ранжувань. Природно припустити, що результативне ранжування F(P_1, ..., P_m) повинне бути розташовано якнайближче до ранжувань (P_1, ..., P_m). Таке ранжувань M*(P_1, ..., P_m) і називається медіаною Кемені:

$$M^*(P_1,...,P_m)=\arg\min\sum_{v=1}^{b}d(P,P_v). \quad (6)$$

Медіана Кемені є одним із найбільш обгрунтованих способів вибору результативного ранжування на основі ранжування, зазначеного експертами. Наведемо алгоритми пошуку медіани Кемені. Зручним способом подання інформації про сукупність ранжувань альтернатив експертами є матриці втрат [4], що визначають нижче.

Задача пошуку медіани Кемені належить до універсальних задач дискретної оптимізації [4] і вимагає для свого розв'язання оцінюваної експоненціально кількості арифметичних операцій. Тому для пошуку медіани Кемені пропонується евристичний алгоритм.

Можливі різні форми подання інформації про ранжування P_1, ..., P_m. Одна з найбільш поширених — матриці відношень $\|p_{ij}^{(1)}\|\|...\|\|p_{ij}^{m}\|$. При введенні мір близькості доцільно розглядати матриці втрат $\|r_{ij}\|$. Відстань від довільного ранжування P, котрому відповідає матриця $\|p_{ij}\|$, до всіх ранжувань P_1, ..., P_m, зазначених експертами, яким відповідають матриці відношень $\|p_{ij}^{(1)}\|\|...\|\|p_{ij}^{m}\|$, визначається за формулою:

$$\sum_{i=1}^{m}d(P,P_v)=\sum_{v=1}^{m}\left|p^{(v)}ij-p_{ij}\right|=\sum_{i<j}\sum_{v=1}^{m}\left|p^{(v)}ij-p_{ij}\right|=\sum_{i<j}\sum_{v=1}^{m}d_{ij}(P,P_v) \quad (7)$$

де $d_{ij}(P,P_v)=\left|p^{(v)}ij-p_{ij}\right|$. Таким чином, сумарну відстань від P до P_1, ..., P_m, зазначену експертами, можна подати за допомогою $d_{ij}(P,P_v)$. Зазначимо, що при $p_{ij}=1$

$$d_{ij}(P,P_v)=\begin{cases}0, \text{якщо } p_{ij}^{(v)}=1,\\ 1, \text{якщо } p_{ij}^{(v)}=0,\\ 2, \text{якщо } p_{ij}^{(v)}=-1.\end{cases}$$

Визначимо елемент матриці втрат r_{ij} як $r_{ij}=\sum_{v=1}^{m}d_{ij}(P,P_v)$ при $p_{ij}=1$. Щоб отримати r_{ij}, необхідно розглянути $\sum_{v=1}^{m}d_{ij}(P,P_v)$ при $p_{ij}=1$. Елементи матриці втрат визначаються ранжуванням P_1, ..., P_m і не залежать від ранжування P. Тоді для довільного ранжирування P $\sum_{v=1}^{m}d_{ij}(P,P_v)=\sum_{(i,j)\in I_p}r_{ij}$, де I_p — множина пар індексів (i, j) таких, що $(a_i,a_j)\in P$, тобто ai>aj.

Наведемо приклад побудови матриці втрат. Нехай експертами зазначені ранжування

$$P_1=\begin{pmatrix}a_2\\a_4\\a_1\\a_3\end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix}a_2\\a_3-a_4\\a_2\end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix}a_2-a_3\\a_4\\a_1\end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 - a_4 \end{pmatrix},$$

яким відповідають матриці відношень

$$\left\| p_{ij}^{(1)} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\| p_{ij}^{(2)} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\| p_{ij}^{(3)} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\| p_{ij}^{(4)} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $r_{14} = \sum_{v=1}^{m} d_{14}(P, P_v)$, де P — довільне ранжирування, в якому $p_{14}=1$, тобто a1>a4: r14=2+0+2+1=5. Значення $r_{41} = \sum_{v=1}^{m} d_{41}(P, P_v)$, де P — довільне ранжирування, в якому p41=1: r41=0+2+0+1=3. Інші значення rij розраховують аналогічно. Матриця втрат $\left\| r_{ij} \right\|$ має такий вид:

$$\left\| r_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

У матриці втрат нумерація рядків і стовпців збігається, причому рядку і стовпцю з певним номером відповідає альтернатива, що має той самий номер. Задача пошуку медіани Кемені для ранжирування може бути сформульована як задача пошуку такого упорядкування альтернатив, а отже, рядків і стовпчиків матриці втрат, щоб сума її елементів, розташованих над діагоналлю, була мінімальною. Таким чином, уся інформація про ранжування експертів, необхідна для пошуку медіани Кемені, міститься у матриці втрат.

Нехай $\left\| r_{ij}^{(0)} \right\|$ — матриця втрат множини ранжувань $P_1, ..., P_m$.

1-ша ітерація. Обчислимо $s_1^1 = \sum_{j=1}^{n} r_{1j}, ..., s_n^1 = \sum_{j=1}^{n} r_{nj}$. $s_{i1} = \min_i s_i^{(1)}$. Альтернативу ai_1 ставимо на перше місце в шуканому ранжуванні. Вважаємо $S^{(1)} = s_{i1}$. Викреслюючи в $\left\| r_{ij}^{(0)} \right\|$ рядок і стовпчик з номером i_1, одержуємо матрицю $\left\| r_{ij}^{(1)} \right\|$, множина індексів рядків і стовпців якої, відповідно, $I^{(1)} = J^{(1)} = \{1, ... n\} \setminus i_1$.

k-та ітерація. У матриці втрат $\left\| r_{ij}^{(k-1)} \right\|$ обчислимо $s_i^{(k)} = \sum_{j=1} r_{ij}, i \in I$. Знайдемо $s_{ik} = \min_i s_i^k$. Альтернативу aik ставимо на k-те місце в шуканому упорядкуванні. Вважаємо $S^{(k)} = S^{(k-1)} + s_{ik}$. Викреслюючи в $\left\| r_{ij}^{(k-1)} \right\|$ рядок і стовпчик з номером ik, одержуємо матрицю $\left\| r_{ij}^{(k)} \right\|$, множина індексів рядків і стовпців якої $I^{(k)} = J^{(k)} = \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_k\}$.

Алгоритм закінчується після ітерації. Шукане упорядкування:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{im} \end{pmatrix}, \sum_{v=1}^{m} d(P_1, P_v) = s^{(n)} \quad (8).$$

Доцільно використовувати такий простий алгоритм переходу від ранжування P_1 до ранжування P_1i, для якого виконано необхідну умову оптимальності.

Послідовно перевіряємо справедливість співвідношень $r_{ikik+1} \le r_{ik+ik}$, $k = n-2, ..., 1$. Як тільки для якогось k воно порушено, альтернативи a_{ik} та a_{ik+1} у ранжуванні змінюємо місцями, а співвідношення $r_{ikik+1} \le r_{ik+ik}$ перевіряємо, починаючи з альтернативи, що безпосередньо передує альтернативі, яку піддали перестановці. Після кінцевої кількості кроків буде отримано Pi1, для якого необхідна умова оптимальності виконана. Тому, якщо множина ранжирувань $P_1, ..., P_m$ має властивість Кондорсе і, отже, транзитивна, то, відповідно до теореми, є медіаною Кемені для ранжирувань $P_1, ..., P_m$.

Розглянемо, нарешті, задачу пошуку медіани Кемені на множині векторів переваг.

Нехай $\pi^{(1)}, ..., \pi^{(m)}$ — вектори переваг, зазначені експертами, а P — довільне ранжування. Поставимо йому у відповідність n-й вектор $\pi = (\pi^{(1)}, ..., \pi^{(m)})$, i-та компонента якого дорівнює кількості альтернатив, кращих, ніж ai. Медіаною Кемені в цьому випадку буде ранжування таке, що

$$\sum_{v=1}^{m} d(\pi^{(*)}, \pi^{(v)}) = \min \sum_{v=1}^{m} d(\pi, \pi^{(v)} \quad (9),$$

мінімум береться за всіма векторами переваг, що відповідають ранжуванням. Із співвідношення випливає, що

$$\sum_{v=1}^{m} d(\pi, \pi^{(v)}) = \sum_{v=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left\| \pi_i - \pi_i^{(v)} \right\| \quad (10).$$

Нехай у ранжуванні P альтернатива aj розташована на j-му місці. Введемо $r_{ij} = \sum_{v=1}^{m} \left\| \pi_i - \pi_i^{(v)} \right\|$. Розглядаючи ранжування, у яких довільна альтернатива ai, $i = \in \{1, ..., n\}$ розташована послідовно від 1 до n-го місця, одержимо матрицю втрат $\left\| r_{ij} \right\|$, аналогічну матриці втрат для ранжувань. У даному випадку r_{ij} характеризує "незгоду" експертів з призначенням альтернативи ai на i-тому місці результативного ранжування. Введемо змінну:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{коли альтернатива } a_i \text{ призначена на i - те місце} \\ 0 \text{ - в інших випадках} \end{cases}$$

Вектор $X = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{nn})$ тоді і тільки тоді відповідає деякому ранжируванню, коли

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i \in \{1, ..., n\},\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j \in \{1, ..., n\} \quad (11).$$

Медіаною Кемені буде ранжування, на якому $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij}$ досягає мінімуму.

ВИСНОВКИ

Таким чином, задача пошуку медіани Кемені може бути сформульована у вигляді такої оптимізаційної задачі:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij} \to \min$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i \in \{1, ..., n\},\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j \in \{1, ..., n\}$$

$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} i, j, \in \{1, ..., n\}$ — відомої під назвою задачі про вибір, або задачі про призначення [4].

Література:

1. Кроль Ю.Я. Економічний механізм інвестиційного бізнес-планування (методологія та практика). — Харків: Основа, 2002. — 176 с.
2. Ларичев О.И. Свойства методов принятия решений в многокритериальных задачах индивидуального выбора. — М.: Автоматика и Телемеханика, 2001.
3. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий. — М.: Логос, 2000.
4. Литвак Б.Г. Экспертные оценки и принятие решений. — М.: Патент, 1996. — 271 с.
5. Моисеев И.Н. Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1981. — 487 с.
6. Орлов А.И. Допустимые средние в некоторых задачах экспертных оценок и интегрирования показателя качества. — М.: Наука, 1974. — 398 с.
7. Панкова Л.А., Петровский А.М., Шнейдерман М.В. Организация экспертиз и анализ экспертной информации. — М.: Наука, 1984. — 120 с.
8. Саати Т., Керне К. Аналитическое планирование. Организация системы. — М.: Радио и связь, 1991.
9. Статистические методы анализа экспертных оценок. — М.: Наука, 1997. — 384 с.
10. Холт Р.Н. Основы финансового менеджмента. — М., 1993.
11. Чеботарев П.Ю. Метод строчных сумм и приводящие к нему модели // Проблемы компьютеризации и статистической обработки данных. — М.: ВНИИСИ, 1989. — С. 94—110.
12. Эндовицкий Д.А. Комплексный анализ и контроль инвестиционной деятельности: методология и практика / Под ред. проф. Л.Т. Гиляровской. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 400 с.

Стаття надійшла до редакції 18.11.2008 р.